

VORLESUNGEN

ÜBER DIE

ALGEBRA DER LOGIK

(EXAKTE LOGIK)

VON

Dr. ERNST SCHRÖDER,

ORD. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU KARLSRUHE IN BADEN,
KORRESPONDIERENDEM MITGLIEDE DER BRITISH ASSOCIATION FOR THE ADVANCEMENT OF SCIENCE.

ZWEITER BAND.

ERSTE ABTEILUNG.

MIT VIEL FIGUREN IM TEXTE.

Dem Begründer die Ehre, auch wenn der Nachfolgende es besser macht.
(Arabisches Sprichwort.)

Wage, deinen Verstand zu gebrauchen!
(Sapere aude).
Horaz.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1891.

Vorwort.

Die noch vor der Fertigstellung des Textes zum zweiten Bande an den Verfasser herangetretenen Direktionsgeschäfte der technischen Hochschule haben demselben nicht gestattet, über die verhältnissmässig geringen Lücken seines Manuskripts im Lauf des Jahres hinwegzukommen, und glaubt derselbe, von manchen Seiten gedrängt, die Herausgabe der seit fünf Monaten im Druck vollendeten ersten Abteilung dieses Bandes nicht länger zurückhalten zu sollen. Die zweite (und letzte) Abteilung dürfte bald nach den Herbstferien folgen.

Karlsruhe in Baden, im Juni 1891.

Der zahlreichen Rückverweisungen halber geben wir unserm zweiten Bande auch wieder mit bei den

Inhalt des ersten Bandes.

Sechste Vorlesung.

Siebente Vorlesung.

Achte Vorlesung.

Neunte Vorlesung.

Zehnte Vorlesung.

Elfte Vorlesung.

Zwölfte Vorlesung.

Dreizehnte Vorlesung.

Vierzehnte Vorlesung.

Anhänge.

Inhalt des zweiten Bandes.

(Erste Abteilung.)

Fünfzehnte Vorlesung.

Sechzehnte Vorlesung.

Siebzehnte Vorlesung.

Achtzehnte Vorlesung.

Neunzehnte Vorlesung.

Zwanzigste Vorlesung.

Einundzwanzigste Vorlesung.

Zweiundzwanzigste Vorlesung.

Dreiundzwanzigste Vorlesung.

(Zweite Abteilung.)

Fernere Berichtigungen und Nachträge zum ersten Bande.

Zu Seite 1 (Titelblatt).

Es wird der Aufmerksamkeit des geehrten Lesers nicht entgangen sein, dass (anstatt ... Und rings ist frische, grüne Weide) der Schluss des zweiten Motto's lauten sollte:

Von einem bösen Geist im Kreis herum geführt,
Und rings umher liegt schöne grüne Weide.

Die durch Zufallstücke herbeigeführte bedauerliche Entstellung des Citats konnte bei der Auflage mittelst Kartons und neuer Decken nur zum grössern Teile wieder gut gemacht werden.

Seite VI, Zeile 4 von oben ist zu bemerken, dass „das Vierteljahrhundert“ rhetorisch, oder auch als eine nach den Regeln der Arithmetik bezüglich approximativer Zahlen *abgerundete* Zeitangabe aufzufassen ist: es sind nicht ganz, jedoch beinahe, anderthalb Vierteljahrhunderte seit Erscheinen von Boole's Laws of thought (1854) verstrichen gewesen. Vergl. die Besprechung im Literarischen Centralblatt für Deutschland 1891, No. 13.

Seite VIII bei § 15 st. Kritische Untersuchungen l. Kritische Vorbemerkungen.

„ IX bei Anhang 1 st. (Zu 6) l. (Zu § 6).

„ 48, Zeile 19 v. o. würde das Wort „Bedeutung“ besser durch „Sinn“ ersetzt, sodass der Passus lautete: „Der Name soll von einem bestimmt feststehenden oder konstanten Sinne sein“. Der Ausspruch würde dadurch auch äusserlich in Einklang kommen mit der später (S. 69 sq.) vom Verfasser vollzogenen Differenziirung jener bisherigen Synonyme im Zusammenhang mit derjenigen von „doppelsinnig“ und „zweideutig“ etc.

Allerdings habe ich in Bd. 1 bei verschiedenen, jedoch auseinanderliegenden Betrachtungen das Wort „Bedeutung“ nicht durchweg im gleichen Sinne gebraucht, auf dessen Mehrsinnigkeit jedoch selbst wiederholt (S. 50 sq., 69 sq.) aufmerksam gemacht. Die hierauf gerichtete ist so ziemlich die einzige von den zahlreichen Ausstellungen meines Rezensenten in den Göttingischen gelehrten Anzeigen, Herrn Husserl[1], die ich als berechtigt empfinde, und anerkenne. Sollte man nicht in der That den Mars, oder die Erde, etc. auch „eine Bedeutung“ des Gemeinnamens „Planet“ nennen dürfen? Doch trifft der Vorwurf nicht mich, sondern den Sprachgebrauch. Sapienti sat.

„ 191, Überschrift des § 5, wird bezüglich der Berechtigung, die fragliche Definition Herrn Peirce (und nicht Herrn Mc Coll) zuzuschreiben, der Rückblick im § 54, zweite Abteilung des Bandes 2 zu vergleichen sein.

„ 214, rechts l. Fig. 9_+ st. Fig. $9_\times$.

„ 280, Zeile 9 v. u. st. 18) beidemal zu lesen 17).

„ 284, „ 17 v. o. st. § 20 l. § 19.

„ 302 und 305 möchte ich als *wertvoll* gerne folgendes in Bd. 1 noch aufgenommen haben.

Die Art, wie Herr Robert Grassmann die Eindeutigkeit der Negation und den Satz der doppelten Verneinung beweist, bildet eine Variante der l. c. uns gegebenen Beweise, welche dadurch interessant erscheint, dass sie von dem Hülfstheorem 29), Bd. 1, S. 299 keinen Gebrauch macht, desselben entrát.

Der Zusatz 1 zu Def. (6) knüpft an die Voraussetzungen:

$$30_\times) \qquad a a_1 = 0, \qquad a + a_1 = 1, \qquad 30_+)$$

$$30_\times') \qquad a a_1' = 0, \qquad a + a_1' = 1, \qquad 30_+')$$

die Behauptung:

$$a_1' = a_1,$$

und wird von R. Grassmann wie folgt bewiesen.

Nach Th. $21_\times$), der Voraussetzung, $30_+'$), Prinzip $III_\times$, der Voraussetzung, $30_\times$) und Th. 21_+) haben wir:

$$a_1 = a_1 . 1 = a_1 (a + a_1') = a_1 a + a_1 a_1' = 0 + a_1 a_1' = a_1 a_1'$$

und ebenso — nur 30′) mit 30) vertauscht:

$$a_1' = a_1' . 1 = a_1' (a + a_1) = a_1' a + a_1' a_1 = 0 + a_1' a_1 = a_1 a_1',$$

also $a_1' = a_1$ kraft Th. 4), q. e. d.

Das Th. 31)

$$(a_1)_1 = a$$

wird so bewiesen.

Nach Th. $21_\times$), 30_+), Pr. $III_\times$, Th. $30_\times$) und 21_+) ist:

$$(a_1)_1 = (a_1)_1 . 1 = (a_1)_1 \{a + a_1\} = (a_1)_1 a + (a_1)_1 a_1 = (a_1)_1 a + 0 = (a_1)_1 a,$$

$$a = a . 1 = a \{a_1 + (a_1)_1\} = a a_1 + a (a_1)_1 = 0 + a (a_1)_1 = (a_1)_1 a,$$

also $(a_1)_1 = a$ wieder nach Th. 4), q. e. d.

Das Hülfstheorem 29) ist gleichwol von R. Grassmann in [5] p. 13 implicite gegeben (siehe die Ergänzung unsres Literaturverzeichnisses am Schlusse des vorliegenden Bandes).

Seite 352. Auch bei dem Beweis der Theoreme 36) De Morgan's, wo wir uns nochmals auf das Hülfstheorem 29) beriefen, würde dieses sich entbehren lassen mittelst folgender Variante der Beweisführung [bei der wir uns auch auf das Distributionsgesetz 27) nun schon berufen dürfen] — z. B. links vom Mittelstriche.

Behauptung: Th. $36_\times$) $(ab)_1 = a_1 + b_1$.

Beweis. Nach $21_\times$), 30_+), $\text{III}_\times$, $27_\times$), $30_\times$) und 21_+) ist:

$$a_1+b_1=(a_1+b_1).1=(a_1+b_1)\{(ab)+(ab)_1\}=(a_1+b_1)ab+(a_1+b_1)(ab)_1=$$
$$=a_1ab+b_1ab+(a_1+b_1)(ab)_1=0+0+(a_1+b_1)(ab)_1=(ab)_1(a_1+b_1)$$

und nachdem aus dem Zusatz zu Th. 33_+), Bd. 1, S. 308 erkannt worden, dass $a_1 + b_1 + ab = 1$ ist — indem ja die linke Seite hier

$$= a_1 + ab_1 + ab = a_1 + a\,(b_1 + b) = a_1 + a\,.\,1 = a_1 + a$$

sein muss — hat man auch nach $21_\times$), diesem Ergebniss, $27_\times$) etc. wie vorhin:

$$(ab)_1 = (ab)_1\,.\,1 = (ab)_1\{a_1 + b_1 + ab\} = (ab)_1(a_1 + b_1) + (ab)_1\,ab =$$
$$= (ab)_1(a_1 + b_1) + 0 = (ab)_1(a_1 + b_1),$$

sonach $a_1 + b_1 = (ab)_1$ kraft Th. 4), q. e. d.

Ähnlich rechts vom Mittelstriche in etwas kürzerer Darstellung haben wir — zunächst wegen $a + b + a_1b_1 = 1$:

$$(a + b)_1 = (a + b)_1\{a + b + a_1b_1\} = (a + b)_1\,a_1b_1,$$
$$a_1b_1 = a_1b_1\{a + b + (a + b)_1\} = a_1b_1\,(a + b)_1,$$

als Beweis des Theorems 36_+): $(a + b)_1 = a_1b_1$.

Man sieht jedoch auch, wie durch das Vorannehmen des Hülfstheorems 29) alle jene Beweisführungen (von uns) vereinfacht wurden.

Höchst interessant ist auch noch der Beweis, welchen Herr Peirce[5] p. 37 für die Theoreme 36) gibt.

Zu dem Ende hat man sich dessen Th. 41) ihnen vorausgeschickt zu denken, für welches wir ja in der That Bd. 1, S. 364 auch einen Beweis gegeben haben, der von den Theoremen 36) unabhängig ist und sich als auf den spätesten Satz nur auf das Th. 33) berief. Nach Peirce hat man für die bekannten Formeln De Morgan's

Th. 36) $(ab)_1 = a_1 + b_1$	$(a + b)_1 = a_1b_1$

den folgenden

Beweis. Nach Th. 30) ist:

$(ab)(ab)_1 = 0$	$1 = (a + b) + (a + b)_1$

oder wegen Def. (1) und dem Assoziationsgesetze 13):

$ab\,(ab)_1 \mathrel{\underline{\in}} 0$	$1 \mathrel{\underline{\in}} a + b + (a + b)_1$.

Bringt man in diesen Subsumtionen gemäss Th. 41) regelrecht

den Faktor a (von links) nach rechts,	das Glied a (von rechts) nach links,

so kommt:

$b\,(ab)_1 \mathrel{\underline{\in}} 0 + a_1 = a_1$	$a_1\,.\,1 = a_1 \mathrel{\underline{\in}} b + (a + b)_1$

und wenn darnach ebenso der Term b hinübergeschafft wird:

$(ab)_1 \mathrel{\underline{\in}} a_1 + b_1$	$a_1b_1 \mathrel{\underline{\in}} (a + b)_1$,

womit die Theoreme zunächst einseitig als Subsumtionen bewiesen erscheinen.

Um auch die umgekehrten Subsumtionen zu beweisen, wendet Peirce den Schluss der Konversion durch Kontraposition — cf. Th. 37), Bd. 1, S. 357 — an auf die Theoreme 6)

$$ab \subseteq a, \quad ab \subseteq b, \quad a \subseteq a + b, \quad b \subseteq a + b,$$

wonach wir haben:

$$a_1 \subseteq (ab)_1 \quad | \quad (a + b)_1 \subseteq a_1$$

$$b_1 \subseteq (ab)_1 \quad | \quad (a + b)_1 \subseteq b_1$$

und sich nach Def. (3) diese nocb ausstehenden Subsnmtionen:

$$a_1 + b_1 \subseteq (ab)_1 \quad | \quad (a + b)_1 \subseteq a_1 b_1$$

ergeben, somit die Sätze Th. 36) kraft Def. (1) bewiesen wären.

Schade nur, dass wir zum Beweis unsres soeben gebrauchten Theorems 37) selbst der Tbeoremo 36) bedurften — sonach hier blos ein circulus in demonstrando vorlag — und dass Herrn **Peirce**'s blos auf den Aussagenkalkul zugeschnittene Deduktion jener Kontrapositionsregel sich auf den Klassenkalkul nicht übertragen zu lassen scheint!

Ich verhehle mir keineswegs, dass in der späten Stellung, welcbo wir dem Theorem 37) $(a \subseteq b) = (b_1 \subseteq a_1)$ ungeachtet seiner Einfachbeit und seines hoben Grades von unmittelbarer Evidenz in dem Systeme unsrer Theorie anweisen mussten, sich *möglicherweise* noch eine Unvollkommenheit von deren, obzwar völlig korrekten, systematischem Aufbaue kund gibt. Wir batten uns genötigt gesehen, zu dessen Beweiso uns auf die Tbeoreme 20), 32) und 36), die von Gleichungen bandeln, zu berufen, wogegen es natürlicher erscbiene, namentlich das entsprechende Kontrapositionstheorem 32) für Gleichungen: $(a = b) = (a_1 = b_1)$ umgekehrt kraft Def. (1) auf dasjenige 37) für Subsumtionen zu gründen.

Ob aber solch umgekehrter Weg auch durchaus gangbar, ob es möglich ist, in seinem Verfolge ohne *mehr* oder verwickeltere Prinzipien zu postuliren als die sind, mit denen wir ausgekommen, das ganze Gebäude in gleicber Lückenlosigkeit und Korrcktheit zu errichten — dies zu entscheiden müssen wir künftigen Forschnngen und oventuell begabteren oder glücklicheren Denkern überlassen.

Seite 356, Zeile 4 v. u. st. a l. a_1.

„ 377. Zu Aufgabe μ) macht Herr **Wilhelm Rudeck** in Glatz i/Schles. die treffende Bemerkung, dass man, um die Gültigkeit der Subsumtion

$$ac_1 \subseteq ab_1 + bc_1$$

auf schnellstem Wege einzusehen, blos das Prädikat derselben gemäss Th. ι), Bd. 1, S. 376 in $bc_1 + c_1 a + ab_1$ umzuschreiben braucbt, wonach sie sich dann in der That kraft Th. 6_+) unmittelbar und elegant ergibt.

„ 379, Zeile 3 v. u. könnte nach einer Bemerkung von **Lüroth** das **Peirce**'sche

$$\text{Theorem } \nu) \qquad (ab \subseteq c + d) \subseteq (ac_1 \subseteq b_1 + d)$$

aus dessen Tbeoremen:

$$o_\times) \quad (ab \subseteq c) \subseteq (ac_1 \subseteq b_1) \quad \text{und} \quad o_+) \quad (a \subseteq b + c) \subseteq (b_1 \subseteq c + a_1),$$

ja schon aus einem von ihnen, z. B. dem erstern $o_\times$), etwa wie folgt abgeleitet werden:

Wenn $ab \subseteq c + d$ ist, so folgt nach jenem $a\,(c + d)_1 \subseteq b_1$ oder $ac_1 d_1 \subseteq b_1$ und dies, durch beiderseitiges Addiren verbunden mit der aus Th. $6_\times$) ohnebin selbstverständlicben Subsumtion $ac_1 d \subseteq d$ gibt: $ac_1 \subseteq b_1 + d$, q. e. d.

„ 384 möchte ich noch als ein paar geeignete Exempel:

$$ax + bx_1 + ab_1 + a_1 b = a + b, \quad ab + b\,(x + a_1) + a\,(y + b_1) = a + b$$

unter χ) mit eingereiht wissen.

„ 391, Zeile 16 v. o. oder u. st. Th. $15_\times$) l. Th. $17_\times$).

„ 542, „ 17 v. u. st. dieselbe l. diese.

„ 553 sq. Herr **Macfarlane** macht mich darauf aufmerksam, dass ich bei der 30. **Aufgabe** den Wortlaut seiner zweiten Prämisse nicht in seinem Sinne verstanden, anstatt der seinigen also eine etwas andere Aufgabe

behandelt und gelöst habe. Den Grund, weshalb mir solches entgehen durfte, wird man in meiner Schlussbemerkung zu der Aufgabe (auf S. 554) angedeutet finden.

Das Missverständniss ist aber selbst ein lehrreiches, indem es durch einen Doppelsinn der Konjunktion resp. Präposition „ausgenommen", „ohne" veranlasst worden, somit geeignet ist, solchen Doppelsinn zutag zu fördern. Nach Herrn Macfarlane's Angabe sollten die dx_1 mit Ausnahme der e_1y_1 einerlei sein mit den f. Ich verstand dies in dem gewöhnlichen, auch Bd. 1, S. 488 auf 489 zur Sprache gebrachten Sinne, wonach man sagen kann: „die Europäer ohne die Russen", obwol die Russen nicht alle auch Europäer sind, und folglich von diesen stricte nicht ausgenommen werden können. Herr Macfarlane wollte aber zugleich damit gesagt haben, dass die e_1y_1 auch wirklich von den dx_1 ausnehmbar, in diesen also enthalten sein sollten; als zweite Prämisse beabsichtigte er die Gleichung $dx_1 - e_1y_1 = f$, zufolgedessen also zu unserm Ansatze: $dx_1(e + y) = f$ noch die Valenzbedingung jener linkseitigen Differenz in Gestalt von $e_1y_1 \subseteq dx_1$ hinzuzutreten hat.

Dies bewirkt nun blos den Hinzutritt des Gliedes $(d_1 + x)\,e_1y_1$ zum Polynom unsrer vereinigten Gleichung, S. 553, Z. 2 v. u. und hat — abgesehen vom Hinzukommen hie und da eines Terms auch bei den Zwischenrechnungen — blos die Folge, dass sich unsre Endergebnisse für die Elimination und Berechnung von x und y wie folgt modifiziren. Zum Polynom der auf 0 gebrachten Resultante kommt nunmehr der Term $b_1c_1d_1e_1$, zum Systeme der resultirenden Relationen also noch diese: $1 \subseteq b + c + d + e$ hinzu; ebenso kommt zu dem von uns gegebnen Major (Prädikat) von x der Faktor $b + c + e$ hinzu, sodass derselbe in $\{a_1(b + e) + c\}\,f_1$ übergeht; und endlich ist zum Minor (Subjekt) von y das Glied e_1c als weiterer Summand hinzuzufügen.

Damit besitzt der Leser nun zwei Übungsaufgaben, statt einer.

Die in meiner Schlussbemerkung enthaltene Kritik des von Herrn Macfarlane zur Lösung angewendeten Verfahrens aber bleibt auch für die modifizirte Aufgabe leider in vollem Umfange bestehen.

Seite 579, Zeile 7 v. u. st. $a_1c_1 =$ l. $a_1c_1 \subseteq$.

„ 582, „ 20 v. o. st. mp l. $m \asymp p$.

„ 589, zum zweiten Absatze (gleichwie schon zu S. 559) ist anzuführen, dass die vom Verfasser abgegebenen Urteile über MacColl's „Methode(n)" in Bd. 2, S. 305 noch eine wesentliche Modifikation erfahren (vergl. demnächst auch den Rückblick im § 54).

„ 601, Zeile 1 v. o. st. § 24 l. § 23.

„ 629, „ 13 v. u. st. Operationen l. Operation.

„ 642, „ 14 v. o. st. $E_1 = 0$ l. $E_1 \subseteq 0$.

„ 664, „ 14 v. o. st. $\mathbf{1}$ l. 1.

„ 671 ist es zu meinem grössten Bedauern *nicht angeführt*, dass die von Jevons noch mangelhaft vollzogene Aufstellung der Typen der möglichen universalen Aussagen über *drei* Klassen oder Begriffe, welche ich l. c. verbessert abgeleitet, *zuvor* und erstmals richtig — wenn auch ohne Herleitung — von Miss Ladd (Frau Franklin) in [1] gegeben war (p. 67 und 68). Ein Fehler im Texte auf p. 67, wo die Anzahl als twenty-*six* (statt twenty-*two*) angegeben erscheint, hatte mich verleitet, die Darlegung der begabten Verfasserin nicht, wie sie es verdiente, genauer anzusehen. Nachdem ich jedoch bei abermaliger Revision nach dem Erscheinen meines Bd. 1 der Priorität jener Forscherin inne geworden, hatte ich mich beeilt, dieselbe in einer Note [11] in Bd. 36 der Mathematischen Annalen unter Darlegung des Sachverhaltes anzuerkennen, und ist es mir tröstlich, auch hier für dieselbe eintreten zu können.

„ 680, Zeile 12 v. u. streiche das Wort: simultanen.

„ 685, „ 13 v. u. st. $a_1 + c_1$ l. $b_1 + c_1$.

„ 686, „ 14 v. u. st. E l. A und E.

„ 703, „ 14 v. o. sind die Worte „nun verstorbenen" zu streichen. Einer

irreführenden Nachricht zufolge ist der Autor Dr. Ludwig Dieffenbach, welcher munter im Kreise seiner Familie als Kreisgerichtsrat zu Lich im Grossherzogtum Hessen lebt, in Bd. 1 von uns todtgesagt worden, und gereicht es uns zu besondrer Freude, denselben wieder lebend melden zu können.

Seite 703, Zeile 6 v. u. st. quelque(s) l. divers.
„ 710, „ 1 v. u. st. incapities l. incapacities.
„ 711 wären auch Arbeiten von Poretzki (russisch) unserm Literaturverzeichnisse einzureihen. Dies wird am Schluss der zweiten Abteilung unsres Bd. 2 geschehen und auch in § 54 auf solche eingegangen werden.

Berichtigungen zum zweiten Bande.

Seite 95, Titel des § 34. Die fünf auf Gergonne zurückgeführten Sphärenverhältnisse („Elementarbeziehungen") werden von Herrn Husserl[1,2] als bekanntlich Euler zukommende bezeichnet. Ob dies berechtigt, konnte Verf. noch nicht entscheiden, da die ihm zugängliche Kries'sche Übersetzung von Euler's Lettres gerade die Briefe über philosophische Gegenstände nicht enthält. Indessen hoffe ich, die Frage vor Abschluss des Bd. 2 zum Austrag zu bringen.

„ 227 unten hatte ich übersehen, dass Herr Peirce[5], p. 28 Fussnote, ein gleiches schon vor Miss Ladd statuirte.

„ 205 .. 216. Der besonders wichtige Unterfall des Haupttheorems r) im § 41, der sich ergibt, indem man dort (Bd. 2, S. 209) die sämtlichen Glieder mit x_1 fortlässt, m. a. W. $b = q = s = \cdots = 0$ nimmt (oder aber umgekehrt alle mit x behafteten Glieder unterdrückt, d. h. $a = p = r = \cdots = 0$ denkt) gebührt Miss Ladd (Frau Franklin)[1], p. 45 und 46. Über diese in § 41 noch von mir übersehene Priorität wolle man demnächst auch den Rückblick im § 54 in der zweiten Abteilung des gegenwärtigen Bandes zu Rate ziehen.

VORLESUNGEN

ÜBER DIE

ALGEBRA DER LOGIK

(EXAKTE LOGIK).

Fünfzehnte Vorlesung.

§ 28. Übergang zum Aussagenkalkul. Taxirung von Aussagen nach ihrer Gültigkeitsdauer und Klasse der Anwendungsgelegenheiten.

Die bisherigen Betrachtungen des Gebiete- und Klassenkalkuls haben wir jeweils durch ein flächenförmiges, ein zweidimensionales Substrat illustrirt. Dass dieser Umstand nebensächlich ist, wurde indess schon in § 3 hervorgehoben; wir durften ebensogut eine höhere oder auch eine niedrere Mannigfaltigkeit wählen.

Ohnehin hat die Veranschaulichung kein wesentliches Moment bei dem Aufbau unsrer Disziplin gebildet. Wir haben deren Prinzipien einfach axiomatisch hingestellt, und gingen dann streng analytisch zuwerke; bei den auf diese Prinzipien gegründeten Schlüssen und Beweisen liess es sich durchweg vermeiden, dass jemals an die Anschauung appellirt werden musste. Ob — wie F. A. Lange meint — solche Anschaulichkeit bei den ersten Prinzipien wenigstens erforderlich war, um das Gefühl der Evidenz hervorzurufen, überliessen wir der Psychologie, zu entscheiden.

Veranschaulichungsmittel wurden von uns nur nebenher, aus didaktischen Gründen herbeigezogen, und in dieser Weise werden wir auch fortfahren uns zu verhalten.

Wenn es (demnach) auch nach wie vor theoretisch unwesentlich bleibt, so wird es doch in erzieherischer Hinsicht von Wichtigkeit — um zu einer richtigen Auffassung des Folgenden erleichternd vorzubereiten — dass wir die Aufmerksamkeit nunmehr auf eine Mannigfaltigkeit von *einer* Dimension, auf eine *„lineare"* Mannigfaltigkeit konzentriren, die Deutung der Sätze des Gebietekalkuls in einer solchen *einüben.*

Verstehen wir namentlich unter der identischen 1 die *Mannigfaltigkeit der Punkte einer nach beiden Seiten unbegrenzten geraden Linie,* so gelten wiederum alle bisherigen Sätze.

Unter $a, b, ..$ werden wir jetzt irgendwelche Punktgebiete dieser Geraden zu verstehen haben.

Ein solches Gebiet wird im allgemeinen sein ein System von innerhalb dieser Geraden liegenden von einander getrennten Strecken nebst



irgend welchen dazwischen oder ausserhalb dieser Strecken auf der Geraden befindlichen isolirten Punkten. Unter Umständen kann auch ein nach der einen Seite unbegrenzter Strahl, einer der beiden „Endstrahlen“ der Geraden (von beliebigem Punkte an gerechnet) zu dem Gebiete gehören, oder auch zwei solche Endstrahlen (die dann nicht übereinandergreifen sollen) aus zwei verschiedenen Anfangspunkten nach rechts und links in's Unendliche gehend.

Auch für jeden einzelnen Anfangs- oder Endpunkt einer zu dem Gebiet gehörigen Strecke resp. eines Endstrahles ist es als ausgemacht vorauszusetzen, ob er zu dem Gebiet gerechnet werden solle oder nicht; man kann z. B. sämtliche begrenzenden Punkte in das Gebiet einschliessen oder aber, sie alle ausschliessen. [In Gestalt der reellen Zahlen verfügt die Mathematik über die Mittel, wenn zwei Punkte der Geraden als bekannt vorausgesetzt werden, die dann etwa mit der arithmetischen 0 und 1 benannt werden mögen, jeden dritten Punkt der Geraden vollkommen zu bestimmen, seine Lage so unzweideutig zu beschreiben, dass er auch mit ihm noch so nahe stehenden Punkten unmöglich verwechselt werden kann.]

Die isolirten Punkte können auch in der Nähe gewisser Stellen, ja sogar längs gewisser Strecken, sich unendlich dicht häufen ohne doch daselbst ein stetig zusammenhängendes Gebiet auszufüllen; ebenso lassen sich aus einer Strecke vereinzelte Punkte fortlassen, als nicht zu dem Gebiet gehörig hinstellen, das im übrigen die Strecke enthalten soll, u. s. w. Es muss der „Mannigfaltigkeitslehre“ überlassen bleiben, alle hier denkbaren Möglichkeiten vollständig aufzuzählen und sie zu klassifiziren.

Die identische Eins bedeutet *hier*, wie schon gesagt, die ganze unbegrenzte Gerade als das umfassendste der in ihr enthaltenen Punktgebiete. Das Nullgebiet — hier schlechtweg als identische Null mit 0 zu bezeichnen — ist nicht etwa ein Punkt, sondern es enthält *keinen* Punkt der Geraden, und da es ein Punktgebiet *der Geraden* sein soll, so ist es ein leeres Gebiet, hat zur Bedeutung: „nichts“.

Es mag uns die Figur:

Fig. 1.

ein Gebiet der geschilderten Art veranschaulichen in der als Horizontale verlaufenden Geraden. Die Pfeilspitze rechts soll andeuten, dass der letzte Strich als „Endstrahl“ unbegrenzt nach rechts fortzusetzen sei; wo die Striche stumpf endigen, soll der Endpunkt der durch sie markirten Strecke dem Gebiete eingerechnet sein, wo sie spitz auslaufen, ihm abgerechnet werden; das Gebiet enthält vierzehn isolirte Punkte (die Mittelpunkte der sie hier markirenden Tupfen), auch soll in der zweiten Strecke (von links) ein isolirter Punkt (nur die Mitte der Lücke) fehlen.

Gleichwie früher für die Flächen meistens Kreise genommen wurden, so soll aber jetzt zur Veranschaulichung eines Gebietes der Einfachheit wegen vorzugsweise eine einfach zusammenhängende Strecke gewählt werden (wo nicht anders bemerkt, mit Einschluss von deren Endpunkten).

Eine Subsumtion $a \subseteq b$ wird dann zu veranschaulichen sein durch die Alternative zwischen den beiden Figuren:

Fig. 2. Fig. 3.

Und wenn zwei Strecken a, b einen Teil gemein haben, wie in Fig. 4, so wird sich deren identisches Produkt ab als ebendieser gemeinsame Teil darstellen, und ihre identische Summe $a + b$ als die Strecke zu welcher beide miteinander verwachsen, zusammenfliessen, so wie es die genannte Figur versinnlicht.



Fig. 4. Fig. 5.

Haben aber, wie in Fig. 5, die beiden Strecken keinen Teil (auch nicht einen Endpunkt) gemein, so ist ihr Produkt $ab = 0$, mithin einer wirklichen Veranschaulichung überhaupt nicht fähig, weshalb wir dies Produkt auch nicht in die Figur eingetragen haben; ihre identische Summe $a + b$ ist dann ein Gebiet, ausschliesslich bestehend aus den beiden getrennten Strecken als Teilen. (Hätten die Strecken a, b nur einen Endpunkt gemein, so würde in diesen als einen isolirten Punkt, das Gebiet ab sich zusammenziehen.)

Die Negation a_1 einer Strecke a bedeutet endlich die ganze „Aussenstrecke", ohne die Endpunkte, von jener — bestehend aus den beiden durch die Strecke a getrennten nach links und rechts von ihren Begrenzungspunkten in's Unendliche gehenden Endstrahlen unsrer Geraden 1, was die Figur veranschaulicht:

a_1 — a — a_1

Fig. 6.

Umgekehrt ist die „Innenstrecke" a auch die Negation dieses a_1.

Von der Betrachtung unsrer *Geraden*, als einer räumlichen eindimensionalen Mannigfaltigkeit, können wir übergehen zu derjenigen einer andern — gleich ihr unbegrenzten — Mannigfaltigkeit von *einer* Dimension, welche nicht räumlich ist. Eine solche ist die *Zeit*.

Den Punkten der Geraden lassen sich geradezu *die Elemente der Zeit „ein-eindeutig" zuordnen*, d. h. *gegenseitig eindeutig*, m. a. W. *so* zuordnen, dass einem jeden Punkt (oder Element) der Geraden ein bestimmtes Zeitelement, ein bestimmter *Moment* oder *Augenblick* aus-

schliesslich entspricht, und umgekehrt auch jedem Zeitmomente je ein bestimmter Punkt der Geraden. Zu dem Ende braucht man sich nur die Gerade etwa von einem sich „gleichförmig" bewegenden Punkte — z. B. von links nach rechts hin durchlaufen zu denken.

Den Punkt mit konstanter, mit in der Zeit sich gleich bleibender, unveränderlicher Geschwindigkeit sich bewegen zu lassen, also dass er in gleichen Zeitabschnitten auch immer unter sich gleiche Wegestrecken beschreibt, ist nicht wesentlich für unsre Betrachtung, es ist dies nur die nächstliegende aber auch die einfachste und bequemste der zur Verfügung stehenden Vorstellungsweisen. Genügen würde schon die Annahme, dass unser Punkt in einer irgendwie bestimmten Weise nur überhaupt die ganze Gerade durchlaufe, ohne aber jemals stille zu stehen oder gar umzukehren, rückläufig zu werden, also in einem bestimmten Sinne, in der gleichen Richtung stetsfort sich bewegend — so etwa, dass er jeden rechts von der Stelle, wo er sich soeben befindet in endlicher Entfernung liegenden Punkt auch in endlicher Zeit erreichen wird, und ebenso auch jede angebbare zur linken von jener befindliche Stelle vor endlicher Zeit passirt haben muss.

Der Ort auf der Geraden, wo der Punkt sich eben befindet entspricht alsdann dem gegenwärtigen Augenblick, jede links davon befindliche Stelle einem bestimmten Moment der Vergangenheit, und jede zur Rechten einem solchen der Zukunft — und umgekehrt. Man kann irgend einen Punkt auf der Geraden betrachten als den Träger, das *Bild* desjenigen Augenblicks, in welchem der sich bewegende Punkt durch ihn hindurchging, -geht oder -gehen wird, und mit irgend einem Zeitmoment in der Vergangenheit, als Gegenwart, oder in der Zukunft, ist auch zugleich ein Punkt der Geraden gegeben als derjenige Ort, an welchem der sich bewegende Punkt sich in ihm befindet. Es ist bezeichnend für die Berechtigung und Landläufigkeit dieser Zuordnungsweise, dass die Sprache geradezu von *„Zeitpunkten"* redet.

Wenn es nicht von vornherein als selbstverständlich erschiene, so müsste es auf diesem Wege einleuchten und wird es obendrein dadurch *anschaulich*, wie der identische Kalkul mit allen seinen Gesetzen auch auf *Gebiete von Zeitpunkten* anwendbar ist.

Zur Versinnlichung etwaiger auf solche bezüglichen Betrachtungen mittelst Figuren werden wir natürlich nur zu dem erwähnten Bilde, zu der Geraden, unsre Zuflucht nehmen.

Die Eins bedeutet uns aber jetzt die ganze Mannigfaltigkeit der Zeitpunkte, *„die ganze Zeit"*, welche sich zusammensetzt aus der nach rückwärts unbegrenzten *Vergangenheit*, der *Gegenwart* und der nach vorwärts unbegrenzten *Zukunft*, und mit *einem* Worte auch *Ewigkeit* genannt werden mag.

Zu ihrer bessern Unterscheidung von der bisherigen, eine räumliche Mannigfaltigkeit darstellenden oder auch im Klassenkalkul verwendeten (und auch noch fernerhin in dieser Weise zu verwendenden) 1, möge die Eins, als Symbol der Ewigkeit gedeutet, mit einem Tupfen versehen, die Ewigkeit durch das Zeichen i hinfort dargestellt werden.

Von einer Aussage, welche für diese ganze Zeit wahr zu sein beansprucht, wird zu sagen sein, sie gelte *„immer“*, *„stets“*, und kann also die „Gültigkeitsdauer“ einer solchen Aussage durch i ausgedrückt werden.

Der identischen Null aber wird jetzt eine Zeitbestimmung entsprechen, welche die Sprache mit dem Adverbium *„nie“*, *„niemals“* wiedergibt. Zur Unterscheidung von der 0 des Klassenkalkuls oder auch des Kalkuls mit Gebieten überhaupt könnte man diese Null in der Mannigfaltigkeit der Zeitpunkte ebenfalls mit einem Tupfen versehen, sie mit $\dot{0}$ darstellend; indessen erscheint es mir unbedenklich, dies Unterscheidungsmerkmal wegzulassen: die gedachte Klasse, das Gebiet ist hier wie dort ein leeres.

Einer Aussage die „Gültigkeitsdauer“ 0 zuschreiben heisst nun also, dieselbe für eine jederzeit ungültige, für eine niemals — auch nicht einen Augenblick — gültige erklären.

Ein ganz beliebiges Gebiet von Zeitpunkten bestehend vielleicht aus mehreren getrennten Zeiträumen oder auch vereinzelten Augenblicken, so wie es z. B. die Fig. 1 veranschaulichen würde, könnten wir jetzt kurz ein „Zeitgebiet“ nennen. Dafür werden wir aber manchmal auch den Namen „(Zeit-)*Dauer*“ oder „Zeitraum“ selbst gebrauchen, auch wenn das Gebiet (wie in dem angeführten Beispiele) aus getrennten Zeitabschnitten, Perioden oder Epochen, eventuell nur isolirten Zeitpunkten zusammengesetzt sein sollte. Namentlich werden wir in diesem weiteren Sinne — da „Gültigkeitszeitgebiet“ unbehülflich erscheint — „Gültigkeitsgebiet“ aber noch einen andern Sinn liefert, Nebenbedeutungen hätte, von der *„Gültigkeitsdauer“* einer Aussage nunmehr zu sprechen haben [ohne jedoch im geringsten die Vorstellung von einer metrischen Beziehung mit diesem Wort zu verknüpfen].

Unstreitig haben schon alle bisherigen Betrachtungen ein *„zeitliches* Moment“ enthalten, wenn dieses auch psychologisch sehr in den Hintergrund des subjektiven Bewusstseins trat; sie waren in gewisser Weise doch mit dem Zeitbegriff verwoben.

So wurden namentlich oft Voraussetzungen als *gleichzeitig* anzunehmende hingestellt. Z. B. „Wenn $a \mathrel{\underline{\in}} b$ und *zugleich* $b \mathrel{\underline{\in}} a$ ist, werde $a = b$ geschrieben“ — so lautete die Definition (1) der Gleich-

heit; „Wenn (gleichzeitig) $a \neq\!\!\!\in b$ und $b \neq\!\!\!\in c$ ist, so ist $a \neq\!\!\!\in c$ (und muss es sein)“ — das Prinzip II.

Wenn $c \neq\!\!\!\in a$ *und* $c \neq\!\!\!\in b$, so forderte $c \neq\!\!\!\in ab$ zu schreiben die Def. ($3_\times$), und auch hier liegt schon in der Konjunktion „und“ die Forderung der *gleichzeitigen* Adoptirung der Prämissen. Etc.

Zudem ist zu bemerken, dass unsre Überlegungen sich häufig bewegten in der Form von *„hypothetischen“* Urteilen, die mit den Konjunktionen „Wenn ..., so ...“ zwei Aussagen verknüpfen. Die Partikel *„wenn“* ist aber etymologisch und historisch sehr nahe verwandt mit der Zeitpartikel *„wann“*. Man kann sie in den angeführten Beispielen (sowie überhaupt) geradezu durch letztere ersetzen, ohne dass dabei die Tragweite der Urteile, ihr logischer Gehalt, irgend eine Änderung erlitte. Wohl aber wird allerdings der lebendige psychologische Gehalt der Sätze dabei eine Modifikation erleiden, indem eben dadurch jenes versteckt gewesene zeitliche Moment mehr in den Vordergrund des Bewusstseins geschoben wird — vielleicht auch auf Kosten des „apodiktischen“ Charakters jener Sätze: was vorher lebhaft als eine Denknotwendigkeit empfunden wurde, wird, falls wir „wann“ statt „wenn“ sagen, nur mehr „assertorisch“ als ein Erlebniss, eine Thatsache der Wahrnehmung registrirt (bei II z. B.).

Endlich beanspruchten ja alle unsre Theoreme, *stets* gültig zu sein. Es ist *immer* $ab \neq\!\!\!\in a$ nach Th. $6_\times$). Und so weiter.

Im übrigen blieb das Bewusstsein ihrer Zeitlichkeit bei den Aussagen wol latent, verschwommen; es schlummerte die Aufmerksamkeit auf *dieses* Merkmal.

Wollen wir uns aber zu einer *exakten* Theorie der Urteile (wie sie der Aussagenkalkul darstellen wird) nunmehr erheben, so erscheint es geboten, auf jenes „zeitliche Moment“ sorgfältigst zu achten und mit jeder Aussage die Vorstellung einer bestimmten *Gültigkeitsdauer* derselben (oder eines nachher zu erwähnenden Surrogates, wonicht Äquivalentes, für diesen Begriff) zu verknüpfen.

Irgend welche Aussagen — seien es kategorische, hypothetische, disjunktive oder andere*) — könnten auch durch Buchstaben des grossen lateinischen Alphabets repräsentirt werden und ihre Gültig-

*) Ob es noch andere Urteilsformen ausser den aufgezählten gibt, ist strittig, fraglich. Mir scheint z. B. der als Dr. Fischer's Ausspruch bekannte und berüchtigte Satz: *„Afrika ist, wo es* (für den Europäer) *gesund ist, unfruchtbar, wo es fruchtbar ist, ungesund“* — dessen materielle Wahrheit wir dahin gestellt sein lassen — zu keiner der drei erwähnten Abteilungen eigentlich zu gehören.

keitsdauern durch die *entsprechenden* Buchstaben des kleinen, wo eine Verwechselung beider irgend zu besorgen stünde.

Eine *dem Sinne nach vollkommen bestimmte* Aussage ist entweder *wahr* (richtig, gültig, berechtigt) oder *nicht wahr* (falsch, ungültig, unzulässig).

Ist die Aussage sinnlos, oder bestehen Zweifel über den Sinn, die Auslegung derselben, so lässt sich dies keineswegs behaupten; im letztern Falle kann sie z. B. wahr sein im einen und falsch in einem andern Sinne.

Viel Streit entspringt aus mangelhafter Verständigung über den Sinn der strittigen Aussagen, und schon darum ist es wichtig, über die Schwächen unsres Verständigungsmittels, der Wortsprache, zu klarem Bewusstsein zu kommen, indem man an sie anlegt den unveränderlichen Maasstab eines absolut konsequenten, bestimmten und exakten Ausdrucksmittels, zu welchem wir die Formelsprache unsres Kalkuls auszubilden haben. Wer einmal jene Schwächen erkannt hat, wird auch weniger leicht durch die Ungeduld sich abhalten lassen, bevor er in Streit eintritt, jene erforderliche Verständigung anzustreben.

Eine Aussage kann z. B. wohl Subjekt einer andern sein, oder — noch allgemeiner — überhaupt ein Objekt, auf welches die gedachte zweite Aussage sich irgendwie bezieht; aber sie darf nicht *sich selbst* zum Gegenstande haben, sie darf insbesondre nicht als ihr eigenes Subjekt auftreten.

Von dieser Beschaffenheit wäre z. B. der isolirt hingestellte Satz: „Gegenwärtige Aussage ist unrichtig", die von jemand ohne allen Bezug auf vorangegangene oder nachfolgende Aussagen für sich hingestellte Behauptung: „*Ich sage hiermit* eine Unwahrheit".*) Solche Aussage kann nicht wahr sein, weil es dann eben keine Unwahrheit, sondern eine Wahrheit wäre, die gesagt worden, und sie kann auch nicht unwahr sein, weil es dann eben zur Wahrheit würde, dass sie unwahr ist.

Diese Aussage ist also in der That weder wahr noch falsch; dieselbe ist aber *sinnlos*, indem sie sich auf einen Sinn beruft, solchen als bekannt voraussetzt, den sie selbst erst geben, erklären sollte, aber, wie erkannt, unmöglich haben kann. Die Aussage stempelt hier überdies mit Denknotwendigkeit sich zu einer solchen. — Ebenso sinnlos würde auch die andre Aussage (isolirt hingestellt) sein: „Ich sage hiermit die Wahrheit". Nur würde die letztere in beregter Hinsicht sich sozusagen indifferent verhalten, den Sinn blos ewig vermissen lassen.

Im Zusammenhang hiermit steht es, dass wenn etwa jemand wetten wollte, dass er die *eben damit eingegangene* Wette verlieren (desgleichen, falls man es vorzieht, dass er sie gewinnen) würde, solche Wette als eine gegenstandslose niemals zum Austrag gebracht werden könnte.

Wir streifen hierbei auch den Fall des Sophisten Euathlos, der seinem Rechtslehrer Protagoras das Unterrichtshonorar zu bezahlen versprach, nachdem er seinen ersten Prozess gewonnen haben würde, dann aber überhaupt

*) „Ich lüge jetzt" — bei Lotze — in Vereinfachung des alten Sophisma's von dem Kretenser, welcher behauptet haben sollte, dass alle Kretenser beständig lögen — was nur möglich und wahr zugleich sein konnte, wenn er es selbst nicht glaubte.

keinen Prozess führte bis ihn sein Lehrer auf Zahlung des Honorars verklagte. („In dem Prozesse musste in zwei verschiedenen Verhandlungen ein verschiedener Spruch gefällt werden. Zunächst war die Bedingung des Vertrages noch nicht eingetreten: Euathlus hatte *bis dahin* noch keinen Prozess gewonnen, war also *noch nicht* zur Bezahlung verpflichtet. Er musste also *diesen* Prozess gewinnen. Aber eben hierdurch veränderte sich die Sachlage und es musste dem Protagoras das Recht gewährt werden, auf Grund des *veränderten* Verhältnisses eine *zweite* Klage anhängig zu machen, die nunmehr zu seinem Vorteil entschieden werden musste". Ueberweg[1] p. 360 sq.). Auf hier nur gestreifte Schwierigkeiten und die traditionellen logischen Paradoxien geht Mr. Peirce in [10c] mit grossem Scharfsinn ein.

Um den Sinn einer Aussage zu einem *vollkommen bestimmten* zu machen, ist nicht erforderlich, dass dieselbe über alles Erdenkliche, dass sie vollständige Auskunft gebe. Jede noch so ausführliche oder detaillirte Aussage, mag sie auch von Weisheit strotzen, ist nur ein verschwindend kleines Bruchstück aus der vollen Wahrheit, welche die ganze Wirklichkeit beschreibend umfassen müsste; sie ist und bleibt nur ein kurzer Auszug (an „abstract"), in welchem von einer ungeheuren Mehrheit von Nebenumständen, für die Untersuchung unwesentlich erscheinenden Ereignissen, Verhältnissen und Beziehungen abgesehen, abstrahirt wird; ja sogar auch wesentliche Beziehungen verschwiegen, eventuell für fernere Aussagen aufgespart, der Fortsetzung der Untersuchung oder Mitteilung vorbehalten werden.

Ich kann darum nicht umhin, die Formel des deutschen Zeugeneides (wie ich sie wenigstens bei schöffengerichtlichen Verhandlungen kennen gelernt habe) nach welcher Zeuge einfach schwören muss *„nichts zu verschweigen"* (statt etwa: „nichts, was nach des Zeugen bestem Ermessen für die Untersuchung von Belang sein könnte", oder vielleicht: „nichts, wonach er gefragt wird") schon in logischer Hinsicht zu beanstanden.

All' unser Wissen, nicht nur, sondern auch unser Aussagen bleibt Stückwerk. Bei den kategorischen Urteilen wenigstens — auf die andern kommen wir noch eingehend zu sprechen — scheint für die Bestimmtheit der Aussage es auszureichen, wenn Subjekt und Prädikat derselben wohldefinirte Klassen sind, deren Determination — mag sie näher auch in der Aussage selbst erst erfolgen — doch mittelst anderweitig schon bekannter Klassen, mittelst *gegebener* Begriffe erfolgt. [Bei dem Subjekt des oben angeführten Beispiels „Diese Aussage ist unwahr", war solches — in der suppositio realis, d. h. wenn „diese Aussage" nicht blos als grammatikalischer Satz, als Wortgefüge, sondern dem Sinne nach genommen wird — wie erkannt, nicht der Fall.]

Soll eine verständliche Aussage mit solchem bestimmten Sinne auch noch den Anspruch auf Wahrheit verbinden, so muss — ob zwar

sie unvollständig, nur ein Bruckstück der Wahrheit bleibt — doch diejenige Auskunft wenigstens, welche die Aussage gibt, von ihr richtig gegeben sein, d. h. es muss möglich bleiben, mit der Phantasie oder auf Grund weiterer Forschungen, alles das, was die Aussage unerwähnt und darum offen gelassen, sowie auch, was sie allenfalls ausdrücklich als unbestimmt hinstellte, wahrheitsgemäss noch nachzutragen, und zwar ohne dass ein Widerspruch zu ihr selbst entsteht. Die Praxis des Lebens kehrt sich nicht immer hieran, indem sie aus Rücksicht auf die Schwierigkeiten der Mitteilung, auf die Unmöglichkeit, alles Erforderliche auf einmal zu sagen, zuweilen gestattet, eine gemachte Aussage durch nachträgliche Anführung von Einschränkungen oder Ausnahmen teilweise wieder aufzuheben. In solchen Fällen ist jene erste Aussage, mag sie auch grammatikalisch bereits abgeschlossen sein, doch in logischer Hinsicht als eine unfertige anzusehen, welche erst mit dem Hinzutreten der Einschränkungen ihre Vollendung erhält.

Ich glaube mich hier mit diesen wenigen Andeutungen begnügen zu dürfen, wenn auch mit dem vollen Bewusstsein ihrer Unzulänglichkeit, indem ich mir nicht verhehle, dass es wol zu den schwierigsten Aufgaben gehören möchte, allgemein zu charakterisiren, wann eine Aussage sinnlos ist, wann dagegen sie einen vaguen, wann einen ganz bestimmten Sinn besitzt, gleichwie im letzteren Falle, zu sagen, was es eigentlich heisst, dass sie wahr oder falsch sei.

Sinnlos ist z. B. die in unsrer fränkischen Provinz populäre Wetterregel: „Sobald ein Stück blauen Himmels zu erblicken ist, *so gross*, dass der Schneider ein Paar Beinkleider daraus fertigen könnte, so gibt es an dem Tag noch schönes Wetter.“ Hier nämlich (wie auch, wenn etwa jemand sagte: „so gross wie eine Ellipse“) versagt die scheinbar gegebene Grössenbestimmung, und wollte mit solchem Ausspruch der Volkswitz wol nur die Unsicherheit der Wetterprophezeiung überhaupt persifliren.

Ist die stets in einerlei Sinne verstandene, die Aussage *konstanten* Sinnes einmal wahr, so bleibt sie dies auch in alle Ewigkeit und musste es immer gewesen sein, sie gilt dann *stets*; ist sie falsch, so kann ihr auch zu keiner Zeit Wahrheit zukommen, sie ist dann *niemals* wahr. Die Gültigkeitsdauer einer derartigen Aussage ist demnach entweder die Ewigkeit 1, oder aber 0.

Wir werden künftig ganze Aussagen nicht selten mittelst Buchstaben darstellen. Bedeutet a die Aussage: „2×2 ist 4“, und b die Aussage: „2×2 ist 5“, so exemplifizirt uns a die (stets) wahre, b die (stets) falsche Aussage.

So oft wir eine Aussage *in Rechnung setzen*, und zwar einerlei, ob sie dabei durch einen Buchstaben vertreten, oder ob sie vollinhaltlich, detaillirt (in einer Klammer) angegeben wird, soll sie als ihre *Gültigkeitsdauer* verstanden, ausgelegt werden.

Für die obigen Beispiele dürfen wir demnach sagen, dass:

$$a = 1 \quad \text{und} \quad b = 0$$

ist. Anstatt — wie hienach berechtigt — zu schreiben:

$$(2 \times 2 = 4) = 1,$$

wird man aber kürzer die Behauptung $2 \times 2 = 4$, oder a selbst, einfach hinstellen. Wogegen die Falschheit der Behauptung, dass 2×2 gleich 5 sei, vorerst nicht einfacher darzustellen ist als mittelst des Ansatzes:

$$(2 \times 2 = 5) = 0.$$

Bedeutet c die Aussage: „Die Masse der Welt ist konstant" und d die Aussage: „Die Materie ist vergänglich", so ist (nach den Grundlehren der Physik) ebenso $c = 1$ und $d = 0$, die erstere nämlich wahr, die letztere falsch, und zwar nicht nur soeben, sondern überhaupt.

Man könnte gegen oben Gesagtes einwenden: der Ausspruch „Caesar wurde ermordet" sei vor oder während seiner Ermordung noch nicht wahr gewesen, sei erst seitdem wahr. Wird das Tempus des Verbums festgehalten, so ist dieser Einwand auch sicherlich berechtigt. Allein dann haben wir, obzwar eine Aussage von grammatikalisch konstanter *Form*, von sich gleich bleibendem *Wortlaute*, doch gerade eben nicht eine solche konstanten *Sinnes*, indem das Tempus praeteritum, auf welches mit der Verbalform „wurde ermordet" hingewiesen wird, zu verschiedenen Zeiten eine verschiedene Bedeutung beansprucht.

Aus diesem Beispiel wird ersichtlich, dass ein *erzählendes* (eventuell auch ein beschreibendes) Urteil, soll es konstanten Sinn besitzen, mit seinem Verbum nicht an die *relative* Gegenwart (Vergangenheit oder Zukunft) d. i. die Gegenwart (etc.) *der Aussage* anknüpfen, darf, es darf m. a. W. nicht auf den Zeitpunkt, in welchem die Aussage fällt, sich beziehen, sondern es muss dasselbe vielmehr auf einen *absolut* bestimmten Zeitpunkt oder Zeitraum verweisen, wofern es solchen nicht ganz unbestimmt lässt.

Letzteres wäre für unser Beispiel etwa der Fall, wenn wir sagten: Die Ermordung Caesar's ist ein Ereigniss in der Wirklichkeit, ist (eine) historische Thatsache. Das andere, falls wir sagten: „Die Ermordung Caesar's fällt in das Jahr 44 v. Chr." In dieser Fassung ist der Satz zu allen Zeiten wahr gewesen. Ebenso bei den Aussagen: „In die Jahre 1870 und 71 fällt ein deutschfranzösischer Krieg", „Am 28. Mai 1900 findet eine ringförmige Sonnenfinsterniss statt". Letzteres ist

auch jetzt schon wahr, und brauchen wir hier nicht das Verbum in das Futurum, dort es nicht in das Präteritum zu setzen. Der Sprachgebrauch gestattet in solchen Fällen die Präsensform; doch ist zu bemerken, dass bei völliger Unbestimmtheit sowol, als auch bei *absolut* bestimmter Angabe eines Zeitraums oder Zeitpunktes, in welchen ein Ereigniss fällt, in dem ein Zustand währt, jede *Temporalflexion* des Verbums *überflüssig* ist, ja nachteilig wirken muss, präjudizirt, indem das Präsens z. B. doch Vergangenheit und Zukunft auszuschliessen scheint oder wenigstens sie unberücksichtigt lässt. (Vergl. Bd. 1, S. 153).

Nun kann aber in unsern Kultursprachen eine Aussage überhaupt nicht gegeben werden, ohne dass in ihr das Verbum in einem ganz bestimmten Tempus — sei es Präteritum, Präsens oder Futurum — steht, und somit gibt sich hier wieder einmal eine Unvollkommenheit der Wortsprache kund. Eine Armut, auch, derselben zeigt sich darin, dass sie zum Ausdruck von wesentlich verschiedenen Beziehungen doch der nämlichen Formen sich bedienen muss:

Es ist ein ganz anderes Präsens, in welchem die Kopula unsrer Aussage steht, wenn wir sagen: „zwei mal zwei *ist* vier“, als wenn wir sagen: „es *ist* vier Uhr (Nachmittags, hiesiger Zeit am hiesigen Platze)“. Jenes ist das „aoristische“ Präsens: 2×2 ist nicht nur soeben $= 4$, sondern war es auch stets und wird es immer sein; dagegen, wenn es soeben vier Uhr ist, so war es das vor einer halben Stunde noch nicht, und wird es demnächst nicht mehr sein.

Es scheinen mir neben den zugehörigen unterscheidenden Formen sogar auch die Namen zu fehlen für die verschiedenen Bedeutungen, die in Hinsicht der Auslegung des Verbums nach seinem Tempus logisch unterschieden werden müssen; ich wüsste wenigstens die zweite Art des Präsens im Gegensatz zur ersten, die ich — schon etwas gewagt — die „aoristische“ nannte*), nicht mit einem gebräuchlichen Namen zu benennen. Jedenfalls hat in beregter Hinsicht die altgriechische Sprache etwas schärfer unterschieden, als unsere modernen Sprachen, indem sie für gewisse Tempora der Vergangenheit und Zukunft neben den gewöhnlichen auch aoristische Formen schuf.

Im wissenschaftlichen Interesse wäre wol zu wünschen, dass es neben dem gewöhnlichen Präteritum (mit seinen Abstufungen als Imperfektum, Perfektum und Plusquamperfektum), dem Präsens und dem Futurum (nebst Abstufungen) auch ein *Tempus generale* (oder *aoristicum*) gäbe — behufs Vermeidung der Umständlichkeit, dass man eigentlich: „war stets, ist, und wird stets sein“ (etc.) sagen müsste.

*) D. h. die „unbegrenzte“; Grammatiker sprechen auch von einer „*durativen*“ Bedeutung des Präsens und — bei Sentenzen — von einer „*gnomischen*“.

Und ferner — als praktisch vielleicht in noch höherem Maasse Bedürfniss — sollte man verfügen können über ein *Tempus indefinitum* oder *indeterminatum*, eine Temporalform, die offen, *unausgedrückt* lässt, ob von Vergangenheit, Gegenwart oder Zukunft die Rede; dieselbe wäre nicht nur da zu gebrauchen, wo, wie erwähnt, genauere in der Aussage enthaltene Zeitangaben die übliche Temporalflexion ihres Verbums als überflüssig, ja einseitig, unvollständig oder irreführend erscheinen lassen, sondern überhaupt, wenn es sich darum handelt, von Ereignissen in zusammenfassender Schilderung (erzählend, beschreibend und eventuell vorhersagend) zu reden, die teilweise der Vergangenheit, vielleicht der Gegenwart und teilweise auch der Zukunft angehören mögen, bei denen es aber unbekannt oder nebensächlich ist, inwiefern oder in welchen Verhältnissen sie das eine thun, oder das andere.

Umstände, unter denen solches von Belang würde, können leicht schon bei der brieflichen Korrespondenz eintreten, wo die Gegenwart des Absenders eine andere ist, als die des Empfängers. Dass aber in den Wissenschaften sich die erwähnte Armut der Wortsprache nicht schlimmer fühlbar gemacht hat, und deshalb fortbestehen konnte, erklärt sich unschwer aus der scharfen Sonderung jener in *historische* und *physikalisch-mathematische* Wissenschaften, bei deren ersteren es niemals gleichgültig erscheint, ob ein Ereiguiss schon stattgefunden hat, oder erst stattfinden wird, wogegen die letzteren sich durchweg mit sozusagen „ewigen“ Wahrheiten beschäftigen und zu deren Ausdruck eben des aoristischen Präsens sich gewohnheitsmässig bedienen. Ihnen schliessen auch die *natur*historischen Disziplinen sich teilweise an.

Sollten (aber) in der Logik auch beschreibende oder erzählende Urteile, Aussagen über historische, gegenwärtige oder künftige Thatsachen, als *Aussagen konstanten Sinnes* angesehen werden, so müssten wir sie uns allemal in der erwähnten unbestimmten Temporalform, eventuell versehen mit einer absoluten Zeitbestimmung, ausgedrückt *denken*.

Uns an das mit der Wortsprache Gegebene haltend gelangen wir dagegen zur Anerkennung des Vorkommens von Aussagen *variablen Sinnes*, deren Sinn nämlich sich mit dem Zeitpunkt, in welchem die Aussage fällt, von selbst verschiebt, indem das Verbum mit seinem Tempus an die *„relative“* Gegenwart anknüpft, nämlich auf die Gegenwart der Aussage (eventuell von dieser aus zurück- oder vor-verweisend) sich bezieht. [*„Absolute“* Gegenwart würde ich dagegen den durch Jahreszahl, Datum, Stunde und Minute etc., Berliner Zeit, fixirten Moment, in welchem ich soeben schreibe, dermalen nennen.]

Von solcher Art ist wol die ungeheure Mehrzahl aller mensch-

lichen Aussagen. Denselben kommt zumeist eine von 0 und 1 verschiedene „Gültigkeitsdauer" zu (sofern von einer solchen überhaupt sich reden lassen wird), eine Gültigkeitsdauer, die nur eben ein gewisses Gebiet von Zeitpunkten ausmacht. Ein einfaches Beispiel mag dies verdeutlichen.

Stellen wir uns eine Person, einen „idealen Meteorologen" (!) vor, der Tag und Nacht am selben Fleck unter freiem Himmel stehend beständig ausruft und wiederholt: „Es regnet" (sc. soeben hier am Platze), Es regnet, es regnet. So wird die Aussage wahr sein, sobald und solange wirklich Regentropfen auf dieses Individuum fallen, und unwahr, sobald dies nicht der Fall ist. Die (auf gedachten Ort bezogene) Aussage hat daher eine bestimmte Gültigkeitsdauer, welche sich zusammensetzt aus den verschiedenen getrennten Zeiträumen, in welchen wirklich Regenschauer sich über den Ort ergiessen (ergossen haben und ergiessen werden).

Die Begriffe, Benennungen und Bezeichnungen des Aussagenkalkuls — ein Stück weit, aber nicht durchaus: auch die Prinzipien desselben — werden sich auch anwendbar erweisen auf die im geschilderten Sinne variablen Aussagen (die Aussagen variablen Sinnes bei blos konstanter Form). Da einer solchen Aussage *irgend* welche Gültigkeitsdauer (die 1 oder 0 nicht ausgeschlossen) zukommen kann, so erledigen wir vorweg das Allgemeinere, wenn wir die ferneren Betrachtungen jetzt an derlei Aussagen anknüpfen.

Zudem aber ordnen diesen variabelsinnigen Aussagen auch diejenigen konstanten Sinnes sich wirklich unter, indem z. B. die obigen Aussagen a und b auch ihre Gültigkeitsdauern 1 und 0 behalten müssten, wenn man das Präsens ihrer Kopula, anstatt wie oben als aoristisches, nunmehr als gewöhnliches oder historisches auslegte, a nämlich deutete als das Urteil: „2×2 ist *soeben* $= 4$" und b als: „2×2 ist *soeben* 5".

Eine Subsumtion:

$$a \Subset b$$

angesetzt zwischen irgend zwei Aussagen, wird hienach bedeuten: Die Zeit, während welcher die Aussage a wahr ist, sei ganz enthalten in der Zeit, während welcher die Aussage b wahr ist, d. h. *immer, wann* (whenever, solange, sooft, sobald, falls) *a gilt, gilt auch b*. Kürzer werden wir hiefür oft sagen: „*Wenn* a gilt, so gilt b"; „*a bedingt b*", zieht es nach sich; „*aus a folgt b*". Ausdrücklich muss jedoch bemerkt werden, dass der Zusammenhang zwischen den Gültigkeiten von a und b damit durchaus nicht hingestellt werden soll als ein logischer oder denknotwendiger, auch nicht als ein kausaler, oder dergleichen. Die

Subsumtion und die Redensarten, durch welche wir sie wiedergeben, sollen vielmehr diesen Zusammenhang lediglich als einen faktisch bestehenden, *thatsächlichen* darstellen, es offen lassend, ob er denknotwendig, eventuell als ein „kausaler" bestehe, oder vielleicht blos ein empirisch ermittelter, für den Stand unsrer Erkenntniss „zufälliger" ist.

Zum Exempel, es bedeute b die Aussage: „Es ist Tag (hier)" — für den Augenblick unter „Tag" die Zeit verstanden, während welcher die Sonne über dem Horizont steht*),
und a die Aussage: „die Sonne scheint (hier, unverhüllt von Wolken)", so gilt $a \Subset b$, d. h. Wenn die Sonne scheint, so ist es Tag.

Die Beziehung zwischen den Gültigkeitsdauern der beiderseitigen Aussagen möge die Figur veranschaulichen:



Fig. 7.

welche, durch Nächte getrennt, drei Tage b auf der Zeitlinie dargestellt zeigt, an deren drittem die Sonne unausgesetzt schien, während sie an den beiden vorhergehenden je zweimal längere Zeit von Wolken verhüllt blieb, etc.

Allerdings ist in dem gewählten Beispiel das „Subjekt" a (der Bedingungssatz) zugleich Erkenntnissgrund des „Prädikates" b (des Folgesatzes): aus dem Scheinen der Sonne kann gefolgert, geschlossen werden, dass es Tag ist. Weil die Sonne scheint (sofern sie das thut), darum muss es Tag sein.

Das kausale Verhältniss scheint hier eher umgekehrt zu liegen: weil die Sonne über dem Horizont steht, darum kann sie überhaupt scheinen; dass sie scheint ist eventuelle Folge, und Wirkung, ihrer Stellung über dem Horizonte.

Jener Umstand ist aber, wie angedeutet, als ein Nebenumstand zu betrachten, der in der Subsumtion $a \Subset b$ sowol, als in deren verbaler Umschreibung mittelst der Konjunktionen „wenn ‥, so ‥" *nicht* gefordert ist. Man könnte ebensogut, die vorige Aussage a z. B. festhaltend, unter b die Aussage verstehen: „Paris liegt an der Seine", oder etwa auch: „Carnot ist Präsident der französischen Republik." Und wiederum würde dermalen die Subsumtion $a \Subset b$ gelten, die Behauptung zulässig sein: *Wenn* (genauer: *wann*, während, solange, so-

*) Der Einfachheit halber will ich mich auf die Berücksichtigung der Strahlenbrechung und des Unterschiedes zwischen mathematischem und physischem Horizont des Ortes hier nicht einlassen.

bald, falls) hier die Sonne scheint, ist Carnot Präsident der französischen Republik, (er ist es freilich auch, wenn sie nicht scheint) — mit einer gewissen Gültigkeitsdauer (gleichwie der beiden Teilaussagen, so auch) der ganzen Aussage.

Hier nun zu sagen: aus dem Scheinen der Sonne an hiesigem Platze *folge* (zur Zeit), dass Carnot Präsident der französischen Republik sei, oder auch: der letztere Umstand sei von dem ersteren *bedingt*, wäre allerdings nicht angemessen!

Wenn wir gleichwol — zwar nicht in solch konkreten Beispielen wo ihre Unangemessenheit auf der Hand liegt, jedoch bei den Untersuchungen *von allgemeinem Charakter* — diese Redensarten gebrauchen, so geschieht es, weil unsre Abmachungen auch die Fälle wirklichen Folgens sämtlich mit umfassen, weil beabsichtigt ist, sie auf solche vorzugsweise anzuwenden (ohne dass es jedoch nötig fällt, die andern auszuschliessen), und vor allem, weil die Wortsprache uns Redewendungen nicht zur Verfügung stellt, die für alle Fälle zutreffend genannt werden könnten und demnach einer solchen Allgemeinheit gerecht zu werden vermöchten, wie sie unsre Untersuchungen beanspruchen werden.

Man wird sich im Vorstehenden auch den Unterschied in der Bedeutung der Konjunktionen *„wenn“* (if) und *„wann“* (englisch annähernd: when) zum Bewusstsein gebracht haben. Während letztere als reine Zeitpartikel erscheint, *pflegt* erstere den versteckten *Hinweis auf ein Prinzip* zu enthalten, das den Zusammenhang zwischen Bedingungssatz und Folgesatz des hypothetischen Urteils beherrscht — bestehe dieses Prinzip nun als ein rein logisches aus den Gesetzen des gewissen oder wahrscheinlichen Folgerns unter Berufung auf die Evidenz, oder gründe es sich ausserdem auf irgendwelche Satzungen, dogmatische Glaubenssätze oder auch Naturgesetze — in welch' letzterem Falle wir von einem *kausalen* Zusammenhange reden.

Jenes „wann“ kann unter Umständen auch durch „während“ (engl. whilst) vertreten werden; es entspricht auch dem lateinischen „dum“, „solange“. Z. B. „Dum spiro, spero“: *solange* ich atme (scilicet: und bei Bewusstsein hin), höre ich nicht auf zu hoffen. Dies gibt die Subsumtion $a \Leftarrow b$, wo a die Aussage bedeutet: ich atme, und b die: ich hoffe.

Betrachten wir dagegen den Satz: „Dolor, si longus, levis, si gravis, brevis“ (ergo omnino fortiter sustinendus — vergl. Jevons [9] p. 174), so weist die konditionale Partikel „si“ in der That auf einen verborgenen ursächlichen Zusammenhang, einen Grund hin: weil eben ein sehr heftiger Schmerz bald Bewusstlosigkeit oder Tod herbeiführt und damit aufhört in die Empfindung zu treten, als solcher zu existiren, so kann ein lang anhaltender Schmerz nur ein minder heftiger, ein sehr heftiger nur von kurzer Dauer sein — zum Trost für die von ihm Befallenen.

Das Beispiel ist instruktiv, insofern es im Bedingungssatze des einen Urteils sowie im Folgesatze des andern als Prädikat selbst schon eine Zeitbestimmung, als da ist „von langer, resp. kurzer, Dauer zu sein“ enthält.

Das „si“, „wenn“, hier etwa durch „solange“ oder „während“ „dum“ zu ersetzen ginge durchaus nicht an, und dennoch wird sich jedes seiner beiden Teilurteile als eine Aussagensubsumtion darstellen lassen, sobald wir mit unsern Betrachtungen ein wenig weiter vorgeschritten sein werden (nämlich: die Klasse der Fälle, wo der Schmerz ein lange anhaltender ist, ist enthalten in der Klasse der Fälle, wo er ein leichter ist, etc.). Einstweilen mag das Beispiel dazu dienen, die Unvollständigkeit der bisherigen Betrachtungen zu erhärten, welche ich ausdrücklich als nur vorbereitende aufgefasst wünsche.

Zwei Aussagen a und b werden nun nach der Def. (1) der Gleichheit (für den auf die Mannigfaltigkeit $\dot{1}$ der Zeitpunkte angewendeten Gebietekalkul) *einander äquivalent*, oder *gleich*, zu nennen sein, wenn sowol $a \Subset b$ als auch $b \Subset a$ ist, d. h. wenn sie einander gegenseitig bedingen, wenn immer, sobald die eine gilt, auch die andre Geltung hat, und umgekehrt. Ihre Gültigkeitsdauern sind alsdann nicht nur, metrisch betrachtet, gleich gross, sondern identisch die nämlichen, einerlei, sie fallen in ein einziges Gebiet von Zeitpunkten zusammen.

Im übrigen mögen unter sich äquivalente Aussagen ihrem Inhalt oder Sinne nach gänzlich von einander unabhängig sein. Alle stets wahren Aussagen z. B. sind im Aussagenkalkul einander gleich zu nennen, ebenso alle stets falschen.

Bedeutet z. B. a die Aussage: „2×2 ist 4“ und b die Aussage: „Die Energie des Weltalls ist konstant“, so hat $a = b$ zu gelten, es sind a und b dann äquivalente Aussagen. Beide haben nämlich die Ewigkeit oder *ganze* Zeit zur Gültigkeitsdauer; wir haben $a = \dot{1}$ und auch $b = \dot{1}$.

Die Gleichheit $a = b$ würde ebenso bestehen, falls a die Aussage bedeutete: „2×2 ist 5“ und b die Aussage: „Es gibt Hexerei“. Hier wäre $a = 0$ und $b = 0$, wiederum also das Gebiet der Zeitpunkte, in welchen die eine oder die andre wahr ist, das nämliche, und zwar das leere oder Nullgebiet; sie gelten (wenn man hier noch so sagen will, doch „gleichzeitig“) nämlich alle beide *nie*.

Wegen dieser Unabhängigkeit ihres Inhaltes musste für die „*Äquivalenz*“ der Aussagen ein anderer Name gewählt werden als der bekannte der „*Äquipollenz*“, welchen die traditionelle Logik zur Bezeichnung einer viel spezielleren Beziehung schon längst eingeführt hat.

Äquipollent nennt die Logik solche Urteile, die mit Denknotwendigkeit gegenseitig aus einander folgen — wie beispielsweise das Urteil: „Alle α sind β“ und das (durch Konversion daraus hervorgehende) „Was nicht β ist, ist nicht α“.

Äquipollente Urteile sind auch immer einander äquivalent, oder im Sinne des Aussagenkalkuls „gleich“, aber nicht umgekehrt. Über jene greift diese Begriffsbestimmung dem Umfange nach weit hinaus (während

sie hinsichtlich des Inhaltes hinter ihr zurückbleibt). Für die Wahl des Ausdrucks „Äquivalenz“ war der englische Vorgang („equivalent statements“) mitbestimmend. Wegen der grösseren Allgemeinheit unserer von der Äquivalenz der Aussagen handelnden Betrachtungen gegenüber denen, die auf ihre Äquipollenz sich beziehen würden, geben wir der ersteren Bezeichnung den Vorzug auch in Fällen, wo wir die letztere gebrauchen dürften.

Zieht man Aussagen nach ihrer Äquivalenz in Betracht, frägt man darnach, ob solche vorliege, oder nicht, so ist von dem charakteristischen Inhalte jener Aussagen zu abstrahiren und auf ihre Gültigkeitsdauern zu reflektiren.

Jedenfalls hindert nichts, eine Aussage, abgesehen von ihrem *Inhalte* A (d. h. demjenigen, worüber sie uns Auskunft gibt), blos nach ihrer *Gültigkeitsdauer* a in's Auge zu fassen, und wer die Besorgniss hegt, diese beiden Hinsichten in welchen Aussagen sich betrachten lassen, zu vermengen, kann sie dadurch auseinanderhalten, dass er die entsprechenden Buchstaben zweier verschiedenen Alphabete für die eine und für die andre Deutungsweise verwendet. Der Übergang von der einen zur andern Interpretation ist jedoch ein so leicht zu vollziehender an welchen man sich bald gewöhnt und worin man rasch Übung erwirbt, dass uns solch' ängstliches Auseinanderhalten hier unnötig erscheint.

Um nun also vom bisherigen Gebiete- und Klassenkalkul unmittelbar zum *Aussagenkalkul* fortzuschreiten und letztern auch mit *einem* Schlage errichtet sowie begründet zu haben, braucht man blos *unter den Buchstaben*symbolen $a, b, c, \ldots$ *irgendwelche Aussagen* (Behauptungen, Urteile) *zu verstehen und auszumachen, dass sobald mit diesen Symbolen gerechnet wird* (sobald mittelst Negation, Multiplikation oder Addition an denselben operirt, oder auch nur Subsumtionen oder Gleichungen etc. zwischen denselben angesetzt werden), *sie als ihre Gültigkeitsdauern gedeutet werden sollen*, dass also unter irgend einer Aussage a verstanden werden solle die Zeit (genauer: das Gebiet, die Gesamtheit der Zeitpunkte), während welcher ebendiese Aussage wahr ist, unter Ausschluss jedes Zeitpunktes, in dem sie nicht wahr ist.

Was hiernach eine Subsumtion $a \mathrel{\leftarrow\!\!\!\!=} b$, und eine Gleichung $a = b$ uns bedeuten werden, haben wir bereits auseinandergesetzt.

In Bezug auf erstere ist jedoch noch der „Grenzfälle“ Erwähnung zu thun, wo das Subjekt oder Prädikat der Subsumtion $a \mathrel{\leftarrow\!\!\!\!=} b$ durch die Aussagensymbole 0 oder 1 vertreten erscheint.

Die Bedeutung auch dieser beiden Zahlensymbole im Aussagen-

kalkul wurde bereits angegeben: *Aussage* 1 ist jede stets wahre Aussage, und sie kann durch irgend eine von diesen, wie z. B. durch den (arithmetischen) Satz dass $2 \times 2 = 4$ ist, oder auch durch den logischen Satz: $0 \mathrel{\overline{\in}} 0$, mit gleichem Rechte vertreten, repräsentirt werden. Wir haben auch:

$$(0 = 0) = 1.$$

Nullaussage dagegen ist jede stets (oder unbedingt) falsche Aussage, wie z. B. die Behauptung, dass $2 \times 2 = 5$ sei, oder die, dass es Hexerei gebe, oder die Subsumtion $1 \mathrel{\overline{\in}} 0$. Desgleichen haben wir:

$$(1 = 0) = 0.$$

Gleichwie die identische Null ihrer Definition (2) gemäss Subjekt war zu jedem Prädikate und die 1 Prädikat zu jedem Subjekte, so ist nun auch die *Nullaussage ein zulässiger Bedingungssatz zu jedem Folgesatze*, und *eine Aussage* 1 *zulässiger Folgesatz zu jedem Bedingungssatze*.

Wir müssen demnach konsequenterweise z. B. folgende Urteile als korrekt und gültig anerkennen — in Bezug auf welche nur zu bemerken ist, dass, während die Konsequenz in der Aufrechterhaltung der formalen Schemata für die Wissenschaft vom höchsten Wert erscheint, die verbale Formulirung derselben minderwertig ist.

Wenn $2 \times 2 = 5$ ist, so gibt es Hexerei (vergl. $0 \mathrel{\overline{\in}} 0$).
" " " so scheint hier die Sonne (vergl. $0 \mathrel{\overline{\in}} a$).
" " " so ist $2 \times 2 = 4$ (vergl. $0 \mathrel{\overline{\in}} 1$).

Da die im Bedingungssatze ausgesprochene Voraussetzung eben niemals zutrifft, so sind alle drei Urteile vollkommen nichtssagende, beziehen sich auf „nichts", nämlich auf ein leeres Zeitgebiet. Sie aber als richtige anzuerkennen verpflichten uns die über letzteres der Allgemeinheit zuliebe getroffenen Festsetzungen.

Im zweiten Falle ($0 \mathrel{\overline{\in}} a$) darf, obwol die Gültigkeitsdauer des Vordersatzes 0 war, und die 0 der Zeitbestimmung „niemals" entspricht, das Urteil doch nicht etwa mit: „Nie scheint hier die Sonne" in Worte übertragen werden. Dies würde eine falsche Übersetzung sein, und wären behufs näherer Erläuterung dessen, mutatis mutandis, die Bemerkungen zu wiederholen, die wir in § 9 unter v) bezüglich verbaler Wiedergabe einer Subsumtion $0 \mathrel{\overline{\in}} a$ im Klassenkalkul ausgeführt haben [die letztere durfte auch nicht in Gestalt von „Nichts ist a" dort wiedergegeben werden]. Wenn a die Aussage bedeutet: „Hier scheint die Sonne", so wäre vielmehr der vorige Satz („Nie scheint etc.") mit $a = 0$ in der Formelsprache des Aussagenkalkuls darzustellen.

Legt z. B. Emanuel Geibel dem in Sklaverei befindlichen Negerweibe in dem Schlummerliede, das sie ihrem Knaben singt, auf die Frage an den grossen Geist: wann wird der Jammer deiner schwarzen Kinder enden? die Antwort in den Mund:

„Ach das mag geschehen, wenn der Mississippi rückwärts fliesset, ...
Wenn die weissen freien Pflanzer, wenn die Christen *Menschen* werden",

so lässt er sie (bei der Unterstellung, dass dies niemals eintreten werde) eine die Hoffnungslosigkeit ausdrückende, logisch betrachtet eine leere Verheissung gehen.

Analog sind Urteile hier anzuerkennen, wie diese:

Wenn es Hexerei gibt, so ist $2 \times 2 = 4$ (vergl. wieder $0 \Subset 1$).

Wenn die Sonne scheint, so ist $2 \times 2 = 4$; $(a \Subset 1)$.

Wenn die Masse der Welt konstant ist, so ist $2 \times 2 = 4$; $(1 \Subset 1)$.

Der Nachsatz gilt hier nämlich an sich und ganz unabhängig von dem Vorder- oder Bedingungssatze. Psychologisch mag das anders sein, aber logisch sagt das hypothetische Urteil doch für den Fall, wo seine Hypothese nicht zutrifft, überhaupt nichts aus. Behaupte ich etwas für den Fall (die Zeit), wo die Sonne scheint, so ist damit in keiner Weise präjudizirt für die Fälle, wo sie nicht scheint; es bleibt, wenn für den ersteren behauptet ist, dass $2 \times 2 = 4$ sei, unbenommen zu denken, dass es auch für die letzteren sich also verhalte, nur wird dies im Urteile eben freigestellt, unentschieden oder offen gelassen.

Freilich ist, beim zweiten der obigen drei Beispiele (z. B.) zuzugeben, dass dasselbe — ähnlich wie etwa das Urteil: „Einige Möpse sind Hunde" — bei aller logischen Korrektheit ein irreführendes, psychologisches Moment enthält, weshalb denn auf das für ähnliche Fälle schon in § 1 Gesagte zurückverwiesen sei. Wie dort, so sind auch hier die Urteile dem Vorwurf ausgesetzt, dass sie mit Umständlichkeit nur einen Teil der Wahrheit ausdrücken, während „die ganze" sich viel einfacher sagen liesse — in Gestalt der Behauptung, dass $2 \times 2 = 4$. In logischer Hinsicht aber sind solche Urteile nicht zu beanstanden.

Steht, entgegen den bisherigen Beispielen, die Null als Prädikat oder die Eins als Subjekt, so haben den Theoremen 5) gemäss die Urteile einen wirklichen Gehalt. Der letztere lässt sich dann allerdings auch einfacher darstellen, wird jedoch zu rhetorischen Zwecken, zur Bekräftigung, nicht selten absichtlich in die umständlichere Form gesetzt — oder auch aus Taktgefühl, um etwa direkte grobe Anschuldigung zu vermeiden. Z. B. Das hypothetische Urteil: „Wenn das mit rechten Dingen zugegangen ist, so ist 2×2 fünf!" $(a \Subset 0)$ umschreibt blos die Behauptung: „Das ist nicht mit rechten Dingen zugegangen", welche zusammenfällt mit der Verneinung des Urteils a (= „Das ist mit rechten Dingen zugegangen"), sonach mit der Behauptung $a = 0$, dass letzteres Urteil ungültig. Vergl. hiezu die Betrachtung 1 des § 46 über das Wesen des apagogischen Beweises.

Das Urteil: „Wenn 2×2 (noch) vier ist, so bin ich unschuldig" $(1 \Subset a)$ kommt der Beteuerung gleich: (a) „Ich bin unschuldig." Psychologisch weist es vielleicht darüber hinaus auf eine Notwendigkeit hin, dieses auch anzuerkennen.

Tritt beides zugleich ein, steht nämlich die 1 als Subjekt und die 0 als Prädikat einer Aussagensubsumtion, so haben wir in Gestalt derselben:

$1 \not\subseteq 0$, eine *absurde* Aussage vor uns, deren Gültigkeitsdauer (wie schon einmal erwähnt) eben selbst 0 ist.

Das identische *Produkt* und die identische *Summe* zweier *Aussagen* a und b können nunmehr selbst wieder als Aussagen gedeutet werden in folgender Weise:

Es bedeutet $a \cdot b$ oder ab das Urteil, welches aussagt, dass die Aussagen a *und* b beide (gleichzeitig, zugleich) gelten. Diese Aussage hat in der That das den Gültigkeitsdauern von a und von b *gemeinsame* Gebiet von Zeitpunkten zur ausschliesslichen Gültigkeitsdauer.

Ein Produkt von Aussagen stellt demnach das System derselben, wenn sie als *simultan* geltende, koexistirende angesehen werden sollen, vor; und umgekehrt lässt ein solches System stets als eine einzige Aussage, nämlich als das identische Produkt seiner Gliederaussagen, sich hinstellen und in die Zeichensprache des Aussagenkalkuls übersetzen.

In Worten pflegt man die Faktoraussagen einfach selbständig hinzustellen — durch den Punkt als Interpunktionszeichen, oder auch durch Kommata getrennt, zuweilen auch durch Konjunktionen, wie „und“, „sowol .. als auch“ etc. verbunden. Z. B.: Nicht nur ($a =$) „der Stoff, die Materie ist unvergänglich“, sondern auch ($b =$) „die lebendige Kraft, Energie, lässt sich weder erzeugen, noch vernichten“ — ist solch' ein Aussagenprodukt: ab.

Ferner bedeutet $a + b$ das Urteil, welches aussagt, dass die Aussage a *oder* die b gelte — und zwar das „oder“ im inklusiven Sinne verstanden als „oder auch“ [vergl. § 8, ϑ)] sonach entweder die eine, oder die andre von ihnen, oder aber beide zugleich. Diese Aussage wird in der That zur ausschliesslichen Gültigkeitsdauer haben dasjenige Gebiet von Zeitpunkten, zu welchem die Gültigkeitsdauern von a und von b einander ergänzen, zusammenfliessen.

Eine Summe von Aussagen stellt demnach das System derselben vor, wenn sie als *alternativ* geltende angesehen werden sollen, und umgekehrt wird sich jede „*Alternative*“ zwischen Aussagen — sofern sie, wie wir es hier immer auffassen werden, als eine *inklusive* verstanden wird, die den gegenseitigen Ausschluss ihrer Glieder nicht ausdrücklich fordert — stets darstellen lassen als eine einzige Aussage in Gestalt der identischen Summe ihrer Gliederaussagen.

Die Wortsprache verbindet die Glieder der Alternative durch die Konjunktion „oder“ resp. durch „entweder .., oder ..“, wofern sie nicht vorzieht, dieselben ganz getrennt hinzustellen, und blos zu bemerken, dass von ihnen irgend eines, zum mindesten, zu gelten habe.

Für die eventuelle Zusammenziehung von mehreren Aussagen, mögen sie ein simultanes oder aber ein alternatives System bilden, in ein einziges Urteil, einen grammatikalischen Satz mit nur *einer* Kopula — für den Fall nämlich, wo die Gliederaussagen sämtlich dasselbe Subjekt oder aber das nämliche Prädikat besitzen — werden die Definitionen (3) maassgebend sein.

Den Klassenkalkul vermochten wir seinerzeit ein nicht unbeträchtliches Stück weit zu entwickeln, ohne jemals den Begriff der Negation wesentlich vorauszusetzen oder hinzuzuziehen, und dem gemäss wollen wir auch vom *Negiren* der Aussagen und der Darstellung der Aussagennegation in der Zeichensprache des Aussagenkalkuls erst später (§ 31) handeln.

Wir könnten hiernach bereits zu Anwendungen des Aussagenkalkuls schreiten, wenn es nicht für viele, ja für die meisten Aussagen noch Schwierigkeiten bereitete zu einer klaren Vorstellung von ihrer „Gültigkeitsdauer" zu gelangen. In den bisherigen Beispielen sind wir solchen Schwierigkeiten noch aus dem Wege gegangen.

Was aber — fragen wir uns — soll nun etwa verstanden werden unter der „Gültigkeitsdauer" bei Aussagen wie diese:

„Es friert" (*ohne* nähere Angabe eines Ortes, *wo* es frieren sollte);

„Das Dreieck ABC ist rechtwinklig"

„Die Funktion $f(x, y)$ ist symmetrisch"

„Das Salz ist chemisch rein", etc.

wo — in den letzten Fällen — nicht gesagt ist, von welchem Dreieck, von welcher Funktion, von welchem Salz die Rede?

Man könnte solche Aussagen oder *„unbestimmte singuläre"* Urteile, in welchen das Subjekt (allgemeiner noch irgend ein Objekt) zwar nicht als Klasse (im engeren Sinne) zu nehmen ist, vielmehr ein Individuum vorstellt, welches aber nach Ort und Zeit nicht bestimmt (auch nicht durch anderweitige Qualitäten etwa völlig determinirt) erscheint, am besten wol *„Gelegenheitsurteile"* nennen.

Die Wahrheit oder Falschheit einer solchen Aussage hängt ganz und gar von der Gelegenheit ab, bei welcher sie ausgesprochen, gemacht wird. Sooft wir unter ABC zum Beispiel ein kraft seiner Definition, Erzeugung oder Konstruktion, kurz ein *wirklich* rechtwinkliges Dreieck verstehen, wird die zweite Aussage wahr, andernfalles wird sie falsch sein. Die dritte Aussage, auf irgend eine unsymmetrische Funktion $f(x, y)$ angewendet, ist falsch, auf eine symmetrische bezogen, richtig, etc.

Wollte man auch hier zur Vorstellung von einer „Gültigkeitsdauer" gelangen, so müsste man sich die verschiedenen Momente vergegenwärtigen,

in welchen eine bestimmte Person — sagen wir im zweiten Falle etwa ein gewisser Mathematiker, Geometer — sich diese Aussage aneignet; die Gültigkeitsdauer würde dann aus den Zeitmomenten sich zusammensetzen, in welchen solches zutreffend geschieht, bei Ausschluss derjenigen, wo es irrtümlich, zu Unrecht geschieht, und bezogen auf eine Mannigfaltigkeit, bestehend aus den Zeitpunkten, wo es überhaupt geschieht. Oder, falls wir den ganzen Zeitbereich erschöpfen wollten, so müssten wir einen idealen Mathematiker fingiren, welcher alle erdenklichen Dreiecke ABC in einer bestimmten Reihenfolge durchgehend, die (zweite) Aussage beständig im Munde führt. Unzweifelhaft würde so ein bestimmtes Gebiet von Zeitpunkten sich ergeben, für welches die Aussage richtig, und als dessen Ergänzung zur ganzen Zeit, ein anderes, für welches sie falsch ist, und jenes wäre die fragliche Gültigkeitsdauer.

Wegen der Unbestimmtheit, Willkürlichkeit aber jener Reihenfolge des Durchgehens, oder der Person, welche für eine solche sich zu entscheiden hätte, entbehrt der ganze Begriff indess der erforderlichen Bestimmtheit, ganz abgesehen davon, dass auch die Art, wie man zu seiner Konstruktion gelangen sollte, etwas Gezwungenes an sich hat.

Bei den fraglichen „Gelegenheitsurteilen“ wird man darum gut thun, den bisherigen Begriff der „Gültigkeitsdauer“ zu ersetzen durch einen weiteren, und zwar an die Stelle ihrer Vorstellung treten zu lassen diejenige von der *Klasse der Anwendungsgelegenheiten* der Aussage, genauer: die Klasse derjenigen Gelegenheiten (occasions) bei welchen die Aussage *als eine wahre* mit Fug und Recht gemacht werden kann, bei welchen sie *zutrifft*.

Darnach wird, wenn a und b Gelegenheitsaussagen vorstellen, die Subsumtion

$$a \Subset b$$

zum Ausdruck bringen, dass die Klasse der Gelegenheiten, bei welchen die Aussage a zutrifft, ganz enthalten, eingeordnet ist der Klasse der Gelegenheiten, bei welchen die Aussage b zutrifft, d. h. wieder: „Wenn a gilt, so gilt auch b“. Und bei äquivalenten Aussagen fallen beide Klassen in *eine* zusammen, es bedingen jene einander gegenseitig, sind immer zugleich wahr, oder falsch.

Beispielsweise möge a die Aussage bedeuten: „Das Viereck $ABCD$ ist eine Raute“, und b die Aussage: „Im Viereck $ABCD$ stehen die beiden Diagonalen auf einander senkrecht“, so gilt $a \Subset b$, d. h. Wenn ein Viereck ($ABCD$) eine Raute ist, so sind seine Diagonalen zu einander normal. Das Subsumtionszeichen stellt hier wirkliche Unterordnung vor, sintemal der Satz nicht umkehrbar ist, nämlich z. B. auch im Deltoid*) die Diagonalen normal sind, ohne dass dasselbe eine Raute (ein Rhombus, gleichseitiges Viereck) sein müsste.

*) Bekanntlich Gestalt des Papierdrachens, aus zwei gleichschenkligen Dreiecken zusammengesetzt.

Bedeutete ferner a die Aussage: „Die Ecken des Vierecks $ABCD$ liegen auf einem Kreise", b die Aussage: „die Gegenwinkel des Vierecks $ABCD$ sind Supplemente", so wäre $a = b$, denn eines bedingt immer das andere nach bekannten geometrischen Sätzen. Die beiden äquivalenten Aussagen a, b dürften hier gleichwol nicht „äquipollente" genannt werden, weil sie *erst auf Grund der Axiome* Euklid'scher *Geometrie* denknotwendig auseinander folgen — diese Axiome aber anzunehmen erwiesenermassen keine Denknotwendigkeit gebietet.

Mit der *Subsumtion* nun, mit ihrer Deutungs- und Anwendungsfähigkeit, haben wir wiederum die Grundlage des ganzen identischen Kalkuls gewonnen. Es stellt sich der *Aussagenkalkul* dergestalt als eine spezielle Anwendungsweise des *Klassenkalkuls* dar.

Auch die früher aufgestellte „Gültigkeitsdauer" bei denjenigen Aussagen, bei welchen ungezwungen von einer solchen sich sprechen lässt, kann jetzt ohne weiteres aufgefasst (oder umgedeutet) werden als die Klasse derjenigen Gelegenheiten, bei welchen die betreffende Aussage als eine zutreffende anwendbar ist, indem hier eben nur diese Gelegenheiten an bestimmte Zeiten sich gebunden erwiesen. Ist die Aussage z. B. „Es regnet soeben am hiesigen Platze" im gegenwärtigen Zeitpunkt richtig, weil es wirklich draussen regnet, so ist jetzt auch eine Gelegenheit, die Aussage als eine gültige zu machen, und vice versā.

Es wird demnach das Gebäude unsres Aussagenkalkuls auf einer völlig einheitlichen Grundlage ruhen.

Die Nullaussage entspricht wiederum einer leeren Klasse, die keine einzige Gelegenheit berechtigter Anwendung der Aussage in sich schliesst. Und die 1, der wir auch jetzt noch den Punkt belassen wollen, mag man auffassen als die Gesamtklasse aller Gelegenheiten, bei welchen überhaupt Aussagen zu machen sind — bei allen diesen wird z. B. die Behauptung, dass $2 \times 2 = 4$, auch berechtigt erscheinen.

Es versteht sich, dass man die formalen Abmachungen des gegenwärtigen Paragraphen auch *rein konventionell* hätte hinstellen können. Ohne jede Bezugnahme auf einen vorangehenden Klassenkalkul und ohne eigentliche Motivirung hätte einfach „ausgemacht" werden können, was wir rekapitulirend zusammenstellen:

$a = 1$, oder a, solle heissen: die Aussage a *gilt*,
$a = 0$: sie *gilt nicht;* $a \Subset b$: *wenn* a gilt, *so* gilt b; $a = b$: wenn a gilt so gilt b, *und umgekehrt*; ab: es gilt zugleich a *und* b; $a + b$: es gilt a *oder* b; (a_1 solle bedeuten die Verneinung der Aussage a, sonach dasselbe, wie der Ansatz: $a = 0$).

Man könnte darnach die ersten Sätze des Aussagenkalkuls in Formeln hinstellen, indem man einfach an den gesunden Verstand, das Gefühl der

Evidenz appellirte, die komplizirteren Sätze hernach aus den einfacheren beweisend. Auf diese Weise verfährt Herr McColl; nach ihm im wesentlichen auch Herr Peirce [5], jedoch mit bedeutend tiefer eingehender und verdienstlicherer Begründung, die sich, wie wir gesehen haben, fast ganz auf den Klassenkalkul übertragen und für diesen verwerten liess (um welchen übrigens Peirce sich zuvor [1a] auch schon Verdienste erworben hatte).

Indem ich vorstehend den *Zusammenhang* zwischen Gebiete- oder Klassenkalkul einerseits und Aussagenkalkul andrerseits näher darzulegen versuchte, führte ich eine von Boole schon gegebene Anregung weiter aus, die mir befolgenswert erscheint aus Gründen, auf welche ich schon Bd. 1, S. 290 hingewiesen habe und am Schlusse des § 45 noch weiter eingehen werde.

Vor einer naheliegenden Verwechselung muss übrigens noch gewarnt, es muss auf einen Umstand aufmerksam gemacht werden, der sonst leicht eine Quelle der Verwirrung werden könnte:

Nachdem wir die *„hypothetischen"* Urteile: „Wenn a gilt, so gilt b" — das sind sprachlich Konditionalsätze, die an eine Bedingung (Hypothesis) eine Behauptung (Thesis) knüpfen — darstellen gelernt haben durch eine Subsumtion des Aussagenkalkuls:

$$a \Subset b,$$

so ist für letztere neben der nach dem Bisherigen berechtigt erscheinenden Redensart: „a ist in b enthalten" in einem gewissen — allerdings ganz andern — Sinne auch die umgekehrte Redensart anwendbar und sogar vorwiegend üblich: „a enthält b, oder *begreift es unter sich* (m. a. W.: b ist in a mitenthalten)" — vergleiche Bd. 1, S. 623 sq. Bedeuten a und b Aussagen, so sagt der Engländer geradezu: „a implies b", und würde im Deutschen dem entsprechen: „a schliesst b in sich", „a *involvirt* b". In Anbetracht, dass die Geltung von a allemal auch die von b *nach sich zieht*, d. h. — mögen wir sagen — in *„extensiver"* Hinsicht, im Hinblick allerdings auf den Inhalt der Aussagen, ist solches auch berechtigt, während in *„intensiver*)"* Hinsicht, im Hinblick auf die Klassen der Anwendungsgelegenheiten wie gesagt die umgekehrte Beziehung stattfindet, wie sie die Fig. 1 (mit 2) des Bd. 1 versinnlichen würde; da würde denn auch auf Englisch zu sagen sein: „b implies a". Dadurch, dass wir uns im Aussagenkalkul des Verbums „Enthaltensein" lieber gänzlich enthalten, statt dessen uns einer der unverfänglicheren synonymen Ausdrucksformen bedienend, werden wir im Deutschen Missverständnissen am besten aus dem Wege gehn.

*) Man könnte sich hier versucht fühlen, auch diese beiden in Anhang 4 motivirten Benennungen umzutauschen, die Vorsilben *in-* und *ex-* gerade umgekehrt zu verwenden.

§ 29. Übersichtliche Darstellung der bisherigen Sätze in der Zeichensprache des Aussagenkalkuls. Das Summenzeichen Σ und das Produktzeichen Π.

Wir *wiederholen* nun die Definitionen, Prinzipien und Sätze des *Gebietekalkuls*, indem wir uns der abkürzenden Schreibung des Aussagenkalkuls bedienen — wie sie im vorigen Paragraphen erläutert worden.

Die Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets sollen jetzt wieder *Gebiete* unsrer bevorzugten Mannigfaltigkeit (der Fläche 1 der Schultafel) vorstellen, oder auch — wenn man will — *Klassen* von Individuen aus irgend einer „gewöhnlichen" Mannigfaltigkeit von Objekten des Denkens.

Die Aussagen, welche ursprünglich in Betracht kommen, werden sich auf eben diese Gebiete oder Klassen beziehen und sollen dann *„primäre"* genannt werden.

Wol alle Theoreme des Gebietekalkuls behaupten etwas *von* diesen primären Aussagen: sei es deren unbedingte und allgemeine Gültigkeit, sei es die einseitige Abhängigkeit der einen als Behauptung von den andern als Voraussetzung des Theorems hingestellten, sei es auch die gegenseitige Abhängigkeit oder Äquivalenz gewisser einzelner oder auch Gruppen von solchen primären Aussagen.

Wir mögen deshalb diese Theoreme oder *Aussagen über* (primäre) *Aussagen* (nun) *„sekundäre"* Aussagen nennen.

Anstatt wie früher mittelst verbalen Textes sollen nun diese sekundären Aussagen durch Formeln in der Sprache des Aussagenkalkuls dargestellt werden, was auf eine blosse *Übersetzung* der Wortsprache in die Formelsprache hinauslaufen wird. Original und Übersetzung sollen dabei jeweils durch die übereinstimmende Chiffrirung aufeinander bezogen werden.

Das Übersetzen aber hat für uns einen doppelten Zweck.

Es mag einerseits des Objektes, Themas, *der Theoreme halber* geschehen, für welche es eine Art Repetition bildet, bei der sie aber meist in noch erheblich schärferer Fassung, übersichtlicher und konziser wiederum in Erinnerung gerufen werden; zugleich wird ein Überblick über die ganze Reihe der (etwa $\frac{1}{2}$ Hundert) wichtigeren Sätze geschaffen, der sich zum Nachschlagen bei etwaigen Citaten für Jeden der die Formelsprache zu lesen versteht, sonach auch für die Zukunft, vorzugsweise empfiehlt.

Andrerseits aber soll jenes Übersetzen auch um seiner selbst

willen geschehen. Es soll in das Verständniss jener Formelsprache, die vor der Wortsprache eben gewisse Vorzüge besitzt, den Studirenden praktisch einführen, soll eine gewisse Übung und Geläufigkeit im Gebrauche dieser Zeichensprache anbahnen, die für die Formulirung und Bewältigung späterer schwierigerer Probleme wertvoll oder unerlässlich ist.

Wir werden uns hiernächst enthalten, Aussagen etwa auch durch Buchstaben darzustellen. Wo immer eine Aussage mit ihrer Gültigkeitsdauer in Rechnung zu setzen ist, soll dieselbe mit Subjekt, Kopula und Prädikat vollinhaltlich angegeben, „*spezifizirt*" in eine Klammer geschrieben werden. Dergleichen in die sekundären Formeln eingehende primäre Aussagen, welche somit als linke oder rechte Seite einer Subsumtion oder Gleichung, oder ebendarin als Faktor, Summand, vielleicht als Negand auch, auftreten, müssen demnach *in* diesen Formeln jeweils ausgelegt, interpretirt werden als ihre „Gültigkeitsdauern" oder „Klassen der Gelegenheiten ihrer berechtigten Anwendung".

Die Ewigkeit $\dot{1}$, oder Gesamtklasse aller Gelegenheiten zu Aussagen, werden wir von der Tafelfläche 1, wie ausgemacht, durch den Tupfen unterscheiden.

Letztere 1 indess würde auch durch die erstere $\dot{1}$ sich durchweg ersetzen lassen und durch sie wirklich zu ersetzen sein, falls man etwa die Gebietsymbole a, b, c, x ... ebenfalls als Aussagen deuten, den *reinen Aussagenkalkul* also (als eine spezielle Anwendung des Gebietekalkuls) *in sich selbst* ausdrücken wollte.

Unsre primären Aussagen würden dann schon als sekundäre, unsre sekundären als tertiäre zu bezeichnen sein.

Solches zu thun ist jederzeit *erlaubt*. Es hiesse das aber von einer sehr viel allgemeineren Theorie nur einen ganz speziellen Unterfall hervorhebend darstellen — wie wir in den nächsten Paragraphen genauer darlegen werden.

Zur exakten Wiedergabe einiger Theoreme werden wir noch eines Paares von neuen Zeichen bedürfen, die wir der Mathematik (zum, wie sich im nächsten Paragraphen zeigt, vollkommen analogen Gebrauche) entlehnen, nämlich des „*Summenzeichens*" Σ *(Sigma)* und des „*Produktenzeichens*" Π *(Pi)*.

Um nämlich auszudrücken, dass eine auf ein Gebiet x bezügliche Aussage *für jedes Gebiet* x (aus unsrer Mannigfaltigkeit 1) gelte oder gelten solle, werden wir das Zeichen $\prod_x$ (gesprochen: Pi nach x von ...) *vor* dieselbe setzen, und den entstehenden Ausdruck auch das *Produkt, genommen nach* x, *von* der dahinterstehenden Aussage nennen.

Wenn mehreres, ein längerer oder komplizirter Ausdruck hinter dem Zeichen steht, so frägt es sich, bis wohin die fragliche Aussage gehe, wo

sie aufhört. Laut einer allgemeinen Übereinkunft erstreckt sich dabei die letztere immer bis zu dem nächsten „freien“ Plus- oder Subsumtions- oder Gleichheitszeichen, wenn wir *„frei“* ein solches Zeichen nennen, welches nicht von einer Klammer umschlossen ist, es sei denn von einer solchen, welche auch das Π mit umschliesst; folgt aber überhaupt kein solcher Klammerabschluss, kein solches Zeichen nach, so erstreckt sich die Aussage natürlich bis an das Ende des Ausdrucks. Steht also insbesondre ein Produkt hinter dem Π, so erstreckt sich die Wirkung dieses Zeichens nicht etwa blos auf den ersten, den dem Π zunächst stehenden Faktor desselben, sondern auf das ganze Produkt, indem die Malzeichen, selbst wenn sie ausdrücklich (als Punkte) geschrieben sein sollten, der Wirkung keinen Halt gebieten.

Dagegen das vor eine (ebenso sich begrenzende) Aussage gestellte Zeichen Σ_x (gesprochen: Summe nach x von ...) soll uns andeuten, dass die Aussage nicht notwendig für jedes, sondern nur *für ein gewisses* Gebiet x, oder auch für mehrere gewisse Gebiete x (unsrer Mannigfaltigkeit 1) — kurz: für *mindestens ein* x — gelte, oder — als Voraussetzung zum Beispiel — zu gelten habe. Der so entstehende Ausdruck heisst dann auch die *Summe, genommen nach* x, *von* der dahinter stehenden (auf x bezüglichen) Aussage.

Ebenso wird das Zeichen $\Pi_{x,y}$ andeuten, dass die dahinter stehende (nach erwähnter Übereinkunft sich von selbst begrenzende) Aussage für alle erdenklichen Gebietepaare x, y, welche aus unsrer Mn. 1 hervorgehoben werden können, in Anspruch genommen werde, und das Zeichen $\Sigma_{x,y}$, dass dieses nur für gewisse Wertepaare x, y, mindestens aber für ein solches Wertepaar, geschehen solle. Etc.

Die Zeichen Π, Σ sind in solchem Sinne schon von Peirce und Mitchell gebraucht. —

Die Motivirung dieser, auch den Mathematiker vielleicht anfangs befremdenden Festsetzungen nebst den etwa nötigen ergänzenden Bemerkungen in Bezug auf die Gesetze und den regelrechten Gebrauch der beiden Zeichen verschieben wir auf den nächsten Paragraphen.

Der Ausdruck hinter dem Zeichen Σ, Π, auf den dasselbe sich bezieht, heisst das *„allgemeine Glied“* der Summe, resp. der *„allgemeine Faktor“* des Produkts, und das unter dem Zeichen angemerkte Symbol x heisst die *„Summationsvariable“* resp. *„Produktationsvariable“*; auch kommt die gleiche Benennung (im Plural) den sämtlichen darunter angemerkten Symbolen zu, wenn ihrer mehrere, wie $x, y, ..$, sich angemerkt finden sollten. —

Auf § 31 sq. verschieben wir thunlichst alle sonst vielleicht noch wünschenswert erscheinenden Erläuterungen und Erörterungen, um den Überblick nicht zu beeinträchtigen.

Prinzip I der Identität lautet:

I. $(a \neq\!\!\!\in a) = 1$, oder kürzer:

°I. $a \neq\!\!\!\in a$.

Statt zu sagen: der letztere Satz gilt stets, kann man ihn einfach hinstellen.

Wo in dieser Weise das Umschreiben, Transkribiren eines Theorems in die Formelsprache des Aussagenkalkuls keine Vereinfachung seines Ausdrucks liefert und deshalb besser unterlassen wird, wollen wir, wie soeben, ein Ringelchen vor die Chiffre des Theorems setzen.

Prinzip II des Subsumtionsschlusses (Barbara):

II. $(a \neq\!\!\!\in b)(b \neq\!\!\!\in c) \neq\!\!\!\in (a \neq\!\!\!\in c)$.

Definition (1) der Gleichheit:

(1) Def. $(a \neq\!\!\!\in b)(b \neq\!\!\!\in a) = (a = b)$.

Diese Formel definirt primäre oder *Gebietegleichheit* $(a = b)$ aus der Subsumtion, und zwar vermittelst Ansetzung einer sekundären oder *Aussagengleichheit* (nämlich der Äquivalenterklärung zweier primären Aussagen, wie sie das „freie" Gleichheitszeichen andeutet).

Damit dieselbe — bei der im letzten Nebentext (S. 26) gekennzeichneten Deutungsweise unsrer Formeln als solcher des „reinen Aussagenkalkuls" — nicht als ein circulus in definiendo, eine Zirkeldefinition erscheine, sondern als Definition auch der *Aussagengleichheit* wirklich gelten könne, muss die Berufung auf diesen Begriff und anderweitiger Gebrauch des zugehörigen Beziehungszeichens in ihr selbst vermieden werden.

Dies ist leicht hinzubringen dadurch, dass man die Formel auflöst in das (zwar „gleich" 1 gesetzt zu denkende, hier aber besser nur schlechtweg hingestellte) Produkt zweier Subsumtionen:

(1)′ $\{(a \neq\!\!\!\in b)(b \neq\!\!\!\in a) \neq\!\!\!\in (a = b)\} \cdot \{(a = b) \neq\!\!\!\in (a \neq\!\!\!\in b)(b \neq\!\!\!\in a)\}$,

welches nun erst kraft seines eigenen Sinnes sowie Schema's in die oben als Def. (1) hingestellte Gleichung zusammenzuziehen wäre.

Man bemerkt nämlich, dass ebenso wie die in ihr vorkommende Teilaussage $(a \neq\!\!\!\in b)(b \neq\!\!\!\in a)$, so auch die ganze Aussage oder Festsetzung das Produkt ist zweier vor- und rückwärts in einander übergehenden Subsumtionen, mithin von ebendieser Form: $(A \neq\!\!\!\in B)(B \neq\!\!\!\in A)$, nur dass jetzt A die Aussage $(a \neq\!\!\!\in b)(b \neq\!\!\!\in a)$ und B die Aussage $(a = b)$ bedentet. Nach der in ihr selbst gegebnen, für *alle* Aussagen — mögen sie a, b oder A, B heissen — gelten sollenden Erklärung *folgt* sonach aus ihr auch: $A = B$, das heisst: wir dürfen die Definition (1)′, wie zu Anfang, nun auch selbst als Gleichung (1) schreiben, und unter dieser ist umgekehrt nichts anderes als das Subsumtionenprodukt (1)′ zu verstehen.

Zusatz zu Def. (1): $(a = b) = (b = a)$.

°1) Theorem. $a = a$.

2) Th. $(a \Subset b)(b = c) \Subset (a \Subset c)$.

3) Th. $(a = b)(b \Subset c) \Subset (a \Subset c)$.

4) Th. $(a = b)(b = c) \Subset (a = c)$.

Die Definition (2) der identischen Null und Eins lautet:

°$(2_\times)$ $0 \Subset a$	°(2_+) $a \Subset 1$,

spricht aber die definitionsweise den Gebieten 0 und 1 beigelegte Fundamentaleigenschaft in Form von Theoremen aus. Es würden erst die Gleichungen:

$(2_\times)$ Def. $\prod_a (x \Subset a) = (x = 0)$	(2_+) Def. $\prod_a (a \Subset x) = (x = 1)$

die Begriffserklärung ebendieser Gebiete 0, 1 auch in der für Definitionen üblichen Form statuiren, indem sie ausdrücken, (links) dass ein Gebiet x *immer dann und nur dann**) 0 zu nennen sei, wenn dasselbe in jedem Gebiet a enthalten, d. h. wenn *für jedes* a auch $x \Subset a$ ist, (rechts) etc.

$5_\times)$ Th. $(a \Subset 0) = (a = 0)$	$5_+)$ Th. $(1 \Subset a) = (a = 1)$

Definition (3) von Produkt und Summe (Peirce, McColl):

$(3_\times)$ Def. $(c \Subset a)(c \Subset b) = (c \Subset ab)$	(3_+) Def. $(a \Subset c)(b \Subset c) = (a + b \Subset c)$.

Dieselbe bestand aus den gesondert chiffrirten Teilen:

$(3_\times)'$ $(c \Subset a)(c \Subset b) \Subset (c \Subset ab)$	$(3_+)'$ $(a \Subset c)(b \Subset c) \Subset (a + b \Subset c)$
$(3_\times)''$ $(c \Subset ab) \Subset (c \Subset a)(c \Subset b)$	$(3_+)''$ $(a + b \Subset c) \Subset (a \Subset c)(b \Subset c)$.
°$6_\times)$ Th. $ab \Subset a$, $ab \Subset b$.	°$6_+)$ Th. $a \Subset a + b$, $b \Subset a + b$.

Die Theoreme des § 6 waren subtilerer Art, auch im Grunde für die Theorie entbehrlich; sie sollen deshalb auch hier als eine Einschaltung isolirt werden, die von dem Anfänger sich überschlagen lässt.

$7_\times)$ Th. = Def. $(4_\times)$	$7_+)$ Th. = Def. (4_+)
$\prod_x \{(x \Subset c) \Subset (x \Subset a)(x \Subset b)\} =$	$\prod_x \{(c \Subset x) \Subset (a \Subset x)(b \Subset x)\} =$
$= (c \Subset ab)$	$= (a + b \Subset c)$.

*) Dieses liegt in dem vor- und rückwärts als Subsumtionszeichen im Geiste zu lesenden freien (d. h. uneingeklammerten) Gleichheitszeichen.

$8_\times$) Th.

$$(ab \subseteq c) = \prod_x (x \subseteq ab) \subseteq (x \subseteq c)\}$$

8_+) Th.

$$(c \subseteq a+b) = \prod_x \{(a+b \subseteq x) \subseteq (c \subseteq x)\},$$

wobei die in dieser Gleichung enthaltenen beiden Subsumtionen die Theoreme 8)′ und 8)″ gesondert vorstellen werden.

$9_\times$) Th. = Def. ($5_\times$)

$$\prod_x \{(x \subseteq a)(x \subseteq b) \subseteq (x \subseteq c)\} = (ab \subseteq c)$$

9_+) Th. = Def. (5_+)

$$\prod_x \{(a \subseteq x)(b \subseteq x) \subseteq (c \subseteq x)\} = (c \subseteq a + b).$$

$10_\times$) Th.

$$(c \subseteq ab) = \prod_x \{(ab \subseteq x) \subseteq (c \subseteq x)\}$$

10_+) Th.

$$(a+b \subseteq c) = \prod_x \{(x \subseteq a+b) \subseteq (x \subseteq c)\},$$

wobei wieder die aus der Gleichung nach Def. (1) leicht herauszulesenden beiden Subsumtionen die Theoreme 10)′ und 10)″ gesondert vorstellen.

Für die Theoreme 11) muss wegen Raummangels der Mittelstrich gebrochen werden.

$11_\times$) Th. $\prod_x \{(x \subseteq c) \subseteq (x \subseteq a)(x \subseteq b)\}\{(x \subseteq a)(x \subseteq b) \subseteq (x \subseteq c)\} = (c = ab)$,

11_+) Th. $\prod_x \{(c \subseteq x) \subseteq (a \subseteq x)(b \subseteq x)\}\{(a \subseteq x)(b \subseteq x) \subseteq (c \subseteq x)\} = (c = a+b)$,

oder nach Def. (1) zusammengezogen:

$11_\times$) $\prod_x \{(x \subseteq c) = (x \subseteq a)(x \subseteq b)\} = (c = ab)$

11_+) $\prod_x \{(c \subseteq x) = (a \subseteq x)(b \subseteq x)\} = (c = a + b).$

Wie hier — in Th. 7) bis 11) der allgemeine Faktor selbst (hinter dem Produktenzeichen) sich zu der anderen Seite der Proposition (Subsumtion oder Gleichung) verhält, werden wir in § 32 sehen.

°12) Th. Kommutationsgesetze:

°$12_\times$) $ab = ba$

°12_+) $a + b = b + a.$

°13) Th. Assoziationsgesetze nebst Zusatzdefinition von Produkt und Summe dreier in bestimmter Ordnung verknüpfter Operationsglieder:

°$13_\times$) $a(bc) = (ab)c = abc$

°13_+) $a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$.

°14) Th. Tautologiegesetze:

°$14_\times$) $aa = a$

°14_+) $a + a = a$.

$15_\times$) Th. $(a \eqslantless b) \eqslantless (ac \eqslantless bc)$

15_+) Th. $(a \eqslantless b) \eqslantless (a + c \eqslantless b + c)$.

$16_\times$) Th. $(a = b) \eqslantless (ac = bc)$

16_+) Th. $(a = b) \eqslantless (a + c = b + c)$.

$17_\times$) Th. $(a \eqslantless b)(a' \eqslantless b') \eqslantless (aa' \eqslantless bb')$

17_+) Th. $(a \eqslantless b)(a' \eqslantless b') \eqslantless (a + a' \eqslantless b + b')$.

$18_\times$) Th. $(a \eqslantless b)(a' = b') \eqslantless (aa' \eqslantless bb')$

18_+) Th. $(a \eqslantless b)(a' = b') \eqslantless (a + a' \eqslantless b + b')$.

$19_\times$) Th. $(a = b)(a' = b') \eqslantless (aa' = bb')$

19_+) Th. $(a = b)(a' = b') \eqslantless (a + a' = b + b')$.

20) Th. $(a = ab) = (a \eqslantless b) = (a + b = b)$.

°$21_\times$) Th. $a \cdot 1 = a$

°21_+) Th. $a + 0 = a$.

°$22_\times$) Th. $a \cdot 0 = 0$

°22_+) Th. $a + 1 = 1$.

°23) Th. Absorptionsgesetze:

°$23_\times$) $a(a + b) = a$

°23_+) $a + ab = a$

$24_\times$) Th. $(ab = 1) = (a = 1)(b = 1)$

24_+) Th. $(a + b = 0) = (a = 0)(b = 0)$.

°25) Th. („Beweisbare“ oder Erste Subsumtion des Distributionsgesetzes und seines dualen Gegenstückes):

°$25_\times$) $ab + ac \eqslantless a(b + c)$

°25_+) $a + bc \eqslantless (a + b)(a + c)$.

Die nächstfolgenden Formeln 26) bis 28) wurden als „Theoreme“ allerdings erst hinter Th. 34) bewiesen, mögen jedoch hier schon als solche angeführt werden.

°26) Th. Zweite Subsumtion des Distributionsgesetzes nebst Gegenstück:

°$26_\times$) $a(b + c) \eqslantless ab + ac$

°26_+) $(a + b)(a + c) \eqslantless a + bc$.

°27) Th. Distributionsgesetz (Erstes und zweites) nebst Gegenstück:

°$27_\times$) $a(b + c) = ab + ac$
$ba + ca = (b + c)a$

°27_+) $(a + b)(a + c) = a + bc$
$bc + a = (b + a)(c + a)$

°28) Th. Multiplikationsregel für Polynome nebst Gegenstück:

°$28_\times$) $(a+b)(c+d) =$
$= ac + ad + bc + bd$

°28_+) $(a+c)(a+d)(b+c)(b+d) =$
$= ab + cd.$

Prinzip $\mathrm{III}_\times$. $(bc = 0) \mathrel{\underline{\in}} \{a(b+c) \mathrel{\underline{\in}} ab + ac\}$ |

[Der dual entsprechende Satz:

| III_+. $(b + c = 1) \mathrel{\underline{\in}} \{(a+b)(a+c) \mathrel{\underline{\in}} a + bc\}$

wurde nicht zum Prinzip erhoben.]

29) Hülfstheorem (R. Grassmann[2,5]):

$$(ab = 0)(ac = 0)(a + b = 1)(a + c = 1) \mathrel{\underline{\in}} (b = c)$$

Definition (6) der Negation. Dieselbe spricht in der Gestalt:

°(6) Def. $aa_1 \mathrel{\underline{\in}} 0, \quad 1 \mathrel{\underline{\in}} a + a_1$

die der Negation a_1 von a definitionsweise beigelegten Eigenschaften in Form von Lehrsätzen aus. Dagegen formulirt als:

(6) Def. $(ax \mathrel{\underline{\in}} 0)(1 \mathrel{\underline{\in}} a + x) = (x = a_1)$

oder auch:

$$(ax = 0)(a + x = 1) = (x = a_1)$$

leistet sie das gleiche auch in der *Form* einer Definition, indem sie ausspricht, dass ein Gebiet x immer dann und nur dann als Negation a_1 von a zu bezeichnen ist, wenn es mit a das Produkt 0 und zugleich die Summe 1 liefert.

°$30_\times$) Th. Satz des Widerspruchs:

$$aa_1 = 0.$$

°30_+) Th. Satz des ausgeschlossnen Mittels:

$$a + a_1 = 1.$$

°31) Th. Satz der doppelten Verneinnng:

$$(a_1)_1 = a.$$

32) Th. nebst Zus. 1. $(a = b) = (a_1 = b_1)$.

Zusatz 2. $(a = b) \mathrel{\underline{\in}} \{f(a) = f(b)\}$.

[°$33_\times$) Th. $ab = (a+b)(a+b_1)(a_1+b)$

°Zusatz.

$$a(a_1 + b) = ab = (a + b_1)b$$

°$34_\times$) Th.

$$0 = (a+b)(a+b_1)(a_1+b)(a_1+b_1)]$$

°33_+) Th. $a + b = ab + ab_1 + a_1b$

°Zusatz.

$$a + a_1b = a + b = ab_1 + b$$

34_+) Th.

$$1 = ab + ab_1 + a_1b + a_1b_1.$$

Hier kommt den links eingeklammerten Sätzen keine Wichtigkeit für die Technik des Kalkuls zu.

°35) Th. Satz vom Dualismus (vergl. § 14):

$$F_{\prec} = F_{\succ}.$$

Derselbe gehört eigentlich nicht zu den von unsrer Zeichensprache beherrschten Sätzen, besitzt vielmehr seine besondre Symbolik.

°36) De Morgan's Theoreme:

°$36_\times$) $(ab)_1 = a_1 + b_1$	°36_+) $(a + b)_1 = a_1 b_1$,
oder $a + b = (a_1 b_1)_1$.	$ab = (a_1 + b_1)_1$.

37) Th. der (Konversion durch) Kontraposition:

$$(a \subseteq b) = (b_1 \subseteq a_1).$$

38) Th. $(ab_1 = 0) = (a \subseteq b) = (a_1 + b = 1)$.

Zusatz.

$(ab = 0) = (a \subseteq b_1) = (b \subseteq a_1), \quad (a + b = 1) = (a_1 \subseteq b) = (b_1 \subseteq a)$.

39) Th. $(ab_1 + a_1 b = 0) = (a = b) = (ab + a_1 b_1 = 1)$,

$$\{(a + b)(a_1 + b_1) = 0\} = (a = b) = \{(a + b_1)(a_1 + b) = 1\}$$

40) Th. $(ac \subseteq bc)(a + c \subseteq b + c) = (a \subseteq b)$ Schröder.

Zusatz 1. $(ac = bc)(a + c = b + c) = (a = b)$, "

Zusatz 2. $(ac \subseteq b)(a \subseteq b + c) = (a \subseteq b)$, Peirce.

41) Th. von Peirce:

$(ab \subseteq c) = (a \subseteq b_1 + c) = (b \subseteq a_1 + c), \quad (a \subseteq b + c) = (ab_1 \subseteq c) = (ac_1 \subseteq b)$.

°42_+) Th. $y = (xy + ux_1)x + (x_1 y + vx)x_1$ | °$42_\times$) Th. Etc.

43) Th. $\sum_u (a = ub) = (a \subseteq b) = \sum_v (b = a + v)$.

°44_+) Th. $f(x) = f(1)\,x + f(0)\,x_1$ | $44_\times$) $f(x) = \{f(0) + x\} \cdot \{f(1) + x_1\}$

Zusatz$_+$. $f(x, y) = f(1, 1)\,xy + f(1, 0)\,xy_1 + f(0, 1)\,x_1 y + f(0, 0)\,x_1 y_1$, Etc. (Boole und Peirce).

°Vorbemerkung zu Th. 45_+):

$$(ax + bx_1) + (a'x + b'x_1) = (a + a')\,x + (b + b')\,x_1,$$

$$(axy + bxy_1 + cx_1 y + dx_1 y_1) + (a'xy + b'xy_1 + c'x_1 y + d'x_1 y_1) =$$
$$= (a + a')\,xy + (b + b')\,xy_1 + (c + c')\,x_1 y + (d + d')\,x_1 y_1, \quad \text{Etc.}$$

°45_+) Th. $(ax + bx_1)(a'x + b'x_1) = aa'x + bb'x_1$,

$$(axy + bxy_1 + cx_1 y + dx_1 y_1)(a'xy + b'xy_1 + c'x_1 y + d'x_1 y_1) =$$
$$= aa'xy + bb'xy_1 + cc'x_1 y + dd'x_1 y_1, \quad \text{Etc. (Boole.)}$$

°46₊) Th. (Schröder) $(ax + bx_1)_1 = a_1x + b_1x_1$,

$$(axy + bxy_1 + cx_1y + dx_1y_1)_1 = a_1xy + b_1xy_1 + c_1x_1y + d_1x_1y_1, \quad \text{Etc.}$$

Hülfstheorem zu Th. 47_+) von Schröder:

$$(a \Subset x \Subset b) = (ax_1 + bx = x)$$

47_+) Th. desgl.

$$(a \Subset x \Subset b) = (a \Subset b) \sum_w (x = aw_1 + bw)$$

°48_+) Th.
$$ab \Subset ax + bx_1 \Subset a + b,$$
$$abcd \Subset axy + bxy_1 + cx_1y + dx_1y_1 \Subset a + b + c + d,$$

Etc. Diese Formeln drücken eigentlich noch nicht den ganzen Inhalt des Theorems 48_+) aus; um dies zu leisten müsste vielmehr die erste ersetzt werden durch:

$$(ab \Subset y \Subset a + b) = \sum_x (y = ax + bx_1)$$

und würden analog mit $\sum\limits_{x,y}$ etc. die folgenden umzuschreiben sein.

Zusatz:

$$\sum_{u,v}(auv + buv_1 + cu_1v + du_1v_1) = \sum_w \{abcd + w(a + b + c + d)\}.$$

49_+) Th. $(ax + bx_1 = 0) = (b \Subset x \Subset a_1)$,

oder, wenn man will $= (b \Subset a_1)(b \Subset x)(x \Subset a_1)$.

Ferner ist hierzu anzuführen das Hülfstheorem des § 24 (Bd. 1, S. 502):

$$(ax + bx_1 = 0) = (x = bx_1 + a_1x),$$

und erscheint noch als eine nützliche Umschreibung (und Zusammenfassung) der beiden letzten Theoreme:

$$(ax + bx_1 = 1) = (b_1 \Subset x \Subset a) = (x = ax + b_1x_1).$$

50_+) Th. (Boole und Schröder):

$$(ax + bx_1 = 0) = (ab = 0) \sum_u (x = bu_1 + a_1u).$$

Hier hörte unsre Chiffrirung auf. Als Theoreme 51) mögen noch angeführt sein die Ergebnisse aus dem § 23:

$51_\times$) Th. $(bx = a) = (a \Subset b) \sum\limits_u \{x = a + ub_1\}$ |

| 51_+) Th. $(b + x = a) = (b \Subset a) \sum\limits_u \{x = a(b_1 + u)\}$

nebst den Zusätzen:

$(bx = a)(b + x = 1) =$	$(b + x = a)(bx = 0) =$
$= (ab_1 = 0)(x = a + b_1)$	$= (a_1b = 0)(x = ab_1)$.

In Anbetracht, dass mit dem Vorstehenden der elementare Teil unsrer Disziplin einen gewissen Abschluss gefunden hat, wollen wir fortan die Nummernfolge überhaupt nicht weiter fortsetzen.

Dem Mathematiker ist die Mehrzahl der Sätze teils buchstäblich, teils in der dem Subsumtionszeichen $\neq\!\!\!\in$ analogen Beziehung $\leqq$ (gleich oder kleiner) ohnehin geläufig, und wird derselbe eigentlich nur die Theoreme: 14), 22_+), 23), 24), sodann diejenigen von Th. 30) ab, besonders zu beachten haben. Für den die in unserm Vorwort erwähnte Tertianerbildung Besitzenden ist demnach, um für die Beherrschung unsrer Disziplin gewappnet zu sein, das Gedächtniss nur mit wenig mehr als zwanzig Sätzen zu belasten, die auf ungefähr ebensovielen *Zeilen* darstellbar sind und Derjenige von selbst behalten wird, der in den Sinn und Geist derselben eingedrungen! Es kommt dazu noch, dass einzelne von den Sätzen in späteren als in ihren Verallgemeinerungen schon mitenthalten sind. —

§ 30. Fortsetzung über Σ, Π. Aufhören des Dualismus.

Was die im vorigen Paragraphen eingeführten Summen- und Produktenzeichen betrifft, so kann man im identischen Kalkul diese Zeichen zunächst *genau in derselben* Weise verwenden, wie dies in der Mathematik überhaupt geschieht, um das Anschreiben sehr zahlreicher Summenglieder oder Produktfaktoren zu ersparen und die Arbeit auf das *ein*malige Ansetzen des „allgemeinen Gliedes“, resp. „allgemeinen Faktors“ zu reduziren.

In der Arithmetik geben die Schemata:

$$\alpha)\quad \sum_1^n {}^{\lambda} a_\lambda = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \qquad \prod_1^n {}^{\lambda} a_\lambda = a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n-1} a_n$$

über die Bedeutung der Zeichen Σ und Π Auskunft und regeln den Gebrauch derselben. [Man liest: Summe nach λ, (genommen) von 1 bis n, von a_λ. Etc.]

Durch seine Stellung *im* betreffenden Zeichen gibt sich hier der Buchstabe λ als der „laufende“ Zeiger oder die „*Summationsvariable*“ (resp. „*Produktationsvariable*“) zu erkennen — in andern Fällen, wo die Druckerei solcher typographischen Anforderung nicht gerecht zu werden vermag, erkennt man die laufende Zahl daran, dass sie als linke Seite einer über und einer unter das Summenzeichen gesetzten Gleichung erscheint, wie bei der Schreibung

$$\beta)\qquad \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} a_\lambda\,, \qquad \prod_{\lambda=1}^{\lambda=n} a_\lambda$$

die man auch für die linke Seite von α) bezüglich hätte wählen können.

Um sich die Bedeutung eines mit dem Zeichen Σ oder Π in symbolischer Abkürzung dargestellten Ausdrucks klar zu machen, den Ausdruck zu interpretiren, *braucht man blos dem Zeiger λ alle ganzzahligen Werte von der „unteren Grenze“ 1 bis zur „oberen Grenze“ n hin — mit Einschluss eben dieser Grenzen — in dem allgemeinen Gliede resp. Faktor successive beizulegen; man erhält dadurch eine Reihe von einzelnen Termen:*

$$a_1, a_2, a_3, \cdots a_{n-1}, a_n,$$

welche bei Σ additiv, bei Π multiplikativ miteinander zu verknüpfen sind.

Hat man *umgekehrt* eine Summe, ein Produkt von lauter Gliedern resp. Faktoren *gleichen Baues,* d. h. von Termen welche aus *einem* Buchstabenausdruck a_λ dadurch hervorgehen, dass man für einen in ihm vorkommenden Buchstaben λ die Werte einer Sequenz von ganzen Zahlen der Reihe nach einsetzt, so kann man immer die Zeichen Σ, Π behufs symbolisch abgekürzter Darstellung des ganzen Ausdrucks mit Vorteil verwenden. Es genügt dazu die Angabe des „allgemeinen“ Terms hinter dem betreffenden Zeichen Σ oder Π und die Angabe der *„Grenzen“*, d. h. der ersten und der letzten Zahl jener Sequenz (der *„unteren“* nebst der *„oberen“* Grenze), durch welche auch die zwischenliegenden Zahlen mitbestimmt erscheinen, sowie endlich die Charakterisirung der Summationsvariabeln als desjenigen Buchstabens, für welchen eben die Werte jener Sequenz bei der Interpretation des Ausdrucks eingesetzt werden müssen.

Man bemerkt, dass in der interpretirten oder *„ausgeführten“* Summe die Summationsvariable selbst gar nicht vorkommt; dieselbe war blos der Stellvertreter für die Werte jener Sequenz, sozusagen der Träger derselben, markirte blos die Stelle, wo letztere hinzuschreiben sind. Daher muss es auch gleichgültig sein, welchen Buchstaben man als Namen für die Summationsvariable wählt, oder: *die Bezeichnung der Summationsvariabeln ist gleichgültig — nur muss man Sorge tragen, dafür nicht einen schon anderweitig in dem (ganzen) Ausdruck verwendeten Buchstaben zu nehmen,* entsprechend dem in der ganzen Symbolik geltenden Grundsatze, dem Grundsatze für alle systematische Bezeichnung: der Verwechselung von Verschiedenem durch die Wahl einer unterscheidenden Bezeichnung für dasselbe vorzubeugen, insoweit selbiges in dem Rahmen *einer* Untersuchung zusammen in Betracht kommt. Und ähnliches gilt beim Produkte. Oder wir haben:

$$\gamma) \qquad \sum_1^n {}^{\varkappa}\, a_\varkappa = \sum_1^n {}^{\lambda}\, a_\lambda, \qquad \prod_1^n {}^{\varkappa}\, a_\varkappa = \prod_1^n {}^{\lambda}\, a_\lambda.$$

Der strenge Beweis für diese Formeln ergibt sich, indem man die Bedeutung der beiderseitigen Ausdrücke der Definition gemäss ausführlich hinschreibt, wo sie sich dann eben als augenscheinliche Identitäten herausstellen.

[Zum Überfluss wäre an Beispielen leichtlich darzuthun, dass die Nichtbeachtung der angeführten Rücksicht: für den laufenden Zeiger einen noch unverwendeten, disponibeln Buchstaben zu nehmen, in Fehler führt. Vergleiche hierüber z. B. den Anhang meines „Lehrbuch etc.“[1].]

Handelt es sich um Untersuchungen über irgendwelche Summen oder

Produkte von irgendwieviel Gliedern, also um *allgemeine* Untersuchungen, so kann man immer die aus dem Gebrauch der Zeichen Σ, Π resultirenden Vorteile sich dadurch sichern, dass man sich für eine zweckmässige, eine systematische Bezeichnung ihrer Terme von vornherein entscheidet, nämlich wie in γ) numerirte Buchstaben, einen Buchstaben mit verschiedenen Stellenzeigern, Suffixen oder Indices, wie $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n$, dazu verwendet.

Und es steht dem nun nichts im Wege, auch ebendieses im identischen Kalkul zu thun, wenn also die Summen und Produkte nicht als arithmetische sondern als identische aufgefasst werden. Kommen hier auch Negationen in Betracht, so werden wir nur, um den Platz für den Negationsstrich offen zu halten, am besten *obere* Indices oder Exponenten wählen vergl. Bd. 1, S. 261 sq.

Damit werden nun allerdings neben den Buchstaben und der 1 (eventuell auch der 0) als *Gebiets*symbolen auch ebensolche als *Zahl*zeichen eingeführt, und zwar für laufende Zeiger, Indices und Summengrenzen. Aber eben wegen dieser ihrer Beschränkung auf einen bestimmten Platz im Ausdrucke, steht eine Verwechselung derselben mit jenen nicht zu befürchten.

Und indem wir von einer ganzen Reihe in Betracht kommender Gebiete eines als das „erste“ mit a_1, ein anderes als das „zweite“ mit a_2, und so weiter der Übersicht wegen benennen, wird man doch nicht sagen können, dass dadurch das der Logik (im *allerengsten* Sinne) von rechtswegen fremde Element der *Zahl* wesentlich in diese Disziplin hereingezogen werde; es bleibt vielmehr die Angelegenheit nur eine untergeordnete Bezeichnungs- oder *Benennungsfrage.*

Zur Illustration wollen wir einmal die namhaftesten unsrer bisherigen Sätze, die eine Erweiterung auf beliebig viele Operationsglieder zugelassen haben, in geschilderter Weise mittelst Summen- oder Produktenzeichen darstellen.

Die Formel:

II. $$\prod_{1}^{n-1}{}^{\lambda} \{a_\lambda \Subset a_{\lambda+1}\} \Subset \{a_1 \Subset a_n\}$$

stellt den n-gliedrigen Kettenschluss oder Sorites dar. Ausführlich interpretirt würde diese Verallgemeinerung des Prinzipes II lauten:

II′. $$(a_1 \Subset a_2)(a_2 \Subset a_3) \cdots (a_{n-1} \Subset a_n) \Subset (a_1 \Subset a_n)$$

und können hierin die sämtlichen in Klammer stehenden, d. h. hier nur auf Gebiete (nicht auf Aussagen) bezüglichen Subsumtionszeichen auch durchweg in Gleichheitszeichen verwandelt werden, wodurch sich eine Erweiterung von Th. 4) ergäbe:

4) $$\prod_{1}^{n-1}{}^{\lambda} (a_\lambda = a_{\lambda+1}) \Subset (a_1 = a_n)$$

Endlich dürfen von den linkerhand in II′ auftretenden Subsumtionszeichen beliebige Gruppen durch Gleichheitszeichen ersetzt werden, wofern

daselbst nur wenigstens *ein* Subsumtionszeichen übrig bleibt — in Erweiterung der Theoreme 2) und 3).

Die Erweiterungen der Definitionen (3) zu Sätzen:

$$(3_\times)\qquad (a_0 ⋹ a_1)(a_0 ⋹ a_2)\cdots(a_0 ⋹ a_n) = (a_0 ⋹ a_1 a_2 \cdots a_n)$$

$$(3_+)\qquad (a_1 ⋹ a_0)(a_2 ⋹ a_0)\cdots(a_n ⋹ a_0) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n ⋹ a_0)$$

ziehen sich zusammen zu:

$$(3_\times)\quad \prod_{\lambda=1}^{n}(a_0 ⋹ a_\lambda) = \left(a_0 ⋹ \prod_{\lambda=1}^{n} a_\lambda\right) \;\Big|\; (3_+)\quad \prod_{\lambda=1}^{n}(a_\lambda ⋹ a_0) = \left(\sum_{\lambda=1}^{n} a_\lambda ⋹ a_0\right).$$

und lassen dieselben sich noch einmal verallgemeinernd zusammenfassen zu der Formel:

$$(3)\qquad \prod_{\varkappa=1}^{m}\prod_{\lambda=1}^{n}(a_\varkappa ⋹ b_\lambda) = \left(\sum_{\varkappa=1}^{m} a_\varkappa ⋹ \prod_{\lambda=1}^{n} b_\lambda\right), = \prod_{\lambda=1}^{n}\prod_{\varkappa=1}^{m}(a_\varkappa ⋹ b_\lambda).$$

Denn durch Anwendung des einen der beiden vorhergehenden Sätze auf das innere Π-Zeichen, d. h. auf den allgemeinen Faktor des ersten oder letzten Produktes erhält man:

$$\prod_{\varkappa=1}^{m}\left(a_\varkappa ⋹ \prod_{\lambda=1}^{n} b_\lambda\right) \qquad \text{resp.} \qquad \prod_{\lambda=1}^{n}\left(\sum_{\varkappa=1}^{m} a_\varkappa ⋹ b_\lambda\right)$$

— einen Ausdruck, der nach dem andern jener beiden Sätze alsbald in den als mittleres Membrum von (3) angegebenen Ausdruck übergeht.

Ebenso ziehen sich die Erweiterungen der Theoreme 17):

$$17_\times)\quad (a_1 ⋹ b_1)(a_2 ⋹ b_2)\cdots(a_n ⋹ b_n) ⋹ (a_1 a_2 \cdots a_n ⋹ b_1 b_2 \cdots b_n)$$

$$17_+)\quad (a_1 ⋹ b_1)(a_2 ⋹ b_2)\cdots(a_n ⋹ b_n) ⋹ (a_1 + a_2 + \cdots + a_n ⋹ b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

zusammen zu:

$$17_\times)\ \prod_{\lambda=1}^{n}(a_\lambda ⋹ b_\lambda) ⋹ \left\{\prod_{\lambda=1}^{n} a_\lambda ⋹ \prod_{\lambda=1}^{n} b_\lambda\right\} \;\Big|\; 17_+)\ \prod_{\lambda=1}^{n}(a_\lambda ⋹ b_\lambda) ⋹ \left\{\sum_{\lambda=1}^{n} a_\lambda ⋹ \sum_{\lambda=1}^{n} b_\lambda\right\},$$

wobei in Bezug auf Ersetzung der Gebiete verknüpfenden Subsumtionszeichen Ähnliches zu bemerken wäre, wie vorhin bei II — in Erweiterung der Theoreme 18) bis 19). Die Ausdehnung des Th. 19) ergibt sich namentlich, wenn man *beiderseits* alle Zeichen $⋹$ in $=$ verwandelt) das mittlere oder freie $⋹$ aber stehen lässt).

Die Ausdehnungen der Theoreme 24):

$$24_+)\quad (a_1 = 0)(a_2 = 0)\cdots(a_n = 0) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0)$$

$$24_\times)\quad (a_1 a_2 \cdots a_n = 1) = (a_1 = 1)(a_2 = 1)\cdots(a_n = 1)$$

stellen sich dar als:

$$24_+)\ \left(\sum_1^n{}^\lambda a_\lambda = 0\right) = \prod_1^n{}^\lambda (a_\lambda = 0) \qquad 24_\times)\ \left(\prod_1^n{}^\lambda a_\lambda = 1\right) = \prod_1^n{}^\lambda (a_\lambda = 1)\cdot$$

°Weiter sind:

$$27_\times)\quad a\sum_1^n{}^\lambda b_\lambda = \sum_1^n{}^\lambda a b_\lambda \qquad 27_+)\quad a + \prod_1^n{}^\lambda b_\lambda = \prod_1^n{}^\lambda (a + b_\lambda)$$

oder

$$\left(\sum_1^m{}^\varkappa a_\varkappa\right) b = \sum_1^m{}^\varkappa a_\varkappa b \qquad \prod_1^m{}^\varkappa a_\varkappa + b = \prod_1^m{}^\varkappa (a_\varkappa + b)$$

Die Erweiterungen der Distributionsgesetze, die wir schon Bd. 1, S. 311 in extenso gegeben haben, und die Formel:

$$28_+)\ \left(\sum_1^m{}^\varkappa a_\varkappa\right)\sum_1^n{}^\lambda b_\lambda = \sum_1^m{}^\varkappa \sum_1^n{}^\lambda a_\varkappa b_\lambda \qquad 28_\times)\ \prod_1^m{}^\varkappa a_\varkappa + \prod_1^n{}^\lambda b_\lambda = \prod_1^m{}^\varkappa \prod_1^n{}^\lambda (a_\varkappa + b_\lambda)$$

drückt die Multiplikationsregel für Polynome nebst ihrem dualen Gegenstück aus; es steht hier rechterhand eine sogenannte *„Doppelsumme"*, d. h. eine Summe, deren allgemeines Glied selbst wieder ein Summenausdruck ist, resp. ein „Doppelprodukt". Und es würden diese Sätze sich fernerhin leicht noch so verallgemeinern lassen, dass eine ganz beliebige Menge von Summenzeichen beiderseits vorkäme rechts also (bei 28_+) eine „mehrfache Summe" — und analog von Π-Zeichen bei $28_\times$).

Endlich gibt die Erweiterung der Theoreme 36):

$$36_\times)\ (a^1 a^2 \cdots a^n)_1 = a_1{}^1 + a_1{}^2 + \cdots + a_1{}^n \qquad 36_+)\ (a^1 + a^2 + \cdots + a^n)_1 = a_1{}^1 a_1{}^2 \cdots a_1{}^n$$

in unserer Abkürzung.

$$36_\times)\quad \left\{\prod_1^n{}^\lambda a^\lambda\right\}_1 = \sum_1^n{}^\lambda a_1{}^\lambda \qquad 36_+)\quad \left\{\sum_1^n{}^\lambda a^\lambda\right\}_1 = \prod_1^n{}^\lambda a_1{}^\lambda\,.$$

Die gegebenen Beispiele werden wol genügen, um auch den Nicht-Mathematiker in die Geheimnisse der Zeichen Σ und Π einzuweihen.

Ich lege auf diese Verwendungsweise (der Zeichen) selbst für unsere Disziplin nur ein geringes Gewicht, werde auch kaum so von denselben Gebrauch machen. Jedoch musste dieselbe hier dargelegt werden, um den mathematisch weniger geschulten Leser mit dem Geiste der Zeichen vertraut zu machen und auf den *für uns wichtigen Gebrauch* derselben vorzubereiten, zu dessen Darlegung ich jetzt übergehe.

Bei diesem enthalten wir uns des Gebrauchs von Zahlzeichen (ausgenommen 0 und 1) gänzlich, verwenden solche auch nicht mehr als Stellenzeiger.

Wir fassen nur Formeln des Gebietekalkuls in's Auge, und lassen die Summations- (resp. Produktations)Variable — sie heisse x — sogleich eine vorgeschriebene Reihe von bestimmten Gebieten:

$$a,\ b,\ c,\ d, \ldots$$

„durchlaufen", d. h. successive mit einem jeden von diesen im Geiste identifizirt, äusserlich durch dasselbe ersetzt werden. Wenn $f(x)$ irgend eine Funktion des identischen Kalkuls bezeichnet, so haben wir dann:

$$\sum\nolimits_x f(x) = f(a) + f(b) + f(c) + f(d) + \cdots$$

$$\prod\nolimits_x f(x) = f(a)\, f(b)\, f(c)\, f(d) \cdots$$

als Erklärung für die Bedeutung der linkerhand stehenden Ausdrücke. Behufs Verringerung der Schwierigkeiten des Druckes kann man hier (wo der früher von den „Summengrenzen" etc. in Anspruch genommene Platz frei geworden ist) die Variable x statt im Innern, auch *unterhalb* des Zeichen Σ resp. Π anmerken, schreiben: $\underset{x}{\Sigma} f(x)$, $\underset{x}{\Pi} f(x)$; auch kann in der Gestalt:

$$\sum_{(x = a, b, c, \cdots)} f(x), \qquad \prod_{(x = a, b, c, \ldots)} f(x)$$

die von der Variabeln zu durchlaufende Wertenreihe (Reihe von speziellen Gebieten) gleich unterhalb der Zeichen Σ, Π angemerkt werden.

Unterlassen wir auch solche Anmerkung, indem wir z. B. die stillschweigende Unterstellung fordern, dass a eine Wertenreihe $a', a'', a''', \cdots$ b eine solche $b', b'', b''', \cdots$ zu durchlaufen habe, so gewinnt schon die Mehrzahl unsrer vorigen Sätze ein durchsichtigeres, weniger schwerfälliges oder überladenes Ansehen, z. B.

$(3_\times)$ $\underset{b}{\Pi}(a \subseteq b) = (a \subseteq \underset{b}{\Pi} b)$ | (3_+) $\underset{a}{\Pi}(a \subseteq b) = (\underset{a}{\Sigma} a \subseteq b)$.

(3) $\underset{a}{\Pi}\underset{b}{\Pi}$ oder $\underset{a,\,b}{\Pi}(a \subseteq b) = (\underset{a}{\Sigma} a \subseteq \underset{b}{\Pi} b)$,

wo die Suffixa unter den Zeichen Π, Σ nun auch ganz fortgelassen werden mögen.

$17_\times)$ $\Pi(a \subseteq b) \subseteq (\Pi a \subseteq \Pi b)$ | $17_+)$ $\Pi(a \subseteq b) \subseteq (\Sigma a \subseteq \Sigma b)$

wobei es — als naheliegende abermalige Ausdehnung des früheren Theorems 17) nun nicht einmal zu fordern nötig erscheint, dass die Wertreihe der a und die der b aus gleichviel Werten bestehe [Es durften ja einzelne von diesen Werten auch zusammenfallen, und

brauchen sie dann nach dem Tautologiegesetze nicht wiederholt zu werden]. Etc. (den Rest sich noch einfacher zu schreiben überlassen wir dem Leser).

Jedenfalls tritt durch solches Preisgeben des Beiwerks der Kern der Sätze besser hervor. Da es für die Geltung dieser Sätze gleichgültig ist, wie viele es der von a oder b beiderseits zu durchlaufenden Werte sein und wie diese Werte heissen sollen, so braucht letzteres in den Sätzen auch nicht gesagt, nicht zum Ausdruck gebracht zu werden.

Wird zu einem Zeichen Σ_x, Π_x keine Wertenreihe als die von dem x zu durchlaufende ausdrücklich angeführt, so findet gewöhnlich einer von den folgenden beiden Fällen statt:

Entweder diese Wertenreihe ist in unser Belieben gestellt; für den ersten, zweiten, dritten, etc. Wert derselben können wir jedesmal ein individuelles Gebiet nach Gutdünken nehmen, auch ist es gleichgültig ob die Reihe unbegrenzt fortgesetzt oder irgendwo abgebrochen wird; auch die Anzahl der Werte steht dahin. Solches war in der That bei den allgemeinen Sätzen der Fall, welche wir vorhin zusammengestellt haben.

Oder diese Wertenreihe ist eine bestimmte, die Werte sind (wenn auch ihre Reihenfolge als belanglos offen gelassen sein mag) in ihrer Gesamtheit gegeben, durch eine allgemeine Abmachung ein für allemal festgesetzt.

Bei den von Anfang als Rekapitulation der Sätze des identischen Kalkuls in diesem Paragraphen gegebenen Formeln (welche überhaupt Zeichen Σ oder Π enthalten — vergl. (2), 7) ·· 11), 43), 47), 48) Zus., 50) und 51) — war das letztere der Fall, und zwar sollte die von der Variabeln x zu durchlaufende *Wertenreihe bestehen aus allen denkbaren Gebieten*, die Variable sollte *sämtliche* Gebiete oder Klassen der Mannigfaltigkeit hier stets als Bedeutung nacheinander untergelegt bekommen (wobei Wiederholungen nicht einmal ausgeschlossen, aber belanglos).

Stellt nun F_x eine das Gebiet x betreffende Aussage vor, so wird die Aussage

$$\prod_{(x=a,\,b,\,c,\,\cdots)} F_x = F_a \cdot F_b \cdot F_c \cdots$$

als ein identisches Produkt von Aussagen der Def. gemäss aussagen, dass die Aussagen F_a, F_b, F_c, $\cdots$ *gleichzeitig* wahr seien, m. a. W. dass die Aussage F_x sowol für $x = a$, als auch für $x = b$, $x = c$, etc. gelte. Und das Urteil

$$\prod_x F_x$$

wird sogar — gemäss obiger Abmachung — besagen, dass die Aussage F_x *für jedes Gebiet* x, mithin, dass sie ganz *allgemein* im Gebietekalkul gelte.

Dagegen wird eine Aussage:

$$\sum_{(x = a, b, c, \cdots)} F_x = F_a + F_b + F_c + \cdots$$

als eine identische Summe von Aussagen blos ausdrücken, konstatiren, dass letztere alternativ gelten müssen: entweder die erste, oder auch vielleicht die zweite, etc., „oder auch" mehrere von ihnen zugleich, vielleicht auch alle zusammen. Es *können* alle, es *braucht* aber nur *ein* Term zuzutreffen. Und demgemäss wird das Urteil

$$\sum_x F_x$$

schlechtweg besagen, dass die Aussage F_x wenigstens gelte *für irgend ein Gebiet* x, vielleicht für $x = 0$, oder vielleicht für $x = 1$, oder für ein gewisses zwischenliegendes x, vielleicht sogar für mehrere, eine ganze Klasse von solchen, *vielleicht* endlich — *nicht notwendig* — für alle samt und sonders, *„gewiss"* nur, für mindestens eines.

Hiernach erscheint nun die zu Anfang nur einfach als Konvention von uns hingestellte Erklärung der Zeichen $\sum_x$ und $\prod_x$ als durchaus motivirt; sie ist hiermit erkannt als vollkommen konform oder analog (wenn auch nicht identisch) der sonstigen Verwendungsweise dieser Zeichen in der gesamten Mathematik.

Man merke einfach, dass in der Zeichensprache des Kalkuls Π das Symbol ist für das Pronomen *„jedes"* (every), Σ dasjenige für *„irgend ein"* (any, resp. some)*) — kürzer: für den unbestimmten Artikel „ein".

Jenes fordert gleichzeitiges, *simultanes* Vorstellen des dahinter gesetzten Termes in allen seinen Bedeutungen, dieses nur (fakultativ-) *alternatives* in der einen oder andern, in gewissen oder irgend welchen dieser Bedeutungen.

Mit Hülfe dieser beiden Zeichen, werden wir erfahren, lässt sich jeder Grad von (bestimmter oder unbestimmter) Allgemeinheit angemessen darstellen.

*) Das Pronomen „irgend ein" wird nicht selten auch gebraucht im Sinne von „ein ganz beliebiges, sonach auch jedes". Dieses soll hier nicht gemeint sein.

Vor alle Formeln des § 29, welche Buchstaben $a, b, c, x, \ldots$ enthalten, durften im Hinblick auf deren Allgemeingültigkeit natürlich auch die Zeichen $\prod_a, \prod_b, \ldots$ unter jeweiliger Einklammerung der ganzen Formel geschrieben werden. —

Die Entwickelung der Mathematik während des letzten Jahrhunderts hat bekanntlich die Erfahrung gebracht, dass die Übertragung des Begriffes der Summe oder des Produktes, aus einer *endlichen* Menge von *Zahlen* auf eine *unbegrenzte* Menge von solchen, auf eine „unendliche" Reihe von Termen (Gliedern, Faktoren), an bestimmte Voraussetzungen als einschränkende Bedingungen geknüpft ist, welche in den „*Konvergenz*regeln" („-Kriterien") für unendliche Reihen, und Produkte, von der Wissenschaft niedergelegt sind. Die Ausserachtlassung dieser Konvergenzbedingungen, stellte sich heraus, führt in Fehler.

Für die identischen Produkte und Summen aus Gebieten oder Klassen haben wir aber vorstehend die analoge Ausdehnung ganz *ohne weiteres* vorgenommen, und wird daher durch die Analogie der identischen mit den arithmetischen Disziplinen die Vermutung nahe gelegt, ob nicht auch hier gewisse Vorsichtsmassregeln zu beachten sein würden, ob nicht auch die identischen Produkte und Summen aus unbegrenzten Mengen von Termen ihre „Konvergenzbedingungen" haben?

Dass die Frage denknotwendig scheint verneint werden zu müssen bildet ein interessantes Thema der Erkenntnisslehre, welches wir uns hier begnügen, als solches blos angedeutet zu haben.

Noch ein andrer Umstand muss beim Überblicken der Formeln des § 29 auffallen, den wir als

Anmerkung über den Dualismus zur Sprache bringen.

Die formalen Grundlagen des identischen Kalkuls, als da sind *Definitionen* und (Axiome oder) *Prinzipien**); desgleichen dann auch die aus jenen Grundlagen abgeleiteten, gefolgerten *Theoreme*, zeigten bislang jene in § 14 näher erörterte Eigenschaft des „Dualismus". In jedem Satze konnten mit übergeordnet und untergeordnet, also $\ni$ und $\in$, zugleich auch 0 und 1, mal und plus die Rollen tauschen, und indem sie hierdurch in einander übergingen, *entsprachen* die Sätze mitunter schon sich selbst, zumeist aber paarweise einander — wie wir sagten „*dualistisch*" — wie wir nunmehr aber genauer werden sagen müssen: „*gebietsdual*".

*) Postulate zähle ich nicht zu den „*formalen*" Grundlagen.



Nachdem wir nämlich alle Sätze aus ihrer früheren verbalen Fassung in die Zeichensprache des Aussagenkalkuls umgeschrieben, aus jener sie ganz in Formeln „übersetzt“ haben, kommen in ihnen ausser den wie früher schon *Gebiets*symbole oder Klassen verknüpfenden Beziehungs- und Operationszeichen auch vor: dieselben Zeichen als solche, welche *Aussagen* verbinden (die jene Gebiete betreffen). Es tritt neben dem Nullgebiet und dem *Gebiet* 1 auch eventuell jetzt in den Formeln auf: die Nullaussage und die *Aussage* **1**.

Faktisch ist die Anwendung der 0 als Aussage in der Rekapitulation des § 29 durchweg vermieden, und ebenso die Aussage **1** durchweg, wofern man bei den mit Ringelchen ausgezeichneten Chiffren sich an die angegebene einfachste Fassung der Sätze hält. Leicht könnten jedoch die Sätze auch in solcher Form dargestellt werden (wie es späterhin zum Teil nicht vermeidlich), dass diese beiden Symbole häufig aufträten.

Also die „*Beziehungszeichen*“: $\subseteq$, $\supseteq$, $=$ (zu denen später noch weitere, wie $\neq$, $\not\subseteq$ treten werden) sowol, als auch die „*Operationszeichen*“: *mal* oder $\cdot$ (eventuell unterdrückt und in Gedanken erst herbeizuschaffen, zu suppliren), sowie *plus* oder + und *nicht* oder $_1$ (Negationsstrich)*), dazu endlich auch „*die beiden Zahlzeichen*“: 0 und 1 (resp. **1**) des identischen Kalkuls — alle diese Zeichen haben wir nun und hinfort zu unterscheiden als „*aussagenrechnerisch*“ oder aber „*gebietsrechnerisch*“ *verwendete* — man könnte wol auch sagen: *sekundäre* und *primäre*.

Als solche geben sie auf den ersten Blick sich zu erkennen, indem die letztern (oder primären Zeichen) an Buchstaben oder Buchstabenausdrücken haften (die kein Beziehungszeichen enthalten), die erstern (oder sekundären) aber an in Klammer stehenden Aussagen, oder Knüpfungen, Komplexen solcher, die mindestens ein Beziehungszeichen in sich schliessen — sodass eine Verwechselung von beiderlei Verwendungsweisen nicht zu besorgen steht.

Nimmt man in den Formeln des § 29 die durch den Satz des Dualismus gestattete Vertauschung der Zeichen 0 mit 1, + mit $\cdot$, $\subseteq$ mit $\supseteq$, eventuell auch Π mit Σ, *durchweg* vor, nicht nur bei den als primäre stehenden, sondern auch bei sekundären Zeichen, so ergeben sich fast lauter *falsche* Sätze.

Gewissermassen zufällig richtig — weil ungeändert bleibend oder in ihr duales Gegenstück (im herkömmlichen Sinne) übergehend — bleiben blos der Zusatz zu Def. (1) sowie die Theoreme 5), 20), 32), 37), 38), 39), 41), das Hülfstheorem zu 47), und Th. 49).

Es genügt schon, bei den Grundlagen des Kalkuls jenes nach-

*) Auch die Zeichen Σ und Π wären an dieser Stelle mit aufzuzählen.

zusehen, um die Unerlaubtheit des Prozesses im allgemeinen darzuthun.

Schon Prinzip I in der Fassung des Aussagenkalkuls: $(a \subseteq a) = \dot{1}$ schlechtweg dual umgeschrieben würde lauten:

$$(a \supseteq a) = 0,$$

und somit geradezu in Widerspruch mit sich selbst treten; während nämlich der ursprüngliche Satz sagt, dass die Formel $a \subseteq a$ *stets* gelte, behauptet der zweite oder dual umgeschriebene, dass sie (nämlich dieselbe Formel, nur auf die zweite zulässige Art, nämlich von rechts nach links als $a \supseteq a$ gelesen) *niemals* gelte.

Und ähnlich verhält es sich bei allen mit Ringelchen chiffrirten Theoremen, indem die *durchgängig duale* Umwandlung eines solchen Theorems allemal hinauslaufen müsste auf die Verneinung seines dualen Gegenstücks (im herkömmlichen Sinne), dessen Geltung doch mit ihm selbst verbürgt ist.

Prinzip II, einfach dual umgeschrieben gäbe (sofern wir, statt $\subseteq$ und $\supseteq$, lieber major und minor tauschen):

$$(c \subseteq a) \subseteq (c \subseteq b) + (b \subseteq a)$$

und würde, was offenbar falsch ist, lehren, dass wenn c in a enthalten ist, entweder es in dem nächsten besten Gebiet b, oder dieses in a enthalten sein müsse.

Def. (1) der Gleichheit gäbe:

$$(b \subseteq a) + (a \subseteq b) = (a = b)$$

wonach a *gleich* b zu nennen wäre, wenn auch nur eines von den beiden Gebieten, gleichviel welches, im andern enthalten ist.

Die Definitionen (2): $(0 \subseteq a) = \dot{1}$ und $(a \subseteq \dot{1}) = \dot{1}$ würden geben: $(a \subseteq 1) = 0$ und $(0 \subseteq a) = 0$, würden also in Illustration des oben Gesagten sich gegenseitig ableugnen.

Aus Def. (3) erhielten wir noch:

$$(a + b \subseteq c) = (a \subseteq c) + (b \subseteq c), \quad (c \subseteq ab) = (c \subseteq a) + (c \subseteq b)$$

was ebenfalls leicht durch Beispiele als falsch darzuthun.

Etc. Und ähnlich, wie die Grundlagen schon die Umwandlung nicht vertragen, so auch nicht das auf ihnen errichtete Gebäude von Konsequenzen. Es würde beispielsweise Th. 40), Zus. 2 liefern:

$$(b \subseteq a + c) + (bc \subseteq a) = (b \subseteq a),$$

was offenbar falsch. Etc.

Ebenso würden zumeist falsche Sätze sich ergeben, wenn man in unsern Theoremen etwa die primären, gebietsrechnerisch verwendeten Zeichen unverändert stehen liesse und nur die sekundären aussagenrechnerisch zu deutenden dem dualistischen Tausch unterwürfe — wie

man dies im Anschluss an vorstehende Betrachtungen leicht ebenfalls nachsehen wird.

Es gelten unsre Definitionen und Prinzipien *„aussagendual“ umgeschrieben nicht* mehr, mögen sie dabei gleichzeitig auch „gebietsdual“ transkribirt werden, oder nicht.

Diese Thatsache ist auf den ersten Blick *überraschend*. Wie ist dieselbe mit dem Umstand in Einklang zu bringen, dass doch der Aussagenkalkul nur eine besondre Anwendung des Gebietekalkuls ist, in welchem der Dualismus durchweg herrscht?

Der scheinbare Widerspruch klärt sich in folgender Weise auf.

Schon die allgemeinste, schon eine Aussage von noch ganz offen gelassenem Inhalte, lässt nicht als ein ganz beliebiges Gebiet sich deuten (als eine ganz beliebige Klasse in der Mannigfaltigkeit der Gelegenheiten zu Aussagen), vielmehr kommt, sofern ihr Sinn nur konstant festgehalten wird, einer der beiden Werte 0 oder 1 ihr notwendig zu. Bestimmte, mit Inhaltsangabe ausgestattete oder „spezifizirte“ Aussagen, vollends, sind ganz *spezielle* Gebiete (mögen sie auch vielleicht allgemeine Gebiete betreffen, über solche als ihr Thema etwas aussagen). Wenn falsch, sind sie $= 0$, wenn richtig, $= 1$ zu denken.

Für spezielle Gebiete aber brauchte zu einer Proposition die dual entsprechende keineswegs zu gelten.

Wenn — um das einfachste Beispiel zu nehmen — $a \mathrel{=\!\!\!\!\in} b$ ist, braucht nicht zugleich auch $b \mathrel{=\!\!\!\!\in} a$ zu sein (sonst müsste ja in der That jede Einordnung auf identische Gleichheit hinauslaufen). Oder wenn für *gewisse* Gebiete a, b, c beispielsweise $a \mathrel{=\!\!\!\!\in} b + c$ sein sollte, so muss nicht notwendig zugleich auch $bc \mathrel{=\!\!\!\!\in} a$ gelten!

Nicht zu „Relationen“, sondern nur zu *allgemeinen „Formeln“ des Gebietekalkuls*, die also richtig sind, was auch immer für Gebiete der Mannigfaltigkeit die in sie eingehenden Buchstaben bedeuten, mussten stets die dual entsprechenden gelten.

Da in dieser Weise z. B. $ab \mathrel{=\!\!\!\!\in} a$ war, so musste zugleich auch $a \mathrel{=\!\!\!\!\in} a + b$ allgemein sein. Etc.

Von solchem Charakter *scheinen* zwar die in § 29 rekapitulirten Theoreme zu sein — die wir in der That fortfahren mögen, auch in ihrer dortigen Fassung, als *allgemeine „Formeln“* (und zwar des Aussagenkalkuls) zu bezeichnen, sintemal sie eben für ganz beliebige Gebiete a, b, c, d, x, y, etc. Geltung beanspruchen — sie sind es aber in Wahrheit (im vollen Sinne des Wortes) *nicht*: vielmehr stellen dieselben sich sofort als blosse „Relationen“ (des Gebietekalkuls) dar, so-

bald man die in sie eingehenden Aussagen durch Buchstaben ersetzt (und letztere auf ihre Bedeutung im Gebietekalkul prüft):

Sollte man selbst die zugrunde gelegte Mannigfaltigkeit in *ein* Individuum zusammenschrumpfen lassen, somit auf die beiden Gebiete 0 und 1 (welch' letzteres dann dieses eine Individuum vorstellt) beschränken, — wie es hier angezeigt sein wird — so können doch unsre sogenannten Formeln des § 29 im letzterwähnten Sinne in der Regel nicht „Formeln“ sein. Dies wollen wir an einem Beispiel, etwa bei Prinzip II, uns völlig zum Bewusstsein bringen.

Dasselbe mögen wir schreiben:

$$CA \preccurlyeq B,$$

wo C, A, B die Behauptungen (oder Aussagen) bedeuten:

$$C = (a \preccurlyeq b), \quad A = (b \preccurlyeq c), \quad B = (a \preccurlyeq c).$$

Die Voraussetzungen C und A unsres Satzes mögen hier nach Belieben richtig oder falsch sein; sie sind (innerhalb der blos die Gebiete 0 und 1 umfassenden Mannigfaltigkeit) beliebige oder allgemeine Symbole. Nicht so aber dann das Symbol B für die Behauptung des Satzes. Dasselbe ist, nachdem die Werte von C und A festgelegt sind, nicht mehr ganz willkürlich; es kann z. B. nicht 0 bedeuten, wenn C und A die 1 zum Werte haben. Sogar in der Mannigfaltigkeit 0, 1 ist daher die Proposition $CA \preccurlyeq B$ nicht allgemeingültig, keine Formel, weshalb auch die dual entsprechende: $B \preccurlyeq C + A$ hier nicht zu gelten braucht. — Und diese Überlegung wird nicht beeinträchtigt durch den Umstand, dass *in* unsern Aussagen A, B, C die Symbole a, b, c ganz allgemeine oder beliebige Gebiete (der Tafelfläche z. B.) vorstellten. —

Das Versagen des Dualismus beim aussagendualen Umschreiben der Sätze kann uns hiernach nicht mehr befremden.

Immer aber gelten unsre Formeln blos *„gebietsdual“* umgeschrieben ebenfalls wieder, d. h. man erhält aus ihnen immer wieder richtige Formeln, wenn man *nur* die primären oder gebietsrechnerisch verwendeten Zeichen 0 und 1, + und ·, Π und Σ, $\preccurlyeq$ und $\succcurlyeq$ umtauscht, dagegen dieselben ungeändert stehen lässt, wo sie als sekundäre (als Aussagen zu deutende, resp. solche verknüpfende, auf solche bezügliche) auftreten.

Unsere Theoreme des identischen Kalkuls werden wir hinfort auch in zweierlei Sinne zu citiren haben [so, wie dies mit den Prinzipien wenigstens, auch wiederholt schon früher der Fall gewesen]: als solche nämlich des allgemeineren, des Klassen- oder Gebietekalkuls, und ferner

als solche des spezielleren, des reinen Aussagenkalkuls — wo unter den kleinen Buchstaben, $a, b, c, x, ..$ dann Aussagen zu denken sein werden. Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, ohne dass doch auf die Angabe der beabsichtigten Verwendung jedes Citates verzichtet werden müsste, mag künftig die *letztere* Citationsweise durch einen *über die Chiffre des Theorems gesetzten Horizontalstrich* angedeutet werden.

„Nach Pr. $\overline{\text{II}}$“ z. B. wird darnach heissen: „weil, wenn C aus B und B aus A folgt, dann auch C aus A folgt“. „Nach Th. $\overline{6_\times}$)“ heisst: weil das mehrern Gebieten gemeinsame Gebiet in irgend einem (einem jeden) derselben enthalten ist; wogegen „nach Th. $\overline{6}_\times$)“ heisst: weil, wenn A nebst B gilt, dann gewiss auch A (oder resp. B) gelten wird. „Nach Th. $\overline{21_\times}$)“ heisst: weil eine selbstverständliche oder nach den gemachten Voraussetzungen ohnehin gültige Aussage (1) nach Belieben fortgelassen werden mag, wo sie erwähnt worden, oder auch als simultan geltende angeführt werden mag, wo sie noch nicht erwähnt worden. Etc.

Sechzehnte Vorlesung.

§ 31. **Die Grundsätze der Logik im Aussagenkalkul gedeutet. Inkonsistenz.**

Es wurde schon wiederholt im Kontext darauf hingewiesen, doch ist erst hier der Ort, es im System eingereiht auszusprechen, dass (nach der im § 28 über die Aussagensubsumtion $A \Subset B$ getroffnen Übereinkunft) das *Prinzip* I *der Identität:*

$$A \Subset A$$

im Aussagenkalkul die Bedeutung hat: *Wenn A gilt, so gilt A.* Das heisst: *Eine einmal als richtig erkannte Aussage* (von bestimmtem Sinne) *darf,* (indem dieser Sinn konstant festgehalten wird), *bei beliebiger Gelegenheit wiederholt werden und muss allemal, so oft sie ausgesprochen wird, wieder als gültig anerkannt werden.* Mit noch andern Worten: Was wahr ist, muss wahr bleiben. Zugeständnisse müssen, wenn gemacht, auch aufrecht erhalten, Abmachungen müssen gleichwie gegebene Versprechen, gehalten werden. Ist zugegeben, dass eine Aussage A gelte, so hat man dies von neuem zuzugeben, wann immer es — etwa im Verlaufe von ferneren Argumentationen — in Erinnerung gebracht werden sollte. Es ist geradezu die Forderung der *Konsequenz* im Denken, die sich im Aussagenkalkul in das „Prinzip der Identität" einkleidet.

So unbestreitbar das Recht ist, mit welchem wir diesen Satz als einen obersten Grundsatz der Logik in Anspruch nehmen, so erscheint es doch nicht überflüssig, darauf aufmerksam zu machen, dass es missbräuchliche Anwendungen dieses Grundsatzes gibt, erscheint es daneben angezeigt, auch vor solchen zu warnen.

Für eine radikale Anwendung unsres Grundsatzes in allen Lebenslagen sollte hier keineswegs plädirt werden. Im gemeinen Leben darf manches, was *wahr* ist, weder beliebig wiederholt, noch überhaupt nur ausgesprochen werden, und schon die Befolgung des Grundsatzes, „was wahr ist, könne man ja sagen", müsste sowol für Denjenigen, der es damit versuchte, als für Diejenigen, die mit ihm in Berührung kommen, im allgemeinen eine Fülle von Unzuträglichkeiten im Gefolge haben, ja unberechenbaren Schaden stiften — wie dies in einer bekannten Erzählung und darauf

gegründetem Lustspiele „Nur einen Tag die Wahrheit“, z. B., in anmutiger Weise veranschaulicht worden.

Im gesellschaftlichen sowol als im dienstlichen Verkehr unter den Menschen ist bekanntlich die Freiheit, eine Wahrheit auszusprechen oder zu wiederholen, ausserordentlich und in ernstester Weise eingeschränkt durch die Pflicht der Rücksichtnahme auf die möglichen oder voraussichtlichen Wirkungen ihrer Äusserung, namentlich aber durch die Forderungen des *Anstandes*, des *Taktes* und der *Diskretion*.

Vor geistig Unmündigen, vor ganzen und halben Kindern, Frauen dürfen grosse Klassen von Wahrheiten überhaupt nicht ausgesprochen werden. Das Gebiet, unter anderm, braucht hier nicht näher bezeichnet zu werden, auf welchem auch die Kundgebung von Wahrheit mittelst Abbildung, wie sie z. B. als Photographie mit äusserster Genauigkeit und Treue, *Wahrhaftigkeit*, sich herstellen lässt, mit gesetzlichen Strafen aus gutem Grunde verpönt ist. In der Bethätigung von Takt in seinen Äusserungen wird ein Mensch nicht nur den etwa anszusprechenden oder anzudeutenden Wahrheiten eine schonende Form zu geben suchen, in welcher sie die Gefühle Derjenigen, an die sie gerichtet sind, nicht unnötig verletzen, die Lebensinteressen der Nebenmenschen nicht ohne Not preisgeben oder schädigen, sondern er wird auch in vielen Fällen den Impuls zum Aussprechen oder Wiederholen einer Wahrheit gänzlich hemmen. Den Anforderungen des Taktes gesellen sich noch die ästhetischen des guten Geschmackes. Als Geschäfts- und Dienstgeheimniss aber, auch als persönliche Angelegenheit von privatem Charakter, als ein durch konfidenzielle Mitteilung erworbenes Wissen oder „im Vertrauen“ Erfahrenes, ist manche Wahrheit sogar vor der Veröffentlichung oder Preisgebung an Unbefugte sorgfältig zu hüten. Ihre konsequente Verschweigung und sorgfältige Verheimlichung mag erscheinen als Forderung der Freundespflicht, der Ehre und des Diensteides; auf ihrer Preisgebung kann z. B. stehen die höchste Strafe des Vaterlandsverrates. —

Da wir hier nicht eine Ethik zu schreiben vorhaben, so mag es bei diesen Andeutungen sein Bewenden haben, die sicherlich für den Verständigen genügen, der Freiheit wissenschaftlicher Forschung und Argumentation indess auch wol keinen Eintrag thun.

Auch auf das *Prinzip* II als solches des Aussagenkalkuls haben wir uns wiederholt schon vorgreifend berufen. Dasselbe, nämlich

$$\text{II.} \quad (A \Subset B)(B \Subset C) \Subset (A \Subset C)$$

stellt sich als der erste (und wichtigste) „hypothetische“ Syllogismus dar, und spricht die Berechtigung aus, aus den als simultan gültig vorausgesetzten Prämissen, als da sind der

Untersatz: *Wenn A gilt, so gilt B*,

und der Obersatz: *Wenn B gilt, so gilt C*,

die Konklusion zu ziehen: ergo *Wenn A gilt, so gilt C*.

Mit andern Worten: *Wenn B von A und C von B bedingt wird*,

so wird auch C von A bedingt. Die Folgerung aus der Folgerung aus einer Annahme ist auch eine Folgerung aus dieser Annahme.

Auch auf diesem Anwendungsfelde sind wir berechtigt, das Prinzip als einen „Subsumtionsscbluss" zu bezeichnen. Derselbe erscheint uns als das Prinzip der *Stetigkeit, Kontinuität* im Folgern oder Schliessen.

Wir haben begonnen, die „Prinzipien" des *Klassen*kalkuls im *Aussagen*kalkul zu deuten und wurde in dieser Hinsicht zunächst Pr. I und II erledigt, welche beiden sich als die einzigen Prinzipien des letzteren darstellen, von denen auch schon im ersteren bei dessen mit Worten geführten Überlegungen und Beweisführungen Gebrauch gemacht werden musste.

Bei der aussagenrechnerischen Formulirung des letzteren Prinzipes wurde indess, wie ersichtlich, schon Gebrauch gemacht — und zwar unvermeidlicherweise — von dem Begriff und Zeichen des Aussagenproduktes sowie von denen der Aussagenäquivalenz. Die(se) beiden Begriffe der Gleichheit und des Produktes fanden im Klassenkalkul erst hinter Prinzip II ihre Erklärung, die zugehörigen Zeichen auch erst *nach* diesem ihre Einführung.

Sofern es möglich ist, sie selber ohne Berufung auf das Pr. II zu begründen, müssten sie demnach im Aussagenkalkul dem Pr. II *voran*geschickt werden.

Hieraus wird offenbar, dass wir uns nicht mehr blos auf die Erörterung jener „Prinzipien" (im engeren Sinne) beschränken dürfen, sondern auch Definitionen und Postulate mit in den Bereich der Betrachtung ziehen müssen. Wir werden nicht umbin können, auch auf die *Grundlagen* des Aussagenkalkuls überhaupt wenigstens einen Seitenblick zu werfen.

Wie wir anzunehmen uns berechtigt glauben, war der ganze Klassenkalkul auf ein Minimum von axiomatisch zu fordernden Sätzen zurückgeführt; er wurde nachgewiesen als beruhend auf einem Komplex von „Prinzipien", Definitionen und Postulaten, welche wir einerseits als unerlässliche, nicht weiter reduzirbare oder zu vermindernde, andrerseits als zu seiner Begründung vollkommen hinreichende erkannten.

Von dem Klassenkalkul erschien aber der Aussagenkalkul uns blos als eine spezielle Anwendung. Jedenfalls konnten die Grundlagen des ersteren als ohne weiteres auch für letzteren *gültige* in Anspruch genommen werden.

Ein speziellerer Charakter wird indess dem Aussagenkalkul in der That dadurch aufgeprägt — insoweit er sich wenigstens auf Aussagen

von festem Sinne bezieht*) — dass zu jenen Grundlagen noch eine weitere axiomatisch zu stellende Forderung hinzutritt, die zur Folge hat, dass jedem eine Aussage repräsentirenden Buchstaben oder (zusammengesetzten) Symbole immer nur *eine* der *beiden* Bedeutungen 0 oder 1 zukommt — dergestalt, dass der Aussagenkalkul zusammenfällt mit einem Klassenkalkul, welcher eine neben dem Nichts nur ein einziges Individuum 1 enthaltende Mannigfaltigkeit 1 voraussetzte. Jener adventiven Forderung werden wir (wie sich zu Anfang des § 32 zeigt) am besten die Fassung geben:

$$(A = 1) = A$$

in welcher sie als *das spezifische Prinzip des Aussagenkalkuls* hingestellt werden mag. Und somit wären wir also auch über die formalen Grundlagen des Aussagenkalkuls schon von vornherein im Klaren.

Wir *wissen* bereits, auf welchem Minimum von selbständigen Elementen sein Gebäude ruhend angesehen werden kann, und die erkenntnisstheoretisch so hochwichtige Frage nach möglichster Vereinfachung seiner Grundlagen ist keine dringliche mehr.

Beträchtlich würde gleichwol das Bild dieser Grundlagen sich verschieben, versuchte man es, den Aussagenkalkul *selbständig* aufzubauen.

Obwol es uns rationeller erschien, den Gebiete- oder Klassenkalkul als den allgemeineren ihm vorangehen zu lassen, wäre es dennoch nicht unverdienstlich, ja von hohem Interesse, solch selbständige Begründung des Aussagenkalkuls durchzusprechen. Zu dem Ende würde Herrn Peirce's Arbeit [5] zu revidiren sein unter schärferer Hervorhebung und Numerirung der als unmittelbar einleuchtend geforderten Prinzipien und Postulate. Glauben wir auch — aus angeführten Gründen sowie der noch nicht ganz überwundenen Schwierigkeiten des Unternehmens halber — auf die vollständige Verwirklichung dieses Desideratums hier verzichten zu dürfen, so soll doch die gegenwärtige Vorlesung einiges Material dazu beisteuern.

Die Subsumtion $(\bar{2}_\times)$ $0 \mathrel{\overline{\in}} A$ hingestellt als eine solche, welche für jede Aussage A zu gelten habe, ist wohl geeignet, die Nullaussage zu definiren, und ebenso ist die Subsumtion $(\bar{2}_+)$ $A \mathrel{\overline{\in}} 1$ auch im Aussagenkalkul darnach angethan, die Aussage 1 zu definiren. Die letztere 1 hätte darnach zu gelten, immer dann, wenn eine beliebig zu wählende

*) Und soweit allein erscheint er in unserm Buche sowie in den bisherigen Forschungen ausgebildet.

Aussage A gilt, das heisst aber: sie hätte *stets* zu gelten — in Anbetracht, dass man für A auch eine stets gültige Aussage (dergleichen es ja gibt*)) wählen kann. Sobald ferner die Aussage 0 gilt, muss jede beliebige Aussage A gelten; da es aber auch stets ungültige Aussagen A gibt*), so kann die Gültigkeitsklasse der Nullaussage nur die leere sein. Es war demnach zunächst die Aussage 1 als das Symbol jeder unbedingt gültigen und die Aussage 0 als der Repräsentant jeder unbedingt falschen Aussage in Erinnerung zu rufen.

Was die Def. $(\bar{1})$ der Aussagenäquivalenz betrifft, so wurde in § 29 gezeigt, wie der scheinbare circulus in definiendo, nämlich der Gebrauch einer Äquivalenterklärung bei:

$$(A = B) = (A \Subset B)(B \Subset A)$$

sich vermeiden lässt.

Dagegen setzte diese Erklärung das Verstehen eines Aussagen*produktes* bereits voraus, dessen Definition derjenigen der Gleichheit hier vorangestellt sein müsste — wie denn überhaupt die Reihenfolge in der die Grundlagen vorzutragen wären, und zufolge dessen zum Teil auch die Anordnung der Beweise im reinen, selbständig errichteten Aussagenkalkul sich zu Anfang als eine andre aufdrängt, als wie sie im Klassenkalkul gegeben worden.

Durch die Def. $(\bar{3}_\times)$ $(C \Subset AB) = (C \Subset A)(C \Subset B)$ in dieser ursprünglichen oder in irgend einer der dieser äquivalenten Formen kann aber das Aussagenprodukt AB nicht ohne circulus definirt werden, weil rechterhand, behufs der Erklärung, selbst zu einem Aussagenprodukt gegriffen wird — ganz abgesehen davon, dass auch (entgegen dem vorhin Bemerkten) die Erklärung der Aussagenäquivalenz wieder ihrerseits vorausgegangen sein müsste. Ohne dass man zwei Annahmen (von Merkmalen) als gleichzeitig vorauszusetzende hinzustellen vermöchte, lässt sich überhaupt nichts definiren**) Das Aussagenprodukt AB muss wohl oder übel direkt, vermittelst seiner Interpretation, definirt werden als die Aussage, welche ausspricht, dass die Aussage A und die B gleichzeitig gelten; und die Gleichzeitigkeit scheint zu den Kategorieen oder Urbegriffen zu gehören.

Was wir im Gebietekalkul unter $(3_\times)$ als eine *Definition* hinstellen

*) Es ist damit auf gewisse Postulate des Aussagenkalkuls hingewiesen, deren Analoga im Klassenkalkul ausführlicher in § 7 besprochen sind.

**) Wenigstens müsste hier die Gleichzeitigkeit *der beiden speziellen* Annahmen $C \Subset A$ und $C \Subset B$ postulirt werden, um diejenige *irgend zweier* Annahmen oder Aussagen A und B zu definiren.

konnten, wird darnach jetzt, im reinen Aussagenkalkul, entweder als ein Theorem oder aber als ein Prinzip auftreten.

Ich bin übrigens wirklich im Zweifel, ob sich in solchem Grenzfalle die Unterscheidung zwischen diesen Begriffen (von Definition, Axiom resp. Prinzip und Theorem) noch strenge würde durchführen lassen. Man vergleiche, was in § 51 in Bezug auf Herrn Dedekind's von ihm so genannten *„Beweis“ des Prinzips* II gesagt ist. Man wird erkennen, dass es bei der Frage wesentlich auf die Art ankommt, wie man den Begriff des „Beweises“ erfasst, denn nur durch das Vorhandensein oder die Möglichkeit eines solchen soll sich das „Theorem“ vor dem „Axiom“ auszeichnen.

Verlangt man nun von dem „Beweise“ — denselben wol in dem gebräuchlichsten Sinne (sonach etwas weiter) fassend — nur die Herbeiführung der subjektiven Überzeugung, dass die zu beweisende Behauptung mit den Definitionen (und den eventuell ausserdem noch zuvor statuirten Axiomen) in objektiver Denknotwendigkeit gegeben sei, so muss man in unsrer gegenwärtigen Disziplin alles als „bewiesen“ gelten lassen, sobald es nur auf Grund gegebener Definitionen einleuchtet — und zwar einerlei, auf welchem Wege dieses Gefühl der Evidenz zustande kommt — auch dann insbesondere, wenn es sich unmittelbar aufdrängt. Wirkliche Axiome, wie in Geometrie und Physik, sind hier ja gar nicht vorhanden, und Alles ist mit den Definitionen nebst gewissen (das Zugeständniss der Wirklichkeit des Definirten fordernden) Postulaten schon denknotwendig gegeben — auch Dasjenige, was wir hier (zur Unterscheidung von jenen eigentlichen Axiomen) als „Prinzip“ hinstellen.

Die Wissenschaft fasst den Begriff des „Beweises“ schon enger als das gemeine Leben, und zwar bei ihrem Fortschreiten ganz merklich immer enger und enger; vor allem sind die Mathematiker auch *wählerisch in den Mitteln der Erkenntniss* geworden; noch mehr müss(t)en die Philosophen es sein.

So lässt denn die Geometrie z. B. bei ihren Beweisführungen nur mehr die logische Evidenz gelten; und schliesst die geometrische, welche auf der uns zur zweiten Natur gewordenen Raumanschauung beruht, in ihren höheren Teilen wenigstens, gewissenhaft aus.

Die Arithmetik ist nunmehr völlig von der Anschauung oder Voraussetzung vergleichbarer und messbarer Grössen frei geworden und auf rein logische Grundlagen gestellt; sie hat sich besonders dank den Arbeiten von H. Grassmann, G. Cantor, Weierstrass und Dedekind zu einem Zweige der reinen Logik entwickelt.

Am engsten, sind wir genötigt, den Begriff des „Beweises“ in der Logik selbst zu fassen: die Arten, auf welche das Gefühl der Evidenz zustande kommen kann, sollen hier zum Bewusstsein gebracht, schematisirt, klassifizirt und rubrizirt werden. *„Prinzipien“* nannten wir solche Sätze oder auch Schlussweisen, welche nicht auf früher registrirte nach ebensolchen zurückgeführt wurden und nebenbei gesagt sich auf noch einfachere Sätze überhaupt nicht reduziren zu lassen scheinen. *„Theoreme“* nannten wir die Sätze, bei welchen solche Zurückführung — der sog. *„Beweis“* — gelang, und zwar lediglich unter bewusster Anwendung der registrirten

Definitionen und Prinzipien (sei es unmittelbar, sei es mittelbar unter Zuzug von noch andern, indess schon ebenso bewiesenen Sätzen).

Wesentlich wird es darnach auf die Reihenfolge ankommen, in welcher die Sätze untergebracht werden: je nachdem man sich für die eine oder andere Ordnung entscheidet kann ein und derselbe Satz als Theorem oder als Prinzip zu gelten haben. Die Reihenfolge ist naturgemäss eingeschränkt durch die Anforderung, dass Begriffe und ihre Zeichen nicht angewendet werden dürfen bevor sie, sei es definitionsweise, sei es als Urbegriffe, eingeführt worden sind.

Hierbei ist es nun aber noch fraglich, ob es möglich sein wird, auch die ersten *Grundlagen* unsrer Erkenntniss *im Aussagenkalkul* in eine Kette von logisch in bestimmter Weise sich auseinander entwickelnden Sätzen aufzulösen, ob nicht vielmehr bei dem Versuche einer solchen Entwickelung gewisse Zirkel unvermeidlich bleiben und die letzten Grundlagen sich uns darstellen werden als ein *gegebenes* Flechtwerk oder Netz von miteinander konsistenten Begriffen und Grundsätzen, bei dem man zwar von Knoten zu Knoten die kreuz und die quere entlang zu wandern vermag, ohne jedoch das Ganze in eine einfache Perlenschnur je auflösen zu können.

Glücklicherweise jedoch liegt in Gestalt des als Klassenkalkul errichteten identischen Kalkuls das gedachte Flechtwerk dermalen wenigstens schon fertig vor unsern Augen.

Nehmen wir nach dem Gesagten nun das gleichzeitige Adoptiren von (zwei) Voraussetzungen, imgleichen wie das Statuiren von (zwei) Behauptungen als simultan geltender, in Anspruch als eine logische Kategorie nach Art der Urbegriffe, so konnte auch die Aussagengleichheit, wie in § 29 erläutert, definirt werden und wir verfügen nächst dem Begriffe der Aussagensubsumtion, dem Prinzip $\overline{\text{I}}$ und dem Begriff der 0 und 1 als der falschen und der wahren Aussage auch über den Begriff der Äquivalenz, nach welchem, wie gezeigt, das Prinzip $\overline{\text{II}}$ angereiht werden konnte.

Auf Grund der Erklärung des Aussagenproduktes erscheinen jetzt auch die Formeln $AB \subseteq A$ und $AB \subseteq B$ des Theorems $\overline{6}_\times$) als reiner Ausfluss des Prinzips $\overline{\text{I}}$: wenn A und B zugleich gelten, so gilt A.

Ebenso die beiden Subsumtionen:

$(C \subseteq AB) \subseteq (C \subseteq A)(C \subseteq B)$ und $(C \subseteq A)(C \subseteq B) \subseteq (C \subseteq AB)$

welche sich zu unsrer frühern Def. ($\overline{3}_\times$) zusammensetzten: Wenn AB (d. h. eben A nebst B) gilt, wann C gilt, so gilt auch A wann C gilt, und zugleich gilt B wann C gilt, sowie umgekehrt.

Was die Aussagen*summe* $A + B$ betrifft, so hat man, scheint mir, die Wahl, ob man sie mittelst der für *jede* Aussage C in Anspruch zu nehmenden beiden Subsumtionen ($\overline{3}_+$):

$(A \subseteq C)(B \subseteq C) \subseteq (A + B \subseteq C)$, $(A + B \subseteq C) \subseteq (A \subseteq C)(B \subseteq C)$

als definirt erachten will um dann zu postuliren die Interpretation dieses $A + B$ als derjenigen Aussage welche die Geltung von A *oder* (von) B statuirt, oder ob man umgekehrt diese letztere Deutung von $A + B$ hinstellen will als die Begriffserklärung unsrer Aussagensumme und dann die Geltung der Subsumtionen $(\overline{3}_+)$ als unmittelbar einleuchtende postuliren:

Wenn C gilt wann A oder B gilt, so muss auch C gelten wann A gilt, zugleich muss C gelten wann B gilt, sowie umgekehrt.

Im letzteren Falle würde die Konzeption einer Alternative (von Annahmen, resp. Behauptungen) zu einem logischen Urbegriffe gestempelt. — Von dem auf solche Grundlagen zu stellenden Gebäude von Sätzen will ich nur weniges einzeln hervorheben.

Durch die Theoreme $\overline{12}$) und $\overline{13}$) wird dargethan, dass bei simultanen sowol als bei alternativen Aussagen die Reihenfolge und Gruppirung derselben gleichgültig ist (für ihren logischen Gehalt, ihre Tragweite). Insbesondere gilt dies auch für solche Aussagen, welche als Prämissen von Konklusionen zu figuriren haben.

Praktisch unterliegt freilich die Anwendung dieses Satzes gewissen Einschränkungen, indem gewisse Aussagen, um verständlich zu werden, es erfordern können, dass gewisse andere ihnen vorausgeschickt seien.

Der Beweis beim Kommutationsgesetze $\overline{12}_\times$) z. B. scheint auf den ersten Blick auf eine „*Petitio principii*“ einen *Zirkelbeweis* hinauszulaufen, bei welchem von dem Satze den man beweisen will, bereits unterwegs Gebrauch gemacht wird. Aus $AB \Subset A$ und $AB \Subset B$ gemäss Th. $\overline{6}_\times$) *schliesst man* ja, *dass* $AB \Subset B$ *und* $AB \Subset A$, darnach kraft $(\overline{3}_\times)$: $AB \Subset BA$ sei (desgleichen umgekehrt). Man gestattet sich demnach augenscheinlich, auf jene zu Prämissen erhobenen beiden Subsumtionen in der umgekehrten Ordnung als in welcher sie zuerst sich darboten, sich zu berufen.

Die Erlaubniss dazu ist in der That aber *durch das Prinzip* $\overline{I}$ schon *garantirt*, kraft dessen die als wahr zugegebene zweite Subsumtion auch wieder anerkannt werden muss, wenn man sie — etwa als erste — zu wiederholen beliebt.

Auf die im § 10 dargelegte Weise erst zu beweisen, dass Reihenfolge und Gruppirung der Prämissen in unser Belieben gestellt ist, erscheint dann freilich als ein Luxus, indem solches schon unmittelbar aus Prinzip $\overline{I}$ hervorgeht.

Gilt z. B. ABC, so gilt auch AB nebst C, sowie A nebst BC desgleichen gilt dann CBA. Denn muss jede einzelne Prämisse im Falle des Wiederholtwerdens bei jeder Gelegenheit anerkannt werden,

so auch jede Gruppe von Prämissen, diese in was immer für einer Anordnung genommen — sintemal eben das Auftreten einer Prämisse in solcher Gruppe resp. in der neuen Anordnung, doch nur eine der Gelegenheiten bildet, bei denen sie anzuerkennen ist.

Von grosser Wichtigkeit und häufigster Anwendung im Aussagenkalkul ist noch das Th. $\overline{21}_\times$):

$$A \cdot 1 = A,$$

nach welchem eine (selbstverständlich) wahre Aussage nach Belieben einer Prämisse zugefügt, oder auch bei solchen unterdrückt werden darf. Z. B. Wenn A gilt, so gilt A und ist zugleich $2 \times 2 = 4$, sowie umgekehrt: wenn A gilt und $2 \times 2 = 4$ ist, so gilt A.

Das Prinzip $\mathrm{III}_\times$ kann im Aussagenkalkul zunächst durch ein einfacheres Prinzip vertreten werden — einfacher, weil es nur auf zwei (statt drei) allgemeine Aussagen bezüglich, nämlich durch dieses:

Prinzip $^*\overline{\mathrm{III}}$. $(A + B = 1) = (A = 1) + (B = 1)$,

d. h. *Gilt A oder B, so muss entweder A gelten, oder auch es muss B gelten, und umgekehrt: Wenn A gilt oder B gilt, so gilt A oder B.*

Auf Grund des letzteren schon wird sich nämlich die zweite Subsumtion des Distributionsgesetzes $26_\times$) und damit dieses selbst (das *volle* Distributionsgesetz) *beweisen* lassen, und zwar wie folgt. Wir wählen für den zu beweisenden Satz die Fassung:

$\overline{26}_\times$) $$(A + B)\, C \Subset AC + BC.$$

d. h. Gilt A oder B, und ausserdem C, so gilt A nebst C oder B nebst C.

Denn nach der Voraussetzung — im Hinblick, wenn man will auf Th. $\overline{6}_\times$) als $(A + B)\, C \Subset A + B$ — gilt dann A oder B, wofür nach Pr. $\overline{\mathrm{III}}$ gesagt werden darf: es gilt A, oder es gilt B. Da nun nach Pr. I die Voraussetzung C bei beliebiger Gelegenheit wiederholt werden darf mit dem Anspruche, alsdann auch anerkannt zu werden, so können wir für letzteres auch sagen: es gilt A und zugleich (gilt) C, *oder* es gilt B und zugleich C, d. h. aber: es gilt AC, oder es gilt BC, was wiederum nach Pr. $\overline{\mathrm{III}}$ zusammenziehbar ist in: es gilt AC oder BC, es gilt $AC + BC$, q. e. d.

Dass der obige Satz $\overline{\mathrm{III}}$ im Gebietekalkul *nicht* gilt, wurde schon in § 12 hervorgehoben, ist auch zudem leicht durch das nächste beste Beispiel zu belegen (zum Exempel bei beliebigem von 1 verschiedenem A durch die Annahme $B = A_1$).

Da der Satz als ein auf *Gebiete* A und B bezüglicher gleichwol

einen Sinn hätte, obzwar er dann ungültig wäre, so ist der Gefahr vorzubeugen, dass man ihn irrtümlich schon auf Gebiete anwende. Davor zu warnen ist der oben seiner Chiffre vorgesetzte *Stern* * bestimmt.

Mit einem solchen wollen wir ähnlich alle Formeln auszeichnen, denen nur die *„engere Geltung“* als solchen des Aussagenkalkuls *nicht* aber die *„weitere“* auch im Gebietekalkul zukommt.

Nur da, wo letzteres ohnehin aus der Formel ersichtlich ist, mag die Beisetzung des Sterns unterbleiben. Jenes spezifische Prinzip des Aussagenkalkuls: $(A = 1) = A$ zum Beispiel kann unmöglich für eine Formel der Gebieterechnung gehalten werden weil dann rechts in der Gleichung ein Gebiet stehen würde, während links eine Aussage figurirt (auch dann, wenn A als Gebiet interpretirt wird), und die Gleichsetzung solcher Aussage mit einer Kreisfläche A keinen Sinn oder keine Berechtigung haben könnte. Vgl. hiezu noch § 45.

Nunmehr bleibt uns noch die *Negation einer Aussage* zu erörtern mitnebst den auf sie bezüglichen Grundsätzen der Logik.

Betrachten wir die Aussage A selbst als ein Objekt des Denkens, welches einer „gewöhnlichen“ Mannigfaltigkeit von denkmöglichen Objekten angehört, so müsste unter A_1 verstanden werden: Alles (aus der erwähnten Mannigfaltigkeit), was *nicht* eben diese Aussage A *ist* — in Anbetracht, dass ja für jedes Objekt des Denkens bereits der Begriff seiner Negation in § 13 aufgestellt worden ist.

Hierbei aber hätten wir die Aussage ohne Rücksicht auf ihren Sinn oder Gehalt als einen blossen Schall, oder Wortgefüge in Betracht gezogen, wir wären demnach auch nur dahin gelangt, die *Negation der Aussage A in der suppositio nominalis* zu bilden — vgl. Bd. 1, S. 44.

Analog würde als Negation von „Pferd“ in letzterer Unterstellung zu bezeichnen sein: alles was nicht das Wort „Pferd“ ist, wogegen wir aber als Negation des Pferdes vielmehr in der suppositio realis anzusehen hatten: alles, was nicht ein Pferd ist.

Gleichwie nun aber die suppositio nominalis bei unsern Operationen mit Klassen und Begriffen auszuschliessen war, so wird sie auch stets *auszuschliessen* sein bei unsern auf Aussagen bezüglichen Konventionen und Betrachtungen. Aussagen ziehen wir nach ihrer *Geltung* in Betracht in Hinsicht dessen, was sie besagen. Es kommt uns darauf an, den Begriff der *Negation in der suppositio realis* aufzustellen als einer *Aussagenverneinung* in der üblichen landläufigen Bedeutung, und diese wird als „Negation von A“ schlechtweg bezeichnet werden, von dieser allein soll hier die Rede sein. Zu dem Ende müssen wir uns die im § 29 dem Aussagenkalkul gegebene Basis vergegenwärtigen.

Im Aussagenkalkul bedeutete uns 1 die Mannigfaltigkeit aller Gelegenheiten resp. Zeitpunkte, wo eine Aussage gemacht wird oder gemacht werden könnte. War A eine Aussage jeweils bestimmten (wenn auch nicht notwendig gerade unveränderlichen, konstanten) Sinnes, so sollte beim Rechnen unter A vorgestellt werden die Klasse der Gelegenheiten resp. Zeitpunkte, wo die Aussage A wahr ist, sonach als eine logisch wohlangebrachte, berechtigte gefällt werden kann.

Unter der *Negation von* A, in Zeichen: A_1, ist demnach zu verstehen die Klasse der übrigen Gelegenheiten resp. Zeitpunkte nämlich derer, in welchen die Aussage A nicht wahr, unberechtigt ist. Man kann aber dieses Symbol A_1 selbst wieder als eine Aussage interpretiren: als *diejenige Aussage* nämlich, *welche die Ungültigkeit der Aussage A behauptet.* Die Behauptung A_1, $=$ „*die Aussage A ist falsch*", wird gerade bei denjenigen Gelegenheiten wahr und berechtigt sein, und nur bei solchen, bei welchen eben die Aussage A nicht wahr und unberechtigt ist (wofern sie, wie hinfort vorauszusetzen, Sinn hat).

Ist die Aussage A als Proposition in unsrer Zeichensprache, als Subsumtion oder Gleichung eine spezifizirte, z. B. ist

$$A = (a \mathrel{\underline{\in}} b) \quad \text{resp.} \quad A = (a = b),$$

so kann ihre Negation auch ausgedrückt werden durch Anhängung des Negationsstrichs an ihren spezifizirten Ausdruck, d. h. es bedeutet:

$$(a \mathrel{\underline{\in}} b)_1 = A_1 \quad \text{resp.} \quad (a = b)_1 = A_1.$$

Für diese, wie wir sehen werden, im Kalkul häufig vorkommenden Formen von Propositionen führen wir aber noch eine kürzere Darstellungsweise ein, und zwar dadurch, dass wir die Kopula, das Beziehungszeichen der zu verneinenden Aussage mit einem Negationsstrich vertikal durchsetzen. Wir *definiren* also:

$$(a \mathrel{\not\underline{\in}} b) = (a \mathrel{\underline{\in}} b)_1, \qquad (a \neq b) = (a = b)_1$$

was man lesen mag: *a nicht-eingeordnet b*, resp. *a ungleich b*; es mag $\not\underline{\in}$ das *Zeichen der Nichteinordnung*, $\neq$ das *Ungleichheitszeichen* genannt werden, die erstere Proposition selbst eine *negirte Subsumtion*, die letztere eine *Ungleichung*.

Das erstere von diesen Urteilen ist eine wirkliche „*Urteilsverneinung*" und sonach ein „verneinendes Urteil" im Sinne Sigwart's keineswegs aber im Sinne der (mit Recht) noch herrschenden Terminologie und des Sprachgebrauches: im allgemeinen darf dasselbe durchaus nicht mit „a ist nicht b" und niemals mit „alle a sind nicht b" in Worte übersetzt werden — vgl. unsere Ausführungen in § 15 sowie am Schlusse des § 35.

Es besteht vielmehr ein Vorzug unsrer Zeichensprache darin, dass wir die Negation einer Subsumtion durch eine Proposition nun auszudrücken

vermögen, in welcher Subjekt und Prädikat von jener selbst wieder als Beziehungsglieder auftreten — denen man die gleiche Benennung als *„Subjekt“* und *„Prädikat“* auch in der Nichteinordnung belassen mag — wogegen der *Wortsprache* eine einfache Ausdrucksmöglichkeit von ähnlichem Charakter nicht zur Verfügung steht (§ 15 und § 35 Schluss).

Von fundamentaler Bedeutung auch für den Aussagenkalkul sind nun die drei Sätze, als da sind:

Der Satz des Widerspruchs:

$\overline{30_\times})$ $$AA_1 = 0,$$

welcher statuirt, *dass eine Aussage A* von bestimmtem Sinne *bei keiner Gelegenheit* und zu keiner Zeit *wahr und zugleich* auch *nicht wahr sein könne.*

Der *Satz des ausgeschlossenen Dritten:*

$\overline{30_+})$ $$A + A_1 = 1$$

statuirend, dass *immer eine Aussage A entweder wahr oder falsch sein müsse,* dass es eine *dritte Möglichkeit nicht gebe.*

Endlich der *Satz der doppelten Verneinung:*

$\overline{31})$ $(A_1)_1 = A$ zerfallend in die beiden Subsumtionen:

$$A \preceq (A_1)_1 \quad \text{und} \quad (A_1)_1 \preceq A,$$

demzufolge, *wenn A gilt, dann die Verneinung von A falsch sein muss, und umgekehrt, wenn die Verneinung von A nicht gilt, dann A gelten muss.*

Der Leser wird gut thun, sich auch noch einige weitere der im § 29 zusammengestellten Sätze, wie namentlich die Theoreme 36), auch als solche des Aussagenkalkuls auszusprechen und zum Bewusstsein zu bringen.

Eine Bemerkung fordert noch das Th.

37): $$(A \preceq B) = (B_1 \preceq A_1)$$

heraus, welches auch hypothetische Urteile durch *„Kontraposition* konvertiren“ lehrt.

Statt *„Wenn A gilt, so gilt B“* kann darnach auch gesagt werden: *„Wenn B nicht gilt, so gilt auch A nicht“* — und umgekehrt.

Indem man A und A_1 oder B und B_1 in obiger Formel vertauscht, kann man auch als ihren Ausdruck nehmen:

$$(A_1 \preceq B) = (B_1 \preceq A), \quad \text{resp.} \quad (A \preceq B_1) = (B \preceq A_1)$$

d. h. *Gilt B wann A nicht gilt, so gilt auch A, wann B nicht gilt,* desgl. *Gilt B nicht, wann A gilt, so gilt auch A nicht, wann B gilt,* und vice versā.

Es ist darauf aufmerksam zu machen, dass aus allen drei Fassungen eine *paradox klingende* Formulirung hypothetischer Urteile hervorgehen kann, aus der zweiten z. B. dann, wenn es nicht vorkommt, unmöglich oder undenkbar ist, dass B nicht gelte.

Wir haben dann für das Urteil: Wann A nicht gilt, so gilt B (denn es gilt laut Voraussetzung ohnehin, gilt selbstverständlich, in allen Fällen) als gleichberechtigt auch die Fassung, in der es unter Umständen sich von vornherein dargeboten haben mochte: Wenn B nicht gilt (was aber nicht vorkommen kann, undenkbar bleibt), so gilt A.

Zu beachten ist also: dass mit einem Konditionalsatz, der eine nicht realisirbare, eventuell absurde Bedingung zum Vordersatze hat, doch gültige Urteile in unsrer Disziplin abgegeben zu werden vermögen, deren wahrer Gehalt bei ihrer Konversion zutage tritt — und werden ungesuchte Beispiele dazu sich unter anderm in § 47 darbieten.

Nach Th. $\overline{38}_\times$) lassen übrigens die einander gleichwertigen Urteile:

$$A ⋹ B_1 \quad \text{und} \quad B ⋹ A_1$$

auch einen Ausdruck zu, bei welchem ihre Symmetrie bezüglich A und B ersichtlich ist, nämlich den folgenden:

$$AB = 0._1$$

Es konstatirt dieses mit jedem der beiden vorigen äquivalente Urteil, dass die Aussagen A und B nicht gleichzeitig gelten, nie, bei keiner Gelegenheit zusammen bestehen können, dass sie miteinander *unverträglich*, *inkompatibel*, *inkonsistent* sind.

Stellen überhaupt $A, B, C, \ldots$ Aussagen vor, so kann man (mit Miss Ladd [1] p. 29), sobald eine Gleichung der Form:

$$ABC \cdots = 0$$

besteht, die linke Seite derselben eine „*Inkonsistenz*" (inconsistency) nennen. *Inkonsistenz* nennen wir also ein Produkt von Aussagen, sobald dasselbe verschwindet — oder auch, in übertragenem Sinne: den Ausspruch, dass dasselbe verschwinde.

Haben wir eine Inkonsistenz:

$$AB = 0$$

so können wir nach erwähntem Theoreme jeden Augenblick dafür schreiben:

$$A ⋹ B_1 \quad \text{oder, nach Belieben:} \quad B ⋹ A_1.$$

In der That folgt, falls A und B nie zugleich wahr sind, dass wenn A gilt, B nicht gelte, und wenn B gilt, A nicht gelten muss.



Ebenso ist die Gleichung

$$ABC = 0$$

äquivalent einer jeden der drei Subsumtionen:

$$AB ⋹ C_1, \qquad AC ⋹ B_1, \qquad BC ⋹ A_1,$$

d. h. können die Behauptungen A, B und C nicht zusammen richtig sein, schliessen sie selbdritt einander aus, so muss, wenn A zugleich mit B gilt, C ungültig sein, desgleichen mit vertauschten Buchstaben. Etc. —

Und ferner würde folgen: $C ⋹ (AB)_1$, somit nach Th. $\overline{36}_\times$):

$$C ⋹ A_1 + B_1, \quad \text{analog} \quad B ⋹ A_1 + C_1, \quad A ⋹ B_1 + C_1,$$

und vice versâ, d. h. wenn A gilt, so muss entweder B oder C (oder auch B nebst C) ungültig sein. Etc.

Als eine Inkonsistenz, und damit nach Belieben auch als eine Subsumtion, lässt jederzeit auch das *„disjunktive"* Urteil sich darstellen.

Es kann von Urteilen dieser Art als von *zweigliedrigen* oder auch von *mehrgliedrigen* gesprochen werden, und fassen wir zunächst den einfachsten Fall in's Auge.

„Disjunktives Urteil im weiteren Sinne" — besser vielleicht, mit einem Worte, *„alternatives* Urteil" — nennen wir eine Aussage von der Form:

$$A + B = 1$$

mithin besagend — vgl. S. 57, Pr. $\overline{\text{III}}$, welches nach § 32, ε) reine Identität wird —: *Entweder gilt A, oder es gilt B.* Kürzer: *Es gilt A oder B.*

Im Sinne unsrer Addition ist der Fall, wo A und B zugleich gelten, damit nicht ausgeschlossen.

Nach bekannten Sätzen ist nun dies Urteil äquivalent der Inkonsistenz:

$$A_1 B_1 = 0,$$

d. h. es kommt nicht vor, dass weder A noch B gelte — und damit, gemäss dem obigen Schema, ist es auch äquivalent einer jeden der beiden Subsumtionen:

$$A_1 ⋹ B \quad \text{und} \quad B_1 ⋹ A,$$

d. h. wenn A nicht gilt, so muss B gelten; und: sooft B nicht gilt, muss A gelten.

Dies bleibt auch bestehen, falls etwa obendrein noch

$$AB = 0$$

sein sollte, in welchem Falle nach Th. 33_+) unser Urteil die Form annimmt:

$$AB_1 + A_1B = 1,$$

d. h. Entweder gilt A und dann nicht B, oder es gilt B und dann nicht A, m. a. W. es gilt A *oder aber* B. Diese Form ist es wol, die mit der traditionellen Logik als *„disjunktives Urteil im engeren Sinne“* hinzustellen wäre.

Unsre „alternativen“ Urteile umfassen also mit die „disjunktiven“, und für beide ist vorstehend gezeigt, dass sie in die Form einer Subsumtion gesetzt werden können — so wenigstens, falls sie, wie vorstehend zweigliedrig sind.

Dreigliedrig hätten wir als alternatives Urteil:

$$A + B + C = 1$$

und als disjunktives (im engeren Sinne):

$$AB_1C_1 + A_1BC_1 + A_1B_1C = 1.$$

Da aber eine mehrgliedrige Summe sich jederzeit als eine zweigliedrige ansehen lässt, so unterliegt die Ausdehnung der Betrachtungen auf beliebig vielgliedrige Urteile nicht der geringsten Schwierigkeit.

In § 15 wurde vom disjunktiven Urteil $A + B$ vorausgesetzt, dass A und B verbale Urteile, Aussagen in der Wortsprache seien, mithin als Subsumtionen zwischen Klassen sich darstellen. Von diesen wurde dort indessen nur der Sonderfall $A = (a \subseteq b)$, $B = (a \subseteq c)$ in's Auge gefasst, wo gedachte Subsumtionen sich auf das nämliche Subjekt a beziehen — und zwar behufs Lieferung des Nachweises, dass das eigentlich disjunktive Urteil „Entweder alle a sind b, oder alle a sind c“ von dem blos „disjunktiv“ prädizirenden „alle a sind entweder b oder c“ im allgemeinen zu unterscheiden ist. —

Über die Grundlagen des Aussagenkalkuls werden auch die nachfolgenden Betrachtungen noch einiges Licht verbreiten.

§ 32. Vom Gewicht der Aussagen. Direkte Verifikation der Sätze des Aussagenkalkuls durch diesen.

Es bedeute A eine Aussage die — in der Weise, wie wir dies in § 28 erläutert haben — einen vollkommen bestimmten Sinn hat, und zwar sei dieser Sinn konstant, er werde als solcher, sooft wir von A sprechen, jederzeit festgehalten.

Die Proposition $A = 1$ sagt alsdann aus: die Aussage A gilt *stets*, zu jeder Zeit, bei jeder Gelegenheit, wogegen die Proposition $A = 0$ aussagt: die Aussage A gilt *nie*, zu keiner Zeit, bei keiner Gelegenheit.

Beides zugleich kann nicht der Fall sein, d. h. wir haben die Inkonsistenz:

$$\alpha) \qquad (A = \mathrm{i})\,(A = 0) = 0.$$

Obwol an sich schon evident, kann dies auch nach den Prinzipien des identischen Kalkuls *bewiesen* werden, wofern man nur als Axiom gelten lässt, dass:

$$\beta) \qquad 0 \neq \mathrm{i},$$

d. h. dass „allezeit“ von „nie“ verschieden ist. [Hierüber hinaus kann wol nicht gegangen werden, denn es hiesse das ja verlangen, dass die Existenz der Zeit (oder auch von Gelegenheiten) a priori bewiesen werde!]

Beweis. Nach dem Axiom haben wir:

$$(0 \neq \mathrm{i}) = (0 = \mathrm{i})_1 = \mathrm{i}$$

und hieraus folgt durch beiderseitiges Negiren gemäss Th. $\overline{32}$):

$$(0 = \mathrm{i}) = 0.$$

Nach Th. $\overline{4}$) haben wir aber:

$$(A = \mathrm{i})\,(A = 0) = (0 = A)\,(A = \mathrm{i}) \subseteq (0 = \mathrm{i}),$$

sonach: $$(A = \mathrm{i})\,(A = 0) \subseteq 0$$

und also auch $= 0$ nach Th. $\overline{5}_\times$), q. e. d.

Nach den Bemerkungen am Schlusse des vorigen Paragraphen kann die Inkonsistenz α) auch ohne weiteres umgeschrieben werden zu:

$$\gamma) \qquad (A = \mathrm{i}) \subseteq (A \neq 0) \quad \text{und} \quad (A = 0) \subseteq (A \neq \mathrm{i}),$$

d. h. gilt A stets, so ist zu verneinen, dass es nie gelte, gilt es nie, so ist zu verneinen dass es stets gelte.

Wir wollen nun zusehen, wie die vorausgesetzte Konstanz des Sinnes der Aussage A in Formeln sich ausprägt. Es kann diese Voraussetzung auf verschiedene Weisen formulirt werden, die sich auf einander zurückführen lassen.

Es wurde schon hervorgehoben, dass wenn die Aussage A wahr ist, sie bei Unveränderlichkeit ihres Sinnes *allezeit* wahr sein muss, dann also $A = \mathrm{i}$ sein muss, wogegen, wenn sie falsch ist, sie dann *niemals* wahr sein somit $A = 0$ sein wird.

Diese beiden (einander, wie gezeigt, ausschliessenden) Fälle machen aber zusammen das ganze Bereich der Möglichkeiten aus, d. h. es prägt sich die gedachte Voraussetzung darin aus, dass gelten wird:

$$*\delta) \qquad (A = \mathrm{i}) + (A = 0) = \mathrm{i}$$

— eine Gleichung, die im ersterwähnten Falle auf $i + 0 = i$, im letzterwähnten auf $0 + i = i$ hinausläuft.

Bei konstantem Sinne — sagt δ) aus — *ist eine Aussage entweder stets wahr, oder sie ist stets falsch.*

Setzen wir diesen Satz δ) als richtig voraus, so lässt sich nun auch (in gewissem Sinne) *beweisen*, dass allgemein:

$$\varepsilon) \qquad (A = i) = A$$

sein muss, gleichwie umgekehrt aus ε) auch δ) ableitbar ist.

Die Gleichung ε) bringt ebenfalls eine unmittelbar einleuchtende Thatsache zum Ausdruck, die schon erwähnte nämlich: *dass es einerlei* (logisch gleichbedeutend) *ist, ob man eine Behauptung A einfach ausspricht, oder ob man behauptet, diese Behauptung A gelte (stets), sei immer wahr.*

Um ε) aus δ) abzuleiten, kann man erstlich, in Worten argumentirend, sich begnügen, die Gleichung ε) einfach zu verifiziren für die beiden Fälle, welche δ) zulässt.

Entweder nämlich — nach δ) — ist $A = i$. In diesem Falle geht ε) über in, sagt nichts anderes aus, als:

$$(i = i) = i$$

und dies ist richtig, weil die Gleichung $i = i$ *stets* wahr sein muss.

Oder es ist $A = 0$, dann stimmt abermals für ε) die Probe:

$$(0 = i) = 0,$$

indem die Behauptung $0 = i$ *niemals* richtig ist.

Zweitens aber kann man auch mehr rechnend zuwerke gehen wie folgt.

Ist $A = i$, so — haben wir eben gesehen — bewahrheitet sich ε), d. h. wir haben:

$$(A = i) \Subset \{(A = i) = A\}.$$

Und ebenso, wenn $A = 0$ ist, bewahrheitete sich ε), d. h. wir haben:

$$(A = 0) \Subset \{(A = i) = A\}.$$

Aus diesen beiden Subsumtionen erhalten wir durch überschiebendes Addiren gemäss Th. $\overline{17_+}$) und $\overline{14_+}$) — oder auch direkt nach Def. (3_+) — mit Rücksicht, linkerhand, auf δ):

$$i \Subset \{(A = i) = A\}$$

sonach kraft Th. $\overline{5_+}$): $\{(A = i) = A\} = i$, womit gefunden ist, dass die in geschweifter Klammer $\{\ \}$ links stehende Aussage stets wahr ist, daher wir dieselbe auch einfach — in Gestalt von ε) — hinstellen mögen.

Bei letzterer Bemerkung ist, wie man sieht, von der mit in ε) stecken-

den Subsumtion $(A = 1) \Subset A$ — d. h. wenn die Aussage A *stets* gilt, so *gilt* sie — implicite schon Gebrauch gemacht, sodass der Beweis nicht ganz frei von dem Vorwurfe ist, als ein Zirkelschluss zu erscheinen. Immerhin hat derselbe den Wert, zu zeigen, dass wenn der denknotwendige Übergang von der Behauptung $\{(A = 1) = A\} = 1$ zur Behauptung $(A = 1) = A$ selbst in dem vorstehenden besonderen Falle, gewissermassen *nur ein* mal zugegeben wird, dann der gleiche Übergang von $(A = 1)$ zu A *und umgekehrt* von A zu $A = 1$ auch allgemein zugegeben ist. Wir können uns eben von der allgemeinen Denknotwendigkeit auch im besonderen Falle nicht emanzipiren.

Indessen gibt der hier zutage getretene Umstand einen Beweggrund ab, der Voranstellung des Satzes ε) vor δ) den Vorzug zu geben vor der umgekehrten Anordnung.

Wir denken uns (demnach) jetzt den Satz ε) an die Spitze gestellt.

Gilt derselbe für jede in Betracht kommende Aussage A, so muss nach Th. $\overline{32}$) auch sein:

$$(A = 0) = (A_1 = 1) = A_1$$

und hiernach weiter:

$$(A \neq 0) = (A = 0)_1 = (A_1)_1 = A,$$

endlich direkt:

$$(A \neq 1) = (A = 1)_1 = (A)_1 = A_1.$$

Durch Vergleichung folgt somit:

*ζ) $$(A \neq 0) = (A = 1),$$

und

*η) $$(A \neq 1) = (A = 0),$$

d. h. die Subsumtionen γ) gelten auch umgekehrt, sie gelten als Gleichungen. Sobald eine Aussage nicht niemals wahr ist, muss sie stets wahr sein und vice versā, d. h. auch sobald sie nicht stets wahr ist, kann niemals dieselbe wahr sein.

Im Kalkul mit Aussagen konstanten Sinnes ist jede Ungleichung mit der rechten Seite 0 *äquivalent einer Gleichung mit der rechten Seite* 1, *und kann ebenso eine Ungleichung mit der rechten Seite* 1 *umgeschrieben werden in eine Gleichung mit der rechten Seite* 0.

Es sei in Erinnerung gebracht, dass für Aussagen von veränderlichem Inhalte obzwar konstantem Wortlaute, z. B. für die „Gelegenheitsaussagen", deren Sinn mit der Gelegenheit variirt, bei welcher sie angebracht werden (§ 28), obiges nicht gilt.

Nehmen wir z. B. für A die Aussage: Das Dreieck ABΓ ist rechtwinklig, so ist

$$A \neq 0,$$

weil es rechtwinklige Dreiecke gibt, die Aussage also in gewissen Fällen — nämlich sooft man sie anwendet auf ein wirklich rechtwinkliges Dreieck ABΓ — wahr sein wird, und doch ist auch

$$A \neq 1,$$

weil es auch nicht-rechtwinklige Dreiecke gibt, die unter ABΓ verstanden werden können.

Für dergleichen Aussagen kann dann also auch das Th. ε) mit allen denen, die dasselbe mit bedingen und wenigstens einem Teil von den Sätzen, die es nach sich zieht, *nicht* zutreffen.

Ebenso gelten die Formeln ζ), η) selbstverständlich *nicht*, wenn A ein *beliebiges Gebiet* vorstellen sollte.

Man ersieht hieraus von neuem, dass während die Formeln des Gebietekalkuls sich ohne weiteres in solche des Aussagenkalkuls umdeuten liessen, das Umgekehrte nicht der Fall ist, dass es vielmehr Formeln des Aussagenkalkuls gibt, die im Gebietekalkul nicht allgemein zutreffen. *Der Gebietekalkul ist allgemeiner, umfassender als der Aussagenkalkul,* schliesst letzteren als einen wirklich nur *besonderen* (partikularen) Fall in sich.

Da nun nach Th. $\overline{30}_+$) zum Beispiel sein muss:

$$(A = 0) + (A = 0)_1 = 1, \quad \text{oder also:} \quad (A = 0) + (A \neq 0) = 1,$$

so ergibt sich hieraus durch Einsetzung der dem zweiten Term linkerhand nach ζ) äquivalenten Aussage sogleich: $(A = 0) + (A = 1) = 1$, d. h. *es ist* auch *das Th.* δ) *aus* ε) *bewiesen.*

In Verbindung mit α) zeigt δ), nach Def. $(\overline{6})$, *dass die Aussagen* $A = 0$ und $A = 1$ *die Negationen von einander sind.*

Durch Hinzuziehung noch anderer Äquivalenzen kann man die Formeln ζ), η) noch erweitern zu dem Tableau:

*ϑ) $\qquad (A_1 \neq 1) = (A \neq 0) = (A = 1) = (A_1 = 0)$

*ι) $\qquad (A_1 \neq 0) = (A \neq 1) = (A = 0) = (A_1 = 1)$

wo die rechts hinzugekommenen Ausdrücke sich durch beiderseitiges Negiren nach Th. 32) aus dem vorhergehenden Ausdruck ergeben, welcher ja selbst hier eine Gleichung ist. Nachdem somit die Gleichheit der drei letzten Ausdrücke in ϑ), ι) bereits erkannt ist, bleibt nur noch der Hinzutritt des ersten Ausdrucks linkerhand daselbst zu rechtfertigen. Setzt man aber in der mittleren Gleichung von einer dieser beiden Zeilen A_1 für A, so wird dadurch die Verbindung zwischen dem ersten und letzten Ausdruck der andern von diesen beiden Zeilen hergestellt.

Noch andre Zurückführungen der vier Ausdrücke ϑ) oder ι) auf einander würden sich nach dem Schema ergeben:

$$(A \neq B) = (A_1 \neq B_1)$$

welches durch Anwendung des Th. $\overline{32}$) auf sich selbst zu gewinnen ist, und auch als Formel des Gebietekalkuls gilt, nämlich aus Th. 32) kraft $\overline{32}$) hervorgeht.

Man kann die beiden Satzgruppen ϑ) und ι) zusammenfassend, das Ergebniss noch formell verallgemeinern zu:

$^*\varkappa$) $$(A_{,} \neq B_{,}) = (A \neq B) = (A = B_{,}) = (A_{,} = B)$$

oder auch:

$$(A_{,} \neq B) = (A \neq B_{,}) = (A = B) = (A_{,} = B_{,})$$

denn in Anbetracht, dass B gleichwie jede Aussage konstanten Sinnes nur entweder gleich 0 oder gleich 1 sein kann, gehen die Formeln $\varkappa$) das eine mal in ϑ) das andremal in ι) über.

Hier ist das erste und das dritte Gleichheitszeichen auch im Gebietekalkul rechtskräftig, das zweite oder mittlere indessen nicht, samt den Vergleichungen, die sich auf dieses stützen mögen.

Die Äquivalenz der drei letzten Aussagenausdrücke in $\varkappa$) lehrt folgendes: *Bei einer Gleichung des Aussagenkalkuls ist es einerlei, ob man den Negationsstrich an ihrer linken Seite, oder am Gleichheitszeichen, oder an ihrer rechten Seite anbringt. Die Operation des Negirens kann anstatt an der Gleichung selbst, auch blos an einer Seite derselben vollzogen werden.*

Überdies zeigt uns das Th. $\varkappa$), dass *im Kalkul mit Aussagen konstanten Sinnes eine Ungleichung sich immer auch als Gleichung schreiben lässt;* die Zeichen $\neq$ (und $\not\Subset$) sind hier entbehrlich — was alles im Gebietekalkul, wie wir sehen werden keineswegs der Fall ist.

Es kommt uns jetzt darauf an: *jede Beziehung, welche zwischen zwei Aussagen A und B behauptet werden kann* — aufgefasst als Klasse der Gelegenheiten, bei denen diese Beziehung zutrifft — *auszudrücken durch A und B selber* — d. h. durch die Klassen der Gelegenheiten, wo ebendiese Aussagen, einzeln genommen, zutreffen oder nicht zutreffen.

Als ausreichend wird es sich herausstellen, wenn dieses Problem für eine Subsumtion

$$A \Subset B$$

gelöst wird.

Die Lösung liefert uns bereits das Theorem ε), indem wir darnach kraft Th. $\overline{38}_{\times}$) und $\overline{32}$) oder unmittelbar kraft Th. $\overline{38}_{+}$) haben müssen:

$$(A \Subset B) = (A B_{,} = 0) = \{(A B_{,})_{,} = 1\} = (A_{,} + B = 1) = A_{,} + B.$$

Hiermit ist nun der fundamentale Satz gewonnen:

λ) $$(A \Subset B) = A_{,} + B,$$

welchen schon Peirce[8] gegeben, und zuvor McColl[3] — indessen blos als eine Subsumtion (implication), statt Gleichung. Man kann ihn dahin aussprechen:

Die „Gültigkeitsklasse" der Subsumtion $A \leqslant B$ ist die Klasse der Gelegenheiten, wo A nicht gilt, oder auch B gilt.

Anstatt den Satz, wie hier ausgeführt, auf das Prinzip ε) zurückzuführen, rechtfertigt Peirce denselben direkt durch eine Überlegung, die wir jetzt ebenfalls anstellen wollen.

Wegen der Allgemeingültigkeit der Formel $0 \leqslant B$ — kraft Def. ($\bar{2}_\times$) — ist die Subsumtion $A \leqslant B$ jedenfalls immer dann richtig, wenn $A = 0$ ist, d. h. wenn die Aussage A ungültig ist; dies ist der Fall in welchem $A_1 = 1$ ist, oder die Aussage A_1 gilt.

Ferner gilt die Subsumtion $A \leqslant B$ auch, sobald die Aussage B gilt. Für $B = 1$ kommt sie nämlich auf die kraft Def. ($\bar{2}_+$) anzuerkennende Formel $A \leqslant 1$ hinaus. Mit andern Worten: gilt B überhaupt, gilt es stets, so gilt es auch dann, wenn A gilt.

Die Gültigkeitsklasse unsrer Subsumtion ist darnach allermindestens $A_1 + B$.

Wenn A gilt und zugleich B nicht gilt, d. h. also in den durch den Ausdruck AB_1 zusammengefassten Fällen, ist die Subsumtion jedenfalls ungültig.

Da aber:

$$A_1 + B + AB_1 = 1$$

nach Th. 33_+) Zusatz ist, so sind hiermit alle denkbaren Fälle erschöpft und ist dargethan, dass $A_1 + B$ die *volle* Gültigkeitsklasse der Subsumtion $A \leqslant B$ sein muss, wie zu zeigen war.

Aus dem so gewonnenen Satze λ), wofern er als allgemeingültig zugelassen wird, fliesst umgekehrt auch wieder das Prinzip ε), indem nach bekannten Sätzen — cf. Th. $\bar{5}_+$) etc. — sein muss:

$$(A = 1) = (1 \leqslant A) = 1_1 + A = 0 + A = A.$$

Die Aussage AB_1 ist die *Klasse für die Fälle der Ungültigkeit der Subsumtion* $A \leqslant B$; sie ist die Negation der Gültigkeitsklasse $A_1 + B$ indem $AB_1 = (A_1 + B)_1$. Dieselbe muss verschwinden, wenn die Subsumtion (stets) wahr sein soll — in Übereinstimmung mit Th. $\overline{38}_\times$); die Gültigkeitsklasse $A_1 + B$ der Subsumtion dagegen muss alsdann gleich 1 sein (und umgekehrt). Zur Verifikation der Aussage genügt es jedoch, nur das eine von beiden nachzusehen.

Von Interesse ist aber noch eine dritte Aussage oder Klasse, nämlich die $A_1 B$.

Diese stellt dasjenige vor, was allermindestens (das Minimum dessen, was) zum Minor der Subsumtion addirt werden muss, damit der Major herauskomme. In der That wird sein:

$$A \cdot A_1 B = 0 \quad \text{und} \quad A + A_1 B = A + B = B$$

nach Th. 33_+) Zus. und Th. 20_+).

Durch die beiden Anforderungen, dass

$$A \cdot X = 0 \quad \text{und} \quad A + X = B$$

sei, ist die Aussage, resp. Klasse X vollkommen bestimmt; es berechnet sich $X = A_1 B$ und ergibt sich daneben als Valenzbedingung für X oder Bedingung für die Auflösbarkeit des vorstehenden Gleichungenpaares, dass $A B_1 = 0$, das heisst $A \Subset B$ sein müsse.

Die vereinigte Gleichung heisst in der That:

$$0 = A B_1 + (A + B_1) X + A_1 B X_1$$

und muss der arbiträre Term der Lösung, nämlich $U(A + B_1)_1 = U A_1 B$ im andern aufgehn, von $A_1 B$ verschluckt werden — vergl. das Th. $51_\times$) in § 29.

Diese Klasse $A_1 B$ kann füglich das *„Gewicht" der Subsumtion*, des Urteils oder der Aussage $A \Subset B$ genannt werden —

— gleichwie man auch in der Arithmetik als „Gewicht einer Ungleichung" $A < B$ bezeichnet: den Überschuss $B - A$ des grösseren Membrums über das kleinere.

Nach § 23 hätte in der That auch im identischen Kalkul $B - A = B A_1 = A_1 B$ als Bedeutung dieser Differenz zu gelten, welche indessen hier nur unter der Bedingung $AB_1 = 0$ oder $A \Subset B$ überhaupt einen Sinn hat.

Folgert man (hier wie dort) aus einer Subsumtion (resp. Ungleichung) eine andere von noch *„grösserem"* Gewichte, so sagt man: die Folgerung finde *„a fortiori"* statt, die Konklusion gelte *„um so mehr"*, sobald die Prämisse gilt. Vergleichbar können freilich die Gewichte zweier Aussagen nur dann genannt werden, wenn das eine derselben im andern als ein Teil enthalten ist, wo dann das dem andern übergeordnete als das „grössere" Gewicht zu bezeichnen sein wird. (Exempel siehe nachstehend bei Pr. II.)

Ist das Gewicht einer Subsumtion gleich 0, *so muss dieselbe eine Gleichung sein.*

In der That gilt dann neben der Valenzbedingung $A B_1 = 0$ auch noch die Gleichung $X = A_1 B = 0$, woraus nach Th. 24_+) folgt:

$$A B_1 + A_1 B = 0, \text{ oder gemäss Th. 39): } A = B.$$

In diese Gleichung muss dann also die Subsumtion $A \Subset B$ degeneriren.

Umgekehrt *ist* 0 *das Gewicht jeder Gleichung*, mag man diese vor-

oder rückwärts als Subsumtion lesen, denn 0 ist immer die zur einen Seite disjunkte Ergänzung von ebendieser zur andern Seite der Gleichung.

Übrigens brauchen äquivalente Subsumtionen nicht gleiches Gewicht zu haben [und vice versā: Subsumtionen von gleichem Gewicht brauchen nicht äquivalent zu sein, abgesehen von der engeren Geltung].

Denn ist $(A ⋹ B) = (C ⋹ D)$ so folgt zwar $A_1 + B = C_1 + D$ nach λ), und hieraus durch beiderseitiges Negiren auch $AB_1 = CD_1$; dagegen können diese Relationen doch sehr wohl bestehen, ohne dass $A_1 B = C_1 D$ sein müsste, sowie umgekehrt.

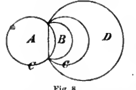


Fig. 8.

Ersteres zeigt die Figur 8, worin A ein Kreis, B und D (überhalbkreisgrosse) Segmente, und C das symmetrische Doppelsegment vorstellt.

Eine vierte Klasse: $A + B_1$, die Negation des Gewichts, als eine bei der Subsumtion $A ⋹ B$ belangreiche zu betrachten, wird durch die Betrachtung des Gewichts selbst überflüssig gemacht.

Nachdem für jede Subsumtion die gestellte Aufgabe der Ermittelung ihrer Gültigkeitsklasse gelöst ist, lässt sich die Frage auch für jede Gleichung leicht beantworten. Nach Def. (1) ist ja die Gleichung nichts als das Produkt zweier Subsumtionen:

$$(A = B) = (A ⋹ B)(B ⋹ A)$$

und setzt man hier für die Subsumtionen rechterhand ihre Gültigkeitsklassen, gebildet nach dem Schema des Th. λ), ein, so ergibt sich nach Ausmultiplizirung von $(A_1 + B)(B_1 + A)$ als die gesuchte Darstellung:

μ) $$(A = B) = AB + A_1 B_1$$

und damit zugleich ist auch gewonnen:

$$(A \neq B) = AB_1 + A_1 B.$$

Jenes heisst: *die Gleichung zwischen zwei Aussagen ist immer dann und nur dann erfüllt, wenn sie beide zugleich gelten, oder alle beide nicht gelten* — was sich bei der für uns maassgebenden Fassung der Aussagenäquivalenz ohnehin versteht.

Ungültig ist die Gleichung in den Fällen $AB_1 + A_1 B$, d. h. sobald die eine Aussage gilt, die andere aber nicht gilt.

Soll die Gleichung wahr sein, sonach also — in Anbetracht ihres konstanten Sinnes — *stets* wahr sein, so muss die letztere oder Un-

gültigkeitsklasse verschwinden — im Einklang mit Th. $39_\times$) — die Gültigkeitsklasse aber muss = i sein, nämlich die ganze Mannigfaltigkeit der Gelegenheiten, resp. die ganze Zeit repräsentiren.

In der siebzehnten und folgenden Vorlesung werden wir alle denkbaren Beziehungen zwischen Gebieten zurückführen auf Gleichungen *und Ungleichungen*. Und da *im eigentlichen Aussagenkalkul* nach Th. $\varkappa$) die Ungleichung sich immer auch als Gleichung schreiben liess, so ist es jedenfalls schon ausreichend, die gestellte Aufgabe für die Gleichung gelöst zu haben in Gestalt des Theorems μ) — und zum Überfluss für die Subsumtion durch Th. λ) — um sich ihrer Lösung auch für alle denkbaren Propositionen zu versichern.

Nach § 28 durften nun in den Formeln des identischen Kalkuls, wie sie in § 29 sich rekapitulirt finden, alle Gebiete $1, a, b, \ldots$ auch ausgelegt werden als Aussagen $i, A, B, \ldots$ und mussten die Formeln dabei ihre Gültigkeit behalten.

Für jedes richtige Theorem, jede gültige Formel aber muss dann die Gültigkeitsklasse sich = i erweisen — oder was auf dasselbe hinauskommt, muss die Ungültigkeitsklasse verschwinden.

Indem wir dieses nachsehen, haben wir ein bequemes Mittel, die Gültigkeit jedes Satzes zu kontroliren, die Sätze des identischen Kalkuls vermittelst mechanischen Rechnens durch diesen selbst zu bewahrheiten und durch solche Verifikation sie *als Sätze des Aussagenkalkuls* direkt zu beweisen.

Wir schreiten dazu, die Formeln des § 29 nochmals, nämlich jetzt auch in dieser Hinsicht durchzunehmen. Dabei wollen wir aber die kleinen Buchstaben von früher beibehalten (inklusive der 1 ohne Tupfen) obzwar wir unter denselben jetzt nicht mehr beliebige Gebiete, sondern beliebige Aussagen (von festem Sinne) uns vorzustellen haben.

Zur Anwendung zu kommen brauchen lediglich die Schemata ε) nebst Korollar oder λ) und μ), oder im Überblick:

$$\nu)\ (A = i) = A,\ (A = 0) = A_1,\ (A \neq\!\!\!\subset B) = A_1 + B,\ (A = B) = AB + A_1 B_1.$$

Doch kann man statt der Berufung auf das letzte Schema μ) sich auch begnügen, gewissermassen die „Komparationsmethode" anzuwenden, nämlich bei einer behaupteten Äquivalenz zweier Aussagen die Gültigkeitsklasse der einen sowie der andern für sich aufstellen, um sich von der Übereinstimmung, Identität der beiden Klassen durch den blossen Anblick (durch Inspektion) ihrer Ausdrücke zu überzeugen. Dabei wird — damit diese Identität sich in der Form der beiden Aus-

drücke auch äusserlich kundgebe, zumeist erforderlich sein, dieselben auf ihre einfachste Gestalt zu reduziren, wo nicht, sie nach den in ihnen vorkommenden Symbolen erst beide zu entwickeln — gemäss § 19.

Ebenso können Subsumtionen $A \Subset B$ nachgerechnet werden, indem man zuerst das „Gewicht“ $A_1 B$ derselben aufsucht, und sich überzeugt, dass dasselbe zur Gültigkeitsklasse des Minor A (d. i. zu der „Voraussetzung“ des durch die Subsumtion ausgedrückten Satzes) addirt in der That diejenige des Major B (oder der „Behauptung“ ebendieses Satzes) liefert.

Bei der Ausführung*) wird dies leicht vollkommen deutlich zu machen sein.

Prinzip I gibt die Gültigkeitsklasse (gemäss λ)):

$$(a \Subset a) = a_1 + a = 1;$$

hier also stimmt die Probe.

Prinzip II lautete: $A \Subset B$, wenn für den Augenblick A diese Behauptung:

$$A = (a \Subset b)(b \Subset c) \quad \text{und wenn} \quad B = (a \Subset c)$$

bedeutet. Nach Schema λ) wird hier:

$$A = (a_1 + b)(b_1 + c) = a_1 b_1 + bc \quad \text{und} \quad B = a_1 + c.$$

Nach § 21, η) rechts lässt die Konklusion B sich erreichen, indem man in A den Eliminanden b tilgt.

Behufs direkter Verifikation mag man aber auch erstlich nachsehen, dass $A_1 + B = 1$ ist; in der That wird:

$$A_1 + B = ab_1 + bc_1 + a_1 + c = b_1 + b + a_1 + c = 1 + a_1 + c = 1.$$

Oder man mag nachsehen, dass $AB_1 = 0$ ist:

$$AB_1 = (a_1 b_1 + bc)\, ac_1 = 0 + 0 = 0.$$

Oder endlich man mag Minor und Major für sich entwickeln:

$$A = a_1 b_1 (c + c_1) + (a + a_1)\, bc, \quad B = (a_1 c + a_1 c_1 + ac)(b + b_1), \text{ also}$$

$$A = abc + a_1 bc + a_1 b_1 c + a_1 b_1 c_1, \quad B = A + (ab_1 c + a_1 bc_1),$$

woraus ersichtlich wird, dass in der That A von B um das „Gewicht“:

$$A_1 B = ab_1 c + a_1 bc_1$$

übertroffen ist. Dies zeigt (nebenbei), dass die Fälle, wo a und c gelten, aber b nicht gilt, sowie wo a und c nicht gelten, aber b gilt, die-

*) Die Keime zu den Entwickelungen finden (wie gesagt) sich schon bei Peirce [8] — mit einer sonderbaren Auffassung — vergl. ibid. pag. 192 auf 193, und, früher noch, bei McColl [3].

jenigen sind, wo die Behauptung B des Satzes gilt, aber die Voraussetzung A desselben nicht gilt. Die Behauptung $a \Subset c$ gilt immer, wann die Voraussetzung $(a \Subset b)(b \Subset c)$ zutrifft, aber ausserdem auch noch in den erwähnten das Gewicht der Aussage II zusammensetzenden Fällen.

In ähnlicher Weise, wie vorstehend, wollen wir immer die linke Seite einer Subsumtion oder Gleichung mit A, ihre rechte mit B bezeichnen und zunächst nur diejenigen Formeln des § 29 nachrechnen, bei denen kein Produkten- oder Summenzeichen vorkommt.

Für die Def. (1) der Gleichheit haben wir dann:

$$A = (a \Subset b)(b \Subset a) = (a_1 + b)(b_1 + a) \text{ und } B = (a = b) = ab + a_1 b_1,$$

was übereinstimmt.

Bei Th. °1) würden wir als Gültigkeitsklasse nach Schema μ) erhalten: $(a = a) = aa + a_1 a_1 = 1$; doch genügt bereits vergleichendes Inspiziren der beiden Seiten der in ihm behaupteten Gleichung.

Bei Th. 2) ist $A = (a \Subset b)(b = c) = (a_1 + b)(bc + b_1 c_1) = bc + a_1 b_1 c_1$ und $b_1 c + a_1 b c_1$ das Gewicht, mithin die Summe beider gleich dem Major: $B = (a \Subset c) = a_1 + c$. Ebenso:

Bei Th. 3) ist: $A = (a = b)(b \Subset c) = abc + a_1 b_1$ und $a_1 b + ab_1 c$ das Gewicht.

Bei Th. 4) ist: $A = (a = b)(b = c) = (ab + a_1 b_1)(bc + b_1 c_1) = abc + a_1 b_1 c_1$ und $B = (a = c) = ac + a_1 c_1 = A + (ab_1 c + a_1 b c_1)$, woraus das Gewicht ersichtlich ist als ein mit dem von Pr. II übereinstimmendes.

Def. °(2) gibt $(0 \Subset a) = 0_1 + a = 1 + a = 1$, $(a \Subset 1) = a_1 + 1 = 1$, wie es sein soll.

Zu Th. 5) bekommen wir bei

$5_\times)$ $A = (a \Subset 0) = a_1 + 0 = a_1$,	$5_+)$ $A = (1 \Subset a) = 1_1 + a = 0 + a = a$,
$B = (a = 0) = (a_1 = 1) = a_1$	$B = (a = 1) = a$,

was übereinstimmt. Man kann aber auch rein mechanisch sogleich die Gültigkeitsklasse des ganzen Theorems ansetzen:

$$\{(a \Subset 0) = (a = 0)\} = (a_1 + 0 = a \cdot 0 + a_1 \cdot 0_1) = (a_1 = a_1) = a_1 a_1 + aa = a_1 + a = 1,$$

$$\{(1 \Subset a) = (a = 1)\} = (1_1 + a = a \cdot 1 + a_1 \cdot 1_1) = (a = a) = 1.$$

Zu Def. (3) haben wir bei

$(3_\times)$ $A = (c \Subset a)(c \Subset b) = (c_1 + a)(c_1 + b) =$	(3_+) $A = (a \Subset c)(b \Subset c) = (a_1 + c)(b_1 + c) =$
$= c_1 + ab$	$= a_1 b_1 + c$
$B = (c \Subset ab) = c_1 + ab$	$B = (a + b \Subset c) = (a + b)_1 + c = a_1 b_1 + c.$

Zu Th. °6) bei $6_\times$): $(ab \Subset a) = (ab)_1 + a = a_1 + b_1 + a = 1 + b_1 = 1$, bei 6_+): $(a \Subset a + b) = a_1 + a + b = 1 + b = 1$.

Gleicherweise wie vorhin bei Th. °1), Def. °(2) und Th. °6) ist bei allen Sätzen des § 29, die eine mit Ringelchen versehene Chiffre haben,

direkt leicht nachzurechnen, dass sie die Gültigkeitsdauer resp. -klasse 1 besitzen; nur bietet dies weiter kein Interesse: Beim Distributionsgesetz $27_\times$) z. B. hätte man blos nachzurechnen, dass:

$$a(b+c)\cdot(ab+ac)+(a_1+b_1c_1)\cdot(a_1+b_1)(a_1+c_1)=1$$

ist, was sich nach den Gesetzen des Kalkuls auf den ersten Blick versteht, weil der eine Faktor in jedem Gliede links identisch ist mit dem andern, das eine Glied daselbst aber die Negation ist des andern. So auch bei Th. $°21_\times$) wäre: $(a\cdot 1=a)=a\cdot 1\cdot a+(a_1+0)\,a_1=a+a_1=1$. Etc.

Anders bei den übrigen Sätzen. Bei diesen verlohnt es, die Rechnung jeweils, wie nachstehend durchzuführen, indem sich eine wirkliche Kontrole ergibt und auch Aufschluss über das Gewicht des Satzes gewonnen wird (sofern dasselbe nicht schon von vornherein als verschwindend, gleich 0, erkennbar war).

Zu Th. 15) ist $A=(a ⋹ b)=a_1+b$, und bei $15_\times$):

$$B=(ac ⋹ bc)=a_1+c_1+bc=a_1+b+c_1=A+ab_1c_1,$$

das Gewicht also ab_1c_1; zu Th. 15_+) analog ab_1c, indem hier:

$$B=(a+c ⋹ b+c)=a_1c_1+b+c=a_1+b+c=A+ab_1c.$$

Zu Th. 16) ist $A=(a=b)=ab+a_1b_1$, und bei $16_\times$):

$$B=(ac=bc)=ac\cdot bc+(a_1+c_1)(b_1+c_1)=abc+a_1b_1+c_1=ab+a_1b_1+c_1=$$
$$=A+(ab_1+a_1b)\,c_1, \qquad \text{bei } 16_+):$$
$$B=(a+c=b+c)=(a+c)(b+c)+a_1c_1\cdot b_1c_1=ab+c+a_1b_1c_1=ab+a_1b_1+c=$$
$$=A+(ab_1+a_1b)\,c.$$

In den Theoremen 17) bis 19) wird man für die vorliegenden Rechnungszwecke bequemer α, β statt a', b' schreiben. Dann ist

Zu Th. 17) $A=(a ⋹ b)(\alpha ⋹ \beta)=(a_1+b)(\alpha_1+\beta)$, und

bei $17_\times$) $B=(a\alpha ⋹ b\beta)=a_1+\alpha_1+b\beta=A+(ab_1\alpha_1+a_1\alpha\beta_1)$,

„ 17_+) $B=(a+\alpha ⋹ b+\beta)=a_1\alpha_1+b+\beta=A+(ab_1\beta+b\alpha\beta_1)$.

Zu Th. 18) ist $A=(a ⋹ b)(\alpha=\beta)=(a_1+b)(\alpha\beta+\alpha_1\beta_1)$,

bei $18_\times$) $B=(a\alpha ⋹ b\beta)=A+(ab_1\alpha_1+a_1\alpha\beta_1+\alpha_1\beta)$,

„ 18_+) $B=(a+\alpha ⋹ b+\beta)=A+(ab_1\beta+b\alpha\beta_1+\alpha_1\beta)$.

Zu Th. 19) ist $A=(a=b)(\alpha=\beta)=(ab+a_1b_1)(\alpha\beta+\alpha_1\beta_1)$,

bei $19_\times$) $B=(a\alpha=b\beta)=ab\alpha\beta+(a_1+\alpha_1)(b_1+\beta_1)=A+\{b_1\alpha_1(a+\beta)+a_1\beta_1(b+\alpha)\}$,

„ 19_+) $B=(a+\alpha=b+\beta)=(a+\alpha)(b+\beta)+a_1b_1\alpha_1\beta_1=A+\{a\beta(b_1+\alpha_1)+b\alpha(a_1+\beta_1)\}$.

Zu Th. 20) ist $(a ⋹ b)=a_1+b$ und ebenso

$$(a=ab)=a\cdot ab+a_1(a_1+b_1)=ab+a_1=a_1+b,$$
$$(a+b=b)=(a+b)\,b+a_1b_1\cdot b_1=b+a_1b_1=a_1+b.$$

Zu Th. 24) ist

$(ab = 1) = ab$ und $\quad$ | $\quad$ $(a + b = 0) = a_1 b_1$ und

$(a = 1)(b = 1) = ab$ $\quad$ | $\quad$ $(a = 0)(b = 0) = a_1 b_1$.

Zu Prinzip $\mathrm{III}_\times$ haben wir als Minor:
$A = (bc = 0) = b_1 + c_1$, und als Major $B = 1$, nämlich
$B = \{a(b+c) \subseteq ab + ac\} = a_1 + b_1 c_1 + ab + ac = a_1 + b + c + b_1 c_1 = a_1 + 1$,
sonach läuft dasselbe auf: $b_1 + c_1 \subseteq 1$ hinaus und erweist sich als richtig.

Zum Hülfstheorem 29) haben wir:

$$A = (ab = 0)(ac = 0)(a + b = 1)(a + c = 1) = (a_1 + b_1)(a_1 + c_1)(a + b)(a + c) =$$
$$= (ab_1 + a_1 b)(ac_1 + a_1 c) \quad \text{oder} \quad (a_1 + b_1 c_1)(a + bc) = ab_1 c_1 + a_1 bc,$$

und $\qquad B = (b = c) = bc + b_1 c_1 = A + (abc + a_1 b_1 c_1)$,

wie durch Entwickelung des B auch nach a zu erkennen ist. Zudem ist die Unterordnung von A unter B aus $a_1 bc \subseteq bc$ und $ab_1 c_1 \subseteq b_1 c_1$ nach Th. $6_\times$) und 17_+) ersichtlich.

Zu Def. (6) ist $A = (ax \subseteq 0)(1 \subseteq a + x) = (a_1 + x_1)(a + x) = a_1 x + ax_1$, desgleichen $B = (x = a_1) = xa_1 + x_1 a$. Denselben Wert ergäbe:

$$A = (ax = 0)(a + x = 1).$$

Zu Th. 32) ist $A = (a = b) = ab + a_1 b_1$, $B = (a_1 = b_1) = a_1 b_1 + ab$.

Zu Th. 37) $A = (a \subseteq b) = a_1 + b$, $B = (b_1 \subseteq a_1) = b + a_1$.

Zu Th. 38) ist: $(ab_1 = 0) = a_1 + b$, $(a \subseteq b) = a_1 + b$, $(a_1 + b = 1) = a_1 + b$.

Zu Th. 39) $(ab_1 + a_1 b = 0) = (ab + a_1 b_1 = 1) = ab + a_1 b_1$, und

$$(a = b) = ab + a_1 b_1.$$

Zu Th. 40) ist $A = (ac \subseteq bc)(a + c \subseteq b + c) = (a_1 + c_1 + bc)(a_1 c_1 + b + c) =$
$= a_1 c_1 + a_1 b + a_1 c + bc_1 + bc = a_1 \cdot 1 + b \cdot 1 = a_1 + b$ und $B = (a \subseteq b) = a_1 + b$.

Ebenso bei Zus. 2 ist $A = (ac \subseteq b)(a \subseteq b + c) = (a_1 + c_1 + b)(a_1 + b + c) = a_1 + b$.

Ferner bei Zus. 1 ist: $A = (ac = bc)(a + c = b + c) =$
$= \{ac \cdot bc + (a_1 + c_1)(b_1 + c_1)\}\{(a + c)(b + c) + a_1 c_1 \cdot b_1 c_1\} = (abc + a_1 b_1 + c_1)(ab + c + a_1 b_1 c_1) =$
$= abc + a_1 b_1 c + abc_1 + a_1 b_1 c_1 = ab + a_1 b_1$, desgl. $B = (a = b) = ab + a_1 b_1$.

Zu Th. 41) haben wir:
$(ab \subseteq c) = a_1 + b_1 + c = (a \subseteq b_1 + c)$, etc., $(a \subseteq b + c) = a_1 + b + c = (ab_1 \subseteq c)$ etc.

Beim Hülfstheorem zu Th. 47_+) ist

$$A = (a \subseteq x \subseteq b) = (a \subseteq x)(x \subseteq b) = (a_1 + x)(x_1 + b) = a_1 x_1 + bx$$

und $B = (ax_1 + bx = x) = (ax_1 + bx)x + (a_1 x_1 + b_1 x)x_1 = bx + a_1 x_1$.

Beim Th. $49_\times$): $(ax + bx_1 = 0) = a_1 x + b_1 x_1$,

und $(b \subseteq x \subseteq a_1) = (b \subseteq x)(x \subseteq a_1) = (b_1 + x)(x_1 + a_1) = b_1 x_1 + a_1 x$;

hieran würde auch ein noch ferner hinzugesetzter Faktor $(b \mathrel{=\!\!\!\in} a_1)$, das ist $b_1 + a_1$, nichts ändern.

Endlich bei den Zusätzen zu Th. 51) im § 29 wird

$$\left.\begin{array}{l}(bx = a)(b + x = 1) = \{bx \cdot a + (b_1 + x_1)a_1\}(b + x) = \\ (ab_1 = 0)(x = a + b_1) = (a_1 + b)\{x(a + b_1) + x_1 \cdot a_1 b\} = \end{array}\right\} (ab + a_1 b_1)x + a_1 b x_1,$$

$$\left.\begin{array}{l}(b + x = a)(bx = 0) = \{(b + x)a + b_1 x_1 \cdot a_1\}(b_1 + x_1) = \\ (a_1 b = 0)(x = ab_1) = (a + b_1)\{x \cdot ab_1 + x_1(a_1 + b)\} = \end{array}\right\} ab_1 x + (ab + a_1 b_1)x_1.$$

Prüfen wir nunmehr auch diejenigen Formeln des § 29, in welchen Produkt- und Summenzeichen vorkommen.

Zu Def. $(2_\times)$ haben wir:

$$A = \prod_a (x \mathrel{=\!\!\!\in} a) = \prod_a (x_1 + a) = x_1 \quad \text{und} \quad B = (x = 0) = x_1,$$

was übereinstimmt, ebenso zu Def. (2_+):

$$\prod_a (a \mathrel{=\!\!\!\in} x) = \prod_a (a_1 + x) = x \quad \text{und} \quad (x = 1) = x.$$

Dass nämlich $\prod_a (x_1 + a) = x_1$ ist, ergibt sich folgendermassen. Nach dem auf unbegrenzt viele Faktoren ausgedehnten Theorem 27_+) muss sein:

$$\prod_a (b + a) = b + \prod_a a, \quad \text{ebenso} \quad \prod_a (b + a_1) = b + \prod_a a_1$$

und noch allgemeiner, wenn nur wieder b ein von a unabhängiges, bezüglich des a konstantes Gebiet vorstellt:

$$\prod_a \{b + f(a)\} = b + \prod_a f(a).$$

Im oben vorliegenden Falle kommt dann noch in Betracht, dass

$$\prod_a a = 0 \quad \text{desgleichen} \quad \prod_a a_1 = 0$$

sein muss, in Anbetracht, dass unter allen möglichen Faktoren a (resp. a_1) deren Produkt zu bilden ist, sich gewiss auch disjunkte finden, z. B. ein bestimmtes Gebiet a und daneben auch dessen Negation a_1, wonach also das Th. $22_\times$) in Kraft tritt.

Zu Th. $7_\times$) haben wir:

$$\prod_x \{(x \mathrel{=\!\!\!\in} c) \mathrel{=\!\!\!\in} (x \mathrel{=\!\!\!\in} a)(x \mathrel{=\!\!\!\in} b)\} = \prod_x \{x_1 + c \mathrel{=\!\!\!\in} (x_1 + a)(x_1 + b)\} =$$

$$= \prod_x \{xc_1 + x_1 + ab\} = \prod_x (c_1 + ab + x_1) = c_1 + ab, \quad \text{also} \quad = (c \mathrel{=\!\!\!\in} ab),$$

und zu 7_+): $\prod_x \{(c \subseteq x) \subseteq (a \subseteq x)(b \subseteq x)\} = \prod_x \{c_1 + x \subseteq (a_1 + x)(b_1 + x)\} =$

$= \prod_x (cx_1 + a_1 b_1 + x) = \prod_x (a_1 b_1 + c + x) = a_1 b_1 + c$, also $= (a + b \subseteq c)$.

Bei den nächsten Theoremen werde nur links vom Mittelstrich die Rechnung durchgeführt, rechts dem Leser überlassen. Zu $8_\times$):

$$\prod_x \{(x \subseteq ab) \subseteq (x \subseteq c)\} = \prod_x (x_1 + ab \subseteq x_1 + c) = \prod_x \{x(a_1 + b_1) + x_1 + c\} =$$

$$= a_1 + b_1 + c, \quad \text{also} \quad = (ab \subseteq c). \quad \text{Zu } 9_\times):$$

$$\prod_x \{(x \subseteq a)(x \subseteq b) \subseteq (x \subseteq c)\} = \prod_x \{(x_1 + a)(x_1 + b) \subseteq x_1 + c\} =$$

$$= \prod_x \{x(a_1 + b_1) + x_1 + c)\} = \text{ etc.}$$

Zu $10_\times$): $\prod_x \{(ab \subseteq x) \subseteq (c \subseteq x)\} = \prod_x (a_1 + b_1 + x \subseteq c_1 + x) =$

$= \prod_x (abx_1 + c_1 + x) = c_1 + ab$, etc.

Zu $11_\times$) $\prod_x \{(x \subseteq c) = (x \subseteq a)(x \subseteq b)\} = \prod_x \{x_1 + c = (x_1 + a)(x_1 + b)\} =$

$= \prod_x \{(x_1 + c)(x_1 + a)(x_1 + b) + xc_1(xa_1 + xb_1)\} = \prod_x \{x_1 + abc + xc_1(a_1 + b_1)\} =$

$= abc + (a_1 + b_1)c_1$, also $= (c = ab)$.

Zu Th. 43) ist: $\sum_u (a = ub) = \sum_u \{a \cdot ub + a_1(u_1 + b_1)\} =$

$= \sum_u (a_1 b_1 + abu + a_1 u_1) = a_1 b_1 + ab + a_1 = a_1 + b$, also $= (a \subseteq b)$,

desgl. $\sum_v (b = a + v) = \sum_v \{b(a + v) + b_1 \cdot a_1 v_1\} = ab + b + a_1 b_1 = a_1 + b$.

Hierbei war zu berücksichtigen, dass nach dem auf eine unbegrenzte Gliedermenge verallgemeinerten Distributionsgesetz $27_\times$), wenn a gegen u konstant ist:

$$\sum_u af(u) = a \sum_u f(u)$$

sein muss, und ferner dass hier

$$\sum_u u = 1 \quad \text{sowie} \quad \sum_u u_1 = 1$$

sein wird, indem in der Summe aller erdenklichen Glieder sicher sich auch solche finden, welche als die Negationen von einander sich zu 1 ergänzen.

Zu Th. 47_+) ist einerseits $(a \subseteq x \subseteq b) = a_1 x_1 + bx$, wie oben, und andrerseits

$$(a \mathrel{=\!\!\!\in} b) \sum_w (x = aw_1 + bw) =$$

$$= (a_1+b) \sum_w \{x(aw_1+bw)+x_1(a_1w_1+b_1w)\} = (a_1+b)(xa+xb+x_1a_1+x_1b_1) =$$

gleich dem vorigen Ausdruck.

Zu Th. 48_+) ist $(ab \mathrel{=\!\!\!\in} u \mathrel{=\!\!\!\in} a+b) = (a_1+b_1+u)(u_1+a+b) =$
$= (a_1+b_1)u_1 + (a+b)u$, aber auch: $\sum_x (u = ax + bx_1) =$
$= \sum_x \{u(ax+bx_1) + u_1(a_1x+b_1x_1)\} = ua + ub + u_1a_1 + u_1b_1$. Etc.

Den Zusatz S. 34 betreffend hat man zu berücksichtigen, dass auch

$$\sum_{u,v} uv = 1, \quad \sum_{u,v} uv_1 = 1, \quad \sum_{u,v} u_1v = 1, \quad \sum_{u,v} u_1v_1 = 1$$

sein wird, indem unter allen erdenklichen Produkten je zweier Gebiete auch die vier Konstituenten der nach irgend zwei bestimmten entwickelten Eins sich befinden. Darnach läuft die l. c. in § 29 angegebene Gleichung auf die Identität $a+b+c+d = a+b+c+d$ hinaus, von deren rechter Seite der Term $abcd$ absorbirt worden. Dieser ergab sich aus $\sum_w abcd = abcd \sum_w 1$, wo nun selbst

$$\sum_w 1 = 1$$

(nämlich $= 1+1+1+\cdots$) nach dem Tautologiegesetze 14_+) ist.

In Th. 50_+) ist die linke Seite: $(ax+bx_1=0) = a_1x+b_1x_1$, die rechte aber: $(ab=0)\sum_u(x=bu_1+a_1u) = (a_1+b_1)\sum_u\{x(bu_1+a_1u)+x_1(b_1u_1+au)\} =$
$= (a_1+b_1)(xb+xa_1+x_1b_1+x_1a)$,
was ausmultiplizirt auf dasselbe hinausläuft. Ebenso würde mit dem Faktor $\sum_u(x = b+ua_1)$ die Probe stimmen. Für sich jedoch, d. h. ohne den Aussagenfaktor, die Voraussetzung $(ab=0)$ ist verschieden:

$$\sum_u(x=bu_1+a_1u) = (a_1b \mathrel{=\!\!\!\in} x \mathrel{=\!\!\!\in} a_1+b), \quad \sum_u(x=b+a_1u) = (b \mathrel{=\!\!\!\in} x \mathrel{=\!\!\!\in} b+a_1)$$

konform mit dem Th. 48_+).

Endlich haben wir zu den Theoremen 51):

$$(a \mathrel{=\!\!\!\in} b) \sum_u(x = a+ub_1) = (a_1+b)\sum_u\{x(a+ub_1)+x_1a_1(u_1+b)\} =$$

$$= (a_1+b)\{x(a+b_1)+x_1a_1\} = x(ab+a_1b_1)+x_1a_1 = (bx=a),$$

$$(b \mathrel{=\!\!\!\in} a) \sum_u\{x = a(b_1+u)\} = (b_1+a)\sum_u\{xa(b_1+u)+x_1(a_1+bu_1)\} =$$

$$= (a+b_1)\{xa+x_1(a_1+b)\} = xa+x_1(ab+a_1b_1) = (b+x=a). \text{ —}$$

Sonach bewahrheiten sich also wieder alle unsre Sätze und erweist sich die Theorie als eine durch und durch in sich gefestigte.

Als eine Nutzanwendung und **Übungsaufgabe** zu der in diesem Paragraph gelehrten Methode wollen wir die Fragen beantworten:

ξ) *Wie differiren die vier Aussagen* x_1, x_2, x_3, x_4, wenn bedeutet: x_1 die Aussage: $(a = b)(c = d)$, die also resultirt, wenn man die Gleichung $a = b$ mit der Gleichung $c = d$ (*schlechtweg*) multiplizirt, x_2 die Aussage: $a(c = d) = b(c = d)$, die sich dadurch ergibt, dass man die Gleichung $a = b$ *beiderseits* multiplizirt mit der Gleichung $c = d$, x_3 die Aussage: $(a = b)\,c = (a = b)\,d$, welche entspringt durch *beiderseitiges* Multipliziren der Gleichung $c = d$ mit der $a = b$, endlich x_4 die Aussage: $ac = bd$, die sich durch *überschiebendes* Multipliziren der beiden Gleichungen $a = b$ und $c = d$ ergeben wird.

Vergl. § 10, unterhalb Th. 19), also Bd. 1, S. 268 sq.

Auflösung. Man hat: $x_1 = (ab + a_1b_1)(cd + c_1d_1)$,

$$x_2 = x_1 + (cd_1 + c_1d), \quad x_3 = x_1 + (ab_1 + a_1b),$$

$$x_4 = x_1 + \{(a + d)\,b_1c_1 + a_1d_1\,(b + c)\}$$

als „reduzirte“ Summen. [Unreduzirt würden die drei letztern den einfachern Ausdruck haben: $x_4 = abcd + (a_1 + c_1)(b_1 + d_1)$,

$$x_2 = ab + a_1b_1 + cd_1 + c_1d, \quad x_3 = ab_1 + a_1b + cd + c_1d_1]$$

Hienach ist ersichtlich, dass alle vier Aussagen im allgemeinen *verschieden* sind, und darum die l. c. eingeführten vorstehend kursiv gedruckten Benennungen (Adverbien für die Art und Weise des Multiplizirens) zur Unterscheidung notwendig. Ferner ist ersichtlich: $x_1 \mathrel{\underline{\in}} x_2$, $x_1 \mathrel{\underline{\in}} x_3$, $x_1 \mathrel{\underline{\in}} x_4$. Die oben angegebenen bei den Symbolen rechterhand zu x_1 noch hinzutretenden Glieder stellen das „Gewicht“ dieser drei Folgerungen (von x_2 aus x_1, etc.) vor. Ausser dann, wann x_1 gilt, wird z. B. x_2 ausschliesslich nur dann noch gelten, wenn c *oder aber* d gilt. Etc.

Zwischen irgend zweien der drei Aussagen x_2, x_3, x_4 besteht dagegen kein Zusammenhang, wonach allgemein die eine aus der andern folgen müsste, überhaupt keine (von den Bedeutungen der Aussagen a, b, c, d) unabhängige Beziehung, wie die Elimination von a, b, c, d aus den beiden zugehörigen Gleichungen zeigen würde, indem sie auf $0 = 0$ führte.

o) *Wie differiren ebenso die vier Aussagen:*

$$y_1 = (a \mathrel{\underline{\in}} b)(c \mathrel{\underline{\in}} d),$$

$$y_2 = \{a(c \mathrel{\underline{\in}} d) \mathrel{\underline{\in}} b(c \mathrel{\underline{\in}} d)\}, \quad y_3 = \{(a \mathrel{\underline{\in}} b)\,c \mathrel{\underline{\in}} (a \mathrel{\underline{\in}} b)\,d\},$$

$$y_4 = (ac \mathrel{\underline{\in}} bd)?$$

Auflösung:

$$y_1 = (a_1 + b)(c_1 + d)$$

$$y_2 = a_1 + b + cd_1 = y_1 + cd_1, \quad y_3 = ab_1 + c_1 + d = y_1 + ab_1,$$

$$y_4 = a_1 + c_1 + bd = y_1 + (ab_1c_1 + a_1cd_1)$$

was ähnliche Bemerkungen liefert. Nebenbei erkennt man leicht auch noch, dass:

$$y_2 = \{(c \subseteq d) \subseteq (a \subseteq b)\}, \quad y_3 = \{a \subseteq b) \subseteq (c \subseteq d)\}$$

ist.

π) Zum Dritten wollen wir noch einmal zu den Studien des § 6 zurückkehren, die uns die Theoreme 7) bis 11) geliefert haben. Des Gebietsdualismus halber genügt es, diejenigen links vom Mittelstriche zu betrachten und sollen die rechts höchstens als Ergebnisse mit berücksichtigt werden.

Man fasse unter den Chiffren die wir citiren, jeweils die Formeln des § 30 in's Auge, worin die kleinen Buchstaben wieder Gebiete vorstellen mögen. (S. 29 sq.)

Def. ($3_\times$) gab in einfachst denkbarer Form die Erklärung des Produkts ab zweier Gebiete als eines Prädikates: $(c \subseteq ab) = (c \subseteq a)(c \subseteq b)$.

Als Subjekt dagegen konnte ab nicht einfacher als mittelst Th. $9_\times$) = Def. ($5_\times$) erklärt werden, welches sich auf Grund des Th. $8_\times$) unmittelbar aus Def. ($3_\times$) ergibt, indem man nach letzterer die Bedeutung von $(x \subseteq ab)$ in das Th. $8_\times$) substituirt.

Analog zu dieser Def. ($5_\times$) für ab als Subjekt war aber behufs Erklärung von ab als Prädikat auch noch eine Erklärungsweise, komplizirter als Def. ($3_\times$), zulässig, welche als Def. ($4_\times$) in dem Th. $7_\times$) ausgesprochen ist.

Zog man das zu $8_\times$) analoge Th. $10_\times$) hinzu, so konnte auf diese Definitionen ($4_\times$) und ($5_\times$) eine unbegrenzte Reihe von immer komplizirter erscheinenden Erklärungsweisen für ab als Prädikat resp. Subjekt gegründet werden, die paarweise als gleich komplizirte oder einander analoge zusammengehören. Von den zwei Reihen so erhältlicher Definitionen, von denen also Def. ($4_\times$) und Def. ($5_\times$) die „Anfangsglieder" vorstellen — während nur der ersteren von diesen wirklich noch ein Glied in Gestalt der Def. ($3_\times$) vorangeht — sollen nun wenigstens die beiden nächstfolgenden Glieder noch in der Zeichensprache des Aussagenkalkuls dargestellt werden. Sie lauten bezüglich:

$$\varrho) \qquad (c \subseteq ab) = \prod_x \{\prod_y [(y \subseteq a)(y \subseteq b) \subseteq (y \subseteq x)] \subseteq (c \subseteq x)\},$$

$$\sigma) \qquad (ab \subseteq c) = \prod_x \{\prod_y [(y \subseteq x) \subseteq (y \subseteq a)(y \subseteq b)] \subseteq (x \subseteq c)\},$$

und ergeben sich *leicht*, indem man für $(ab \subseteq x)$ in das Th. $10_\times$) diejenige Erklärung substituirt, welche das Th. $9_\times$) dafür geben würde, resp. analog für $(x \subseteq ab)$ in das Th. $8_\times$) einsetzt den Wert dieser Aussage gemäss Th. $7_\times$). Dabei war nur zu beachten, dass nachdem der Name x als Produktationsvariable in dem einen der beiden im Geiste zusammenzuhaltenden Schemata bereits vergeben ist, in dem andern Schema für die Produktationsvariable ein neuer Name, wie y, gewählt werden muss.

Umgekehrt dagegen ist es *keine* leichte Anforderung an das mentale Abstraktionsvermögen des Lesers, falls nun ϱ), σ) als Definitionen zugrunde gelegt werden sollten, aus diesen Formeln selbst ihre Vereinfachungsfähigkeit zu erkennen und von ihnen zu den Definitionsformen $(4_\times)$ resp. $(5_\times)$ zurückzugelangen — so, wie wir in der That in § 6 die Zurückführung der Def. $(4_\times)$ auf die $(3_\times)$ mittelst verbalen Räsonnements geleistet haben, welches natürlich nun nachträglich auch ganz durch die Formelsprache des Aussagenkalkuls ersetzt werden könnte.

τ) Schliesslich wollen wir untersuchen, in welcher Beziehung in den Theoremen 7) bis 11) der allgemeine Faktor unter dem Produktenzeichen $\prod_x$ selbst zur andern Seite der Gleichung steht. Diese Beziehung ist die einer Überordnung, indem zu notifiziren ist, dass

Zu $7_\times$) $\quad (c \subseteq ab) \subseteq \{(x \subseteq c) \subseteq (x \subseteq a)(x \subseteq b)\}$,

Zu $8_\times$) $\quad (ab \subseteq c) \subseteq \{(x \subseteq ab) \subseteq (x \subseteq c)\}$,

Zu $9_\times$) $\quad (ab \subseteq c) \subseteq \{(x \subseteq a)(x \subseteq b) \subseteq (x \subseteq c)\}$,

Zu $10_\times$) $\quad (c \subseteq ab) \subseteq \{(ab \subseteq x) \subseteq (c \subseteq x)\}$,

Zu $11_\times$) $\quad (c = ab) \subseteq \{(x \subseteq c) = (x \subseteq a)(x \subseteq b)\}$.

Auf Grund der Def. $(3_\times)$ sind diese Formeln leicht als solche, die im Gebietekalkul allgemeine Geltung haben, syllogistisch zu beweisen, und ebenso verifiziren sie sich als solche des Aussagenkalkuls nach der über ν) angegebenen, durch das Bisherige genugsam illustrirten Methode.

Bei letzterem Verfahren wird augenscheinlich, dass die obigen Subsumtionen nicht als Gleichungen gelten, sondern dass vielmehr der Major jeweils den Minor um den Term x_1, bei $10_\times$) aber um das Glied x, übertrifft. Aussagenrechnerisch bewahrheiten sich demnach die Formeln:

Zu $^*7_\times$) $\quad \{(x \subseteq c) \subseteq (x \subseteq a)(x \subseteq b)\} = (c \subseteq ab) + (x = 0)$

etc. dagegen

Zu $^*10_\times$) $\quad \{(ab \subseteq x) \subseteq (c \subseteq x)\} = (c \subseteq ab) + (x = 1)$.

Indessen kommt denselben nur die *engere* Geltung zu: die Formeln müssen sicher zutreffen, wenn a, b, c, x, 1 Aussagen bedeuten, brauchen es aber (wie wir sogleich sehen werden) keineswegs zu thun, falls diese Symbole irgendwelche Gebiete vorzustellen haben. Die Formeln mussten darum auch mit dem Sterne ausgezeichnet werden.

Fig. 9.

In der That lassen leicht sich Beispiele nachweisen — wie Fig. 9 — in welchen

$$(x \subseteq c) = \dot{1}\,,\ \text{sowie}$$
$$(x \subseteq ab) = \dot{1}\,,\ \text{somit auch}$$
$$(x \subseteq c) \subseteq (x \subseteq ab)$$

ist, und doch *weder* $c \subseteq ab$ *noch* $x = 0$ besteht, sodass beispielsweise die erste unsrer Formeln, wie sie zuletzt unter „Zu $^*7_\times$)" angegeben, unmöglich für Gebiete allgemeingültig sein kann.

Um nun zuzusehen, was in den obigen Subsumtionen dem Minor noch hinzuzufügen ist, damit dieselben *auch im Gebietekalkul gültig* als Gleichungen angeschrieben werden dürfen, mögen wir uns die Aufgabe noch etwas vereinfachen.

Nach der schon die weitere Geltung erwieseuermassen besitzenden Äquivalenz der Def. $(3_\times)$ können wir nämlich das Subsumtionenprodukt $(x \Subset a)(x \Subset b)$ durch die eine Subsumtion $(x \Subset ab)$ ersetzen. Hernach kommen a und b nicht mehr getrennt, sondern nur mehr noch in der Verbindung ab vor, welche man bequemer durch ein einziges Gebietsymbol d ersetzen wird. Schreibt man alsdann noch a und b für c und d (resp. d und c), so ist offenbar, dass es sich nur noch um die Beantwortung der folgenden Frage handelt.

v) Es soll ermittelt werden, welche auf a, b, und x bezügliche Aussage noch hinzugefügt werden muss zu dem Minor einer jeden der folgenden vier Subsumtionen:

$$(a \Subset b) \Subset \{(x \Subset a) \Subset (x \Subset b)\}, \quad (a \Subset b) \Subset \{(b \Subset x) \Subset (a \Subset x)\},$$
$$(a = b) \Subset \{(x \Subset a) = (x \Subset b)\}, \quad (a = b) \Subset \{(b \Subset x) = (a \Subset x)\},$$

damit dieselbe in eine Gleichung übergehe, die *für beliebige Gebiete* a, b, x gültig.

Ich will die Betrachtung nur für die erste der vier angegebenen Subsumtionen durchführen, den Rest dem Leser überlassend.

Zunächst ist die Subsumtion für ein beliebiges x richtig: Wenn a in b enthalten, so muss, wenn x in a enthalten ist, es nach Pr. II auch in b enthalten sein. Nach einem späteren Satze — $\vartheta_\times$) des § 45 — würde sie sich sogar als eine blosse Umschreibung des Pr. II in seiner im § 29 ihm gegebenen aussagenrechnerischen Fassung $(x \Subset a)(a \Subset b) \Subset (x \Subset b)$ hinstellen lassen.

Um jene Subsumtion in eine Gleichung mit der linken Seite $(a \Subset b)$ umzuwandeln, genügt es, rechts das Zeichen Π_x voranzuschreiben:

$$(a \Subset b) = \Pi_x \{(x \Subset a) \Subset (x \Subset b)\}.$$

In der That folgt wie erwähnt die Subsumtion rechterhand als eine für *jedes* x gültige aus der zur linken. Und umgekehrt auch, wenn die Subsumtion rechts: $(x \Subset a) \Subset (x \Subset b)$ *für jedes* x gilt, so folgt auch die $a \Subset b$ zur linken. Dann gilt jene nämlich auch für $x = a$, und haben wir $(a \Subset a) \Subset (a \Subset b)$ oder $\dot{1} \Subset (a \Subset b)$, das ist nach Th. $\bar{5}_\times$): $(a \Subset b) = \dot{1}$. Mit dieser Betrachtung sind wir aber unsrer obigen Aufgabe noch nicht näher getreten.

Letztere fordert, dass wir die Subsumtion rechts, den Major $(x \Subset a) \Subset (x \Subset b)$, nach dem Minor $(a \Subset b)$ „entwickeln". Die Entwickelung ergibt sich etwa, indem wir jenen mit der Gleichung

$$\dot{1} = (a \Subset b) + (a \not\Subset b)$$

beiderseitig multipliziren. Weil aber

$$(a \subseteq b) \subseteq \{(x \subseteq a) \subseteq (x \subseteq b)\},$$

so ist nach Th. $\overline{20_{\times}}$), oder $(A \subseteq B) = (AB = A)$, auch:

$$(a \subseteq b)\{(x \subseteq a) \subseteq (x \subseteq b)\} = (a \subseteq b),$$

sodass also unser Major als Faktor beim ersten Term sich unterdrücken lässt, und nur noch beim zweiten angemerkt werden muss, wobei man ihn auch verwenden mag in einer der beiden nach λ) und Th. $\overline{33_{+}}$) Zusatz ihm äquivalenten Formen:

$$(x \subseteq b) + (x \not\subseteq a) \quad \text{oder} \quad (x \subseteq b) + (x \not\subseteq b)(x \not\subseteq a).$$

Mithin gibt die Gleichung:

$$\{(x \subseteq a) \subseteq (x \subseteq b)\} = (a \subseteq b) + (a \not\subseteq b)\{(x \subseteq b) + (x \not\subseteq b)(x \not\subseteq a)\}$$

die Lösung unsrer Aufgabe an.

Und ebenso haben wir mit der weiteren Geltung:

$$\{(x \subseteq c) \subseteq (x \subseteq a)(x \subseteq b)\} = (c \subseteq ab) + (c \not\subseteq ab)\{(x \subseteq ab) + (x \not\subseteq c)\}.$$

Der letzte Term — nicht aber der: $(x = 0)$ — ist behufs Erzielung dieser weiteren Geltung dem ersten Terme noch hinzuzufügen gewesen. Indessen könnte man freilich denselben durch Unterdrückung des Faktors $(c \not\subseteq ab)$ noch weiter vereinfachen (und sogar auch den ersten Term fortlassen).

Die Betrachtung dürfte lehrreich gewesen sein um den Gegensatz zwischen engerer und weiterer Geltung deutlichst hervortreten zu lassen.

Die im Obigen behufs Verifikation einer jeden Subsumtion unsres Aussagenkalkuls angeregte und auszuführen gewesene *Probe*, dass:

$$\text{Minor} + \text{Gewicht} = \text{Major}$$

sein muss (während Minor mal Gewicht verschwindet), lief hinaus auf den rechnerischen Gültigkeitsnachweis von Formeln des Klassenkalkuls, die zu den Übungsaufgaben des § 18 (Bd. 1, S. 384 sqq.) noch manche Beisteuer liefern.

Siebzehnte Vorlesung.

§ 33. Herkömmliche Einteilung der kategorischen Urteile nach Qualität und Quantität. Modifizirte Deutung der universalen in der exakten Logik und Unzulänglichkeit des früheren Kalkuls zur Darstellung der partikularen Urteile.

Die an die Formen der Wortsprache sich innigst anschmiegende herkömmliche Logik teilt die kategorischen Urteile ein nach der sogenannten „*Qualität*" derselben in *bejahende* und *verneinende*, nach ihrer „*Quantität*" in *universale* und *partikulare*.

Es entstehen durch die Kombination der beiden Einteilungsgründe die *vier* Arten der

universell (allgemein) \} \{ *bejahenden* (affirmativen) oder
oder *partikular* (besonders) \} \{ *verneinenden* (negativen)

Urteile.

Die vier Buchstaben *a*, *e*, *i*, *o*, als die hervorgehobenen Vokale der lateinischen Verbalformen:

*a*ss*e*rit (es bejaht, versichert) und n*e*g*o* (ich verneine, leugne)

werden nach alter Übung mnemonisch verwendet, um diese vier Arten von Urteilen unterscheidend kurz zu bezeichnen, und zwar sollte vorstellen:

a ein *universell bejahendes* Urteil, wie: *Alle A sind B.*
e ein *universell verneinendes* Urteil, wie: *Alle A sind nicht B*,
oder mit anderen Worten: *Kein A ist B.*
i ein *partikular bejahendes* Urteil, wie: *Einige A sind B.*
o ein *partikular verneinendes* Urteil, wie: *Einige A sind nicht B.*

Die Bedeutung der vier Buchstaben im Gedächtniss fest zu halten, zu memoriren, erleichtert der Doppelvers:

„Asserit a, negat e, sed universaliter ambo,
Asserit i, negat o, sed particulariter ambo".

Diese vier Buchstaben selbst etwa als Beziehungszeichen hier zu verwenden, die vier angeführten Schemata von Urteilen also mittelst:

$$AaB, \ AeB, \ AiB, \ AoB$$

auszudrücken, würde nicht ratsam erscheinen, in Anbetracht, dass wir schon die Buchstaben (und zwar beider Alphabete, auch des kleinen) konventionell zu verwenden pflegen zur Darstellung der *Objekte zwischen welchen* solche Beziehungen stattfinden können, nämlich der Subjekt- und der Prädikatklassen.

Ausserdem erscheinen — vom Standpunkte der Mathematik namentlich — die vier Buchstaben gewissermassen so unglücklich gewählt, wie nur möglich.

Eine derartige Verfügung über den Sinn des a würde jede anderweitige Verwendung des ersten Buchstabens des Alphabets präkludiren, vorweg ausschliessen. Dass e die Basis des natürlichen Logarithmensystems und $i = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit in der Mathematik bedeutet, müsste wenigstens bei Anwendungen der Logik auf diese Disziplin sehr stören. Und der Buchstabe o ist, wenigstens *geschrieben*, allzuleicht mit der 0 zu verwechseln, sodass man ihm in der Wissenschaft überhaupt fast gänzlich (und mit Recht) aus dem Wege geht. —

Um zunächst das Herkömmliche vorweg zu erledigen, so sei noch angeführt, dass wenn das Subjekt A in den vier Urteilsformen als das nämliche gedacht wird, desgleichen das Prädikat B, dann die Verhältnisse in welchen je eines der vier Urteile zu einem andern von ihnen steht, als „Gegensätze“ bezeichnet und mit verschiedenen Namen belegt worden sind. Über diese Benennungen gewährt rasche Übersicht das folgende die Figur eines vollständigen Vierecks bildende Schema.



Fig. 10.

Dass wir in der That die Urteile a und o, desgleichen die e und i — auch nach der für unsre Theorie maassgebenden Auffassung dieser Urteile, ja gerade erst kraft des hier denselben beizulegenden Sinnes — als *einander kontradiktorisch entgegengesetzte*, als *Verneinungen von einander* zu bezeichnen haben auf Grund des Begriffs der Negation bei Aussagen, dies wird sich, sofern es nicht ohnehin einleuchtet, noch syste-

matisch durch den Aussagenkalkul rechtfertigen. Auch mag es angehen die Aussagen a und e *konträre* (konträr entgegengesetzte) zu nennen.

Die Urteile a, i oder e, o subalterne, und gar die i, o subkonträre zu nennen, erscheint als ziemlich sinnlos und gänzlich belanglos. —

Über den mit unsern vier Urteilen zu verknüpfenden *Sinn* sind immerhin einige Auseinandersetzungen nötig, resp. in Erinnerung zu rufen.

Im gemeinen Leben, wenn gesagt wird: Alle A sind B, wird die Unterstellung gemacht, es wird als selbstverständlich vorausgesetzt, dass es Dasjenige, wovon man reden will, nämlich solche A, auch wirklich gebe. Dies ist begreiflich, da ohne weiteres keine Veranlassung ersichtlich ist, die jemand bestimmen könnte, über nichts und wieder nichts Aussagen zu machen. Hier bleibt also in der Regel ganz der Fall ausser Betracht, wo die Klasse A, das Subjekt der Aussage eine leere ist, gar keine Individuen umfasst, die Bedeutung 0 hat, wo es überhaupt keine A geben sollte.

Anders in der Wissenschaft, die einerseits auf die Allgemeinheit ihrer Sätze das grösste Gewicht zu legen Grund hat, und darum, wenn gesagt wird, alle A seien B, oder sollten B sein, in der Regel auch die Fälle mitumfassen muss, wo die Anzahl dieser A gleich eins oder gar gleich null (1 resp. 0 im arithmetischen Sinne) sein sollte. Untersuchungen, bei welchen A in Betracht kommen, gleichzeitig zu erledigen mit solchen Untersuchungen, bei welchen solche A überhaupt nicht in Betracht kommen können, weil es eben keine gibt, ist das Bestreben und liegt im Vorteil der Wissenschaft, die wo irgend möglich den beiden Klassen von Untersuchungen eine gemeinschaftliche, eine allgemeine Behandlung angedeihen lassen wird. Dazu kommt andrerseits noch, dass es sich in der Wissenschaft stets um die Ermittelung, Erkenntniss von noch Unbekanntem handelt. Da ist es denn oft fraglich, ob eine begrifflich bestimmte Klasse A überhaupt denkbar, respective wirklich ist, ob sie Individuen enthalten kann oder muss. Die Untersuchung dreht sich alsdann gerade darum, ob diese Klasse A (identisch) null ist, oder nicht, und müssen die an bestimmte Voraussetzungen über das fragliche oder „problematische" A anzuknüpfenden Schlüsse eben die beiden Möglichkeiten in Sicht behalten.

Aus diesem Grunde liessen wir in unsrer Theorie das Urteil a, nämlich auch den in Worte gekleideten Satz: „Alle A sind B" für gleichbedeutend gelten mit dem Satze: „Alle A, *sofern es welche gibt*, sind B" *und erkennen denselben auch unbedingt für richtig an für den*

Fall, wo es gar keine A geben sollte (sei es in der Mannigfaltigkeit des zu denken Möglichen überhaupt — immerhin jedoch mit der Beschränkung, die durch die Forderung einer „gewöhnlichen" Mn. charakterisirt wurde, vergl. § 7, 9 und 16 — sei es in der des realen, faktischen, thatsächlich Wirklichen — je nach dem Felde auf dem wir uns eben mit den Untersuchungen bewegen).

Die Subsumtion: $A \Subset B$, oder die nach Th. $38_{\times}$) mit ihr äquivalente Gleichung: $AB_1 = 0$ ist alsdann die exakte Wiedergabe des Urteils a in der Zeichensprache unsres Kalkuls. Dass wir diese Subsumtion für den Fall $A = 0$ anzuerkennen auch durch die Konsequenz genötigt sind, wurde schon wiederholt betont. Vergl. § 9, ϱ, σ).

Auch wenn die Klasse A nur *ein* Individuum enthält, das Urteil a also ein *„singuläres"* ist, bleibt das Gesagte in Kraft, und schliessen wir uns damit in der That nur der allgemeinen Gepflogenheit in der Logik an, die singulären Urteile mit zu den universalen zu rechnen, sie unter diese zu subsumiren. Auch hier in der That gibt das Urteil eine Aussage ab über die *ganze* Subjektklasse, was als das Wesen der Universalität des Urteils angesehen wird.

Dasselbe, was bei den universal bejahenden Urteilen soeben auseinandergesetzt worden, wäre nun auch in Bezug auf die universal verneinenden zu bemerken. Auch den Satz e, oder: „Alle A sind nicht-B" müssen wir hier für richtig anerkennen, wenn es keine A gibt, wenn das Subjekt A die 0 bedeutet, $A = 0$ ist.

Das Urteil e wird hienach in unserm Kalkul mit $A \Subset B_1$ oder $AB = 0$ angemessen dargestellt. —

Über den Sinn des unbestimmten Zahlworts *„einige"* (auch: „etliche, gewisse, manche" und mit einer noch ausserdem hinzutretenden Zahlbestimmung: „wenige, viele") schwankt der Sprachgebrauch.

Dasselbe kann gebraucht werden *im Gegensatz zu „alle"*, im Sinne also von „nicht alle" oder *„nur* einige". Diese, wol im ganzen seltenere Verwendungsweise *schliessen wir hier aus.* Sollten wir das im Sinne haben, so sagen wir ausdrücklich *„nur* einige" — denn hier wird es unerlässlich, wenn von „einige" gesprochen wird, damit allemal *denselben,* einen einheitlichen oder „ganz bestimmten" Sinn zu verknüpfen. Der Sinn kann Manches unbestimmt oder offen lassen, doch muss dies immer auf die gleiche Weise geschehen, und nicht bald so bald anders; das Unbestimmte muss in ein bestimmt abgegrenztes Gebiet eingehegt sein.

Immer wird das Wort „einige" gebraucht *im Gegensatz zu „keine"*,

für nicht-keine oder *mindestens eines*, wie dies auch das lateinische non-nulli durch seine Zusammensetzung zu erkennen gibt. Und dies ist der Sinn, den wir hier unentwegt festhalten werden.

Damit ist gesagt, dass wenn von „einigen" Individuen die Rede sein wird, diese sich insbesondere auch in der Einzahl befinden können.

Im gewöhnlichen Leben kann auch dieses anstössig erscheinen. Es könnte Jemand, der vor Gericht eidkräftig erklärt hat, er sei am hellen Tage von „einigen" Individuen überfallen und durchgeprügelt worden, riskiren, wegen falschen Zeugnisses zur Verantwortung gezogen zu werden, wenn die Untersuchung schliesslich herausstellt, dass der Überfall nur von *einem* Individuum verübt worden. Dies rührt daher, dass *„einige"* manchmal auch synonym gebraucht wird mit *„mehrere"*, welches den Gegensatz ausdrückt zu »einem oder keinem«. Genau genommen müsste man aber, sollte ein Fall der geschilderten Art wirklich vorkommen, gegen den Leiter der gerichtlichen Verhandlungen alsdann den Vorwurf erheben, die präzise Fragestellung an den Zeugen versäumt zu haben.

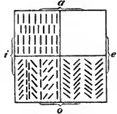


Fig. 11.

In ingeniöser Weise veranschaulicht Mr. Peirce die Tragweite, den genauen Sinn der (hier) mit den vier Urteilsformen a, e, i, o zu verknüpfen ist, durch eine der obenstehenden ähnliche Figur.

Ich will die vier Quadrate in welche das ganze Quadrat vorstehend zerlegt erscheint, kurz als „Quadranten" bezeichnen. Dann wird der Satz:

a) *Alle Striche* (im Innern des Quadranten) *sind vertikal*

gelten für die beiden oberen Quadranten, und zwar ausdrücklich auch für den ganz leeren rechts oben, in welchem sich gar keine Striche befinden. Der Satz:

e) *Alle Striche sind nicht-vertikal* (hier sogar schief, in Anbetracht, dass wagrechte fehlen), oder: *Kein Strich ist vertikal*

gilt für die beiden Quadranten rechterhand, und insbesondere auch wieder für den leeren. Der Satz:

i) *Einige Striche sind vertikal* (stehen aufrecht)

gilt für die beiden Quadranten linkerhand und namentlich auch für den links oben, in welchem nicht „nur einige", sondern sogar „alle" Striche scheitelrecht stehen. Endlich der Satz:

o) *Einige Striche sind nicht-vertikal*

gilt für die beiden untersten Quadranten und zwar ausdrücklich auch für den rechts unten, in welchem nicht blos einige sondern sogar alle vorhandenen Striche schief stehen.

Die vorstehenden Konventionen, zu welchen wir, wie auseinandergesetzt, durch die Konsequenz genötigt sind, haben aber in der That einen Misstand im Gefolge. Es ist der Umstand, dass nun mitunter das Wort „einige“ *mehr* besagen wird als „alle“, denn dieser letztern können es auch „keine“ sein, während jener erstern „mindestens eines“ sein muss. Nach unsern Festsetzungen fiel „alle A“ mit „kein A“ zu dem Begriffe des „Nichts“ zusammen, wenn es die A überhaupt nicht gibt; es schliessen hier „alle“ und „keine“ einander nicht unbedingt aus, während „einige“ und „keine“ dieses unbedingt thun. Als *misslich* ist dieser Umstand, dass nun mit „einige A“ eventuell *mehr* A gefordert oder gesetzt werden sollen, als mit „alle A“, insofern zu bezeichnen, als er höchlich dem Sprachgefühl zuwiderläuft.

In der gewöhnlichen Umgangssprache nun macht sich dieser Misstand allerdings nicht fühlbar — weil hier der Fall, dass ein Ding, worüber man spricht, nicht existirt oder gar, nicht denkbar wäre, nicht vorzukommen pflegt — so wenigstens in der Meinung Derer, die davon sprechen — sonach der anstössige Fall hier ohnehin sich stillschweigend *ausgeschlossen* findet.

In der Wissenschaft jedoch muss man an dergleichen Degenerationsfällen — den Fällen, wo einzelne Begriffswörter von dem ursprünglich für sie *beabsichtigten* Sinne anscheinend oder wirklich „ausarten“ (nämlich ganz andern Zwecken als den bei ihrer Bildung vorschwebenden konsequenterweise dienstbar werden, indem man jene dabei gar nicht mit vor Augen hatte) — sich nicht weiter stossen. Hier ist äusserste Strenge im konsequenten Festhalten an den allgemeinen und als solche wohlmotivirten Festsetzungen in erster Linie maassgebend; sich die Vorteile solcher Konsequenz zu sichern bleibt hier oberster Gesichtspunkt.

Es mag in dieser Beziehung erinnert werden an die „Segmente“ bei subtraktiver Teilung einer Strecke, wo doch auch der eine „Abschnitt“ grösser ist als die ganze Strecke — während so manche andere Gebilde der Geometrie, wie *die* unendlich entfernte Gerade resp. Ebene, der imaginäre Kugelkreis etc., gewiss in noch viel höherem Grade den Anfänger paradox anmuten — von derartigen Gebilden der Algebra ganz zu geschweigen.

Die universalen Urteilsformen a und e haben wir oben mit dem Zeichensystem, über das wir bislang verfügten, zur Darstellung gebracht, wir haben sie in Formeln gesetzt, in die Zeichensprache unsres Kalkuls übersetzt oder eingekleidet.

Es zeigt sich, dass *ohne weiteres* in der That *nur* bei diesen solches möglich ist — so wenigstens auf dem Standpunkte, auf welchem wir *vor dem Aussagenkalkul* mit § 28 angelangt waren — und wollen wir

jetzt an die Frage herantreten, wie denn hier auch die partikularen Urteilsformen i und o wiederzugeben sein würden?

Für den Bedarf unsres bisherigen Klassenkalkuls haben vollkommen ausgereicht: die beiden *Beziehungszeichen der Subsumtion und der Gleichheit und die* Operationen der *drei Spezies* (Multiplikation, Addition und Negation) *als ausgeführt an Klassen.*

Hier ist nun zunächst die Thatsache zu konstatiren: *dass mit diesen Mitteln allein die partikularen Urteile nicht ausgedrückt werden können,* dass also mit jenen beiden Beziehungszeichen und diesen drei Operationen, ausgeführt an den zum Subjekt und Prädikatbegriffe gehörigen oder beisteuernden beiden Klassen A, B und irgend welchen andern Klassen das gesteckte Ziel sich unmöglich erreichen lässt.

Boole und nach ihm Jevons haben allerdings geglaubt, dies zu vermögen — ein Irrtum, welchen ebenfalls geteilt zu haben Miss Ladd [1] pag. 24 implicite mir fälschlich zuschreibt.

Die erstgenannten wähnten durch eine Gleichung:

$$wA = wB,$$

in welcher w ein unbestimmtes Klassensymbol vorstellt, das Urteil i darstellen zu können: einige A sind B.

Dass aber solches nicht angängig ist, erkennt man augenblicklich, sofern man nur bemerkt, dass speziell für $w = 0$, desgleichen für $w = AB$, die obige Gleichung immer identisch erfüllt ist — ob einige A auch B sein mögen, oder nicht.

Es kann daher, solange man die Bedeutung von w offen lässt, durch die Gleichung $wA = wB$ keine Relation zwischen A und B ausgedrückt werden. [In der That gibt Elimination von w aus ihr blos $0 = 0$ zur vollständigen Resultante.]

Wollte man aber vielleicht fordern, dass mit w die Vorstellung einer Klasse verknüpft werde, welche eben diejenigen unter den A enthält, die B sind, somit auch diejenigen unter den B, die A sind, eine Klasse, die wir kürzer AB nennen mögen und bei welcher nur zu unterstellen bleibt, dass sie *keine leere*, d. i. von 0 verschieden ist, so würde zu entgegnen sein, dass eben diese Unterstellung die Hauptsache ist: Einige A müssen B sein, sobald die Klasse AB keine leere, nicht gleich 0 ist, sowie umgekehrt — und dass, wenn solches feststeht, der Ansatz $wA = wB$ ganz entbehrlich, eine überflüssige Weitläufigkeit wird. Gerade das Wichtigste zu einem blos mental zu ergänzenden Anhängsel, einem mit Stillschweigen übergangenen Vorbehalte von einer nichtssagenden Formalie zu machen, kann sich unmöglich empfehlen.

Der allgemeinste Ausdruck für diejenige Klasse w, welche bei ganz beliebig gegebenem Wertepaare A, B die Gleichung $wA = wB$ schon ohnehin erfüllt, würde beiläufig sein

$$w = u(AB + A_1 B_1),$$

worin u eine arbiträre Klasse bedeutet.

Boole hat zuerst sogar *verschiedene* unbestimmte Faktoren links und rechts in seiner Gleichung verwendet, hat für i geschrieben:

$$uA = vB$$

und dann bemerkt, dass man unbeschadet der Allgemeinheit für u und v das nämliche unbestimmte Symbol w beiderseits verwenden könne.

Es bedarf kaum noch des Hinweises, dass auch hierdurch nichts gewonnen wäre. Die Gleichung ist für irgend welche (auch für einander ausschliessende) A und B schon ohnehin erfüllt durch

$$u = Bz + A_1 x, \quad v = Az + B_1 y,$$

oder, was ebenso allgemein, der Form nach aber etwas weniger einfach erscheint, durch:

$$u = ABz + A_1 x, \quad v = ABz + B_1 y,$$

wo x, y, z vollkommen willkürlich. [Man braucht in der That nur in der ersten Form ABz für z zu nehmen, um die letztere, in dieser $Bz + x$, $Az + y$ für x, y zu nehmen, um die erstere zu gewinnen.] Und zwar würde nebenbei gesagt, sich nachweisen lassen, dass sie hierdurch auf die allgemeinste Weise erfüllt wird. Vergl. etwa § 25 Aufgabe 20, und anderes.

Die erwähnten Versuche zur Darstellung der partikularen Urteile im identischen Kalkul sind hienach als misslungen zu bezeichnen.

Die Unmöglichkeit lässt allgemein sich leicht darthun durch die folgende Überlegung:

Gesetzt das partikulare Urteil „Einige A sind B“ lasse überhaupt sich ausdrücken durch ein System von Subsumtionen oder auch Gleichungen, in welche die Klassen A und B nebst vielleicht irgend welchen andern Klassen $u, v, w, \ldots$ eingehn, so würde dieses System von Relationen nach Th. 24_+) und den Ergebnissen des § 19 äquivalent sein mit seiner „vereinigten“ Gleichung, und diese, rechts auf 0 gebracht, müsste die Form haben:

$$f(A, B) = 0,$$

wo man das Polynom linkerhand auch linear nach A und B entwickeln könnte in der Form:

$$xAB + yAB_1 + zA_1B + tA_1B_1 = 0,$$

in welcher die Koeffizienten x, y, z, t von A und B unabhängig erschienen.

Diese Relation müsste, was auch AB_1, A_1B und A_1B_1 für Werte haben mögen, erfüllt sein, sobald nur AB von 0 verschieden. Im Hinblick auf Th. 24_+) müssten daher die drei letzten Terme linkerhand allgemein verschwinden, sonach — cf. § 25, 21. Studie*) — müssten ihre Koeffizienten y, z, t gleich 0 sein, und wäre durch geeignete Bestimmung des von A, B unabhängigen Koeffizienten x überdies zu bewirken, dass $xAB = 0$ ist, sobald AB von 0 verschieden, *dagegen nicht gleich* 0 *wird*, sobald $AB = 0$

*) Diese wäre naheliegend noch etwas zu vertiefen, da ein Wert $A = 0$, oder $B = 0$ jetzt ausgeschlossen.

sein sollte. Durch diese Forderung treten wir aber in Widerspruch zu Th. $22_{\times}$), welches unbedingt $x \cdot 0 = 0$ anzuerkennen fordert. Somit ist die behauptete Unmöglichkeit erwiesen.

Im Grunde könnten wir schon dieses Beweises uns überhoben erachten, solange das Geforderte eben niemand zu leisten vermag.

Nach dem Vorangehenden wird nun ein Zeichen für *nicht-gleich*, zu schreiben $\neq$, (oder einer von den möglichen Stellvertretern desselben, wie $\not\in$, vergl. § 36) erforderlich und hinreichend sein, dem Mangel abzuhelfen. In der That wird

$$AB \neq 0$$

das Urteil i ausdrücken: „*Einige A sind B*“ — also auch: „Einige B sind A“ — eine Darstellung, die gegenüber dem Worttexte neben dem Vorzug der Kürze auch denjenigen besitzt, eine *symmetrische* Beziehung *auch symmetrisch wiederzugeben* (insofern nach dem Kommutationsgesetze BA und AB ohnehin für einerlei gilt).

Desgleichen wird der Ansatz:

$AB_1 \neq 0$ aussagen, was o: „*Einige A sind nicht B*“.

Wesentlich erscheinen diese partikularen Urteile — die „bejahenden“ sowol als die nach der herrschenden Terminologie als „verneinende“ hinzustellenden — doch als „*bejahende Existenzialurteile*“: *Es gibt A* die B (resp. nicht B) sind — wird ein den vorstehend kursiv gedruckten äquipollentes Urteil sein.

Z. B. für A = Säugetier, B = eierlegend, ist der Satz: Einige Säugetiere legen Eier, logisch gleichbedeutend mit dem Satze: Es gibt eierlegende Säugetiere (bekanntlich die Schnabeltiere, Ornithorhynchen, und noch gewisse andre Edentaten Australiens und Neuguineas).

Einige Metalle schwimmen auf dem Wasser, =: Es gibt Metalle, die auf dem Wasser schwimmen (resp., wenn man will, die im Wasser nicht untergehen) — wie bekanntlich Kalium, Natrium und andre „Leichtmetalle“.

Auf der ersten Etappe in der Entwickelung unsrer Disziplin, wie sie mit Bd. 1 zu einem Abschlusse gekommen, nämlich erst über die Zeichen = und $\not\in$ verfügend, vermochten wir nur die „verneinenden“ Existenzialurteile in Rechnung zu setzen. Fortan sind auch die bejahenden in unsre Zeichensprache einkleidbar und der Rechnung zugänglich.

Zu dem Ende war es nur nötig, ein Zeichen einzuführen, welches wie $\neq$ oder $\not\in$ den Wert einer „verneinenden Kopula“ hat. Den Besitz einer solchen haben wir in § 15 mit guten Gründen der Wortsprache abgesprochen, und es wird auch ein Vorzug des Kalkuls bleiben, dass er über sie verfüge.

Wie in der That es schon im identischen Kalkul ein Postulat gewesen ist, dass man jedes Gebiet negiren, seine Ergänzung, Negation bilden könne, so muss es fortan auch im Aussagenkalkul als ein Postulat anerkannt werden, dass man zu jeder Aussage auch deren Verneinung, Negation bilden könne.

Und als Verneinung der Gleichung $a = b$, sonach als $(a = b)_1$ wurde schon in § 31 die Ungleichung $a \neq b$ definirt.

Dass aber diese Operation des Negirens, von welcher wir *in Bezug auf Aussagen „systematisch"* im Klassenkalkul noch nicht Gebrauch gemacht haben, weil eben hiezu in diesem noch keine Nötigung vorlag (allerdings aber aus *didaktischen* Gründen bereits häufig im erläuternden Worttexte) — dass diese Operation fortan eine unentbehrliche ist, wofern wir die letzten Ziele unsrer Theorie erreichen wollen, dies dürfte schon aus den bisherigen Betrachtungen erhellen.

Selbst für den Aussagenkalkul, für den wir als Kalkul mit Aussagen konstanten Sinnes in § 32 die Entbehrlichkeit des Ungleichheitszeichens erkannt haben, dürfte aus der Einführung des letztern ein Gewinn zu erhoffen sein, indem es vielleicht auf Grund derselben möglich werden wird, auch für die Aussagen von mit der Zeit fliessendem, fluktuirendem oder variirendem Sinne bei konstantem Wortlaut (vgl. § 28) bestimmte Rechnungsregeln aufzustellen. Jedenfalls vermögen wir auch solche Aussagen noch vermittelst dieses Zeichens wenigstens auszudrücken. Konnten wir vermittelst des Ansatzes

$$A = 1 \quad \text{oder} \quad A_1 = 0, \qquad \text{resp.} \qquad A = 0 \quad \text{oder} \quad A_1 = 1$$

schon vordem statuiren, dass eine Aussage A *stets* resp. *nie* gelte, dass sie eine „zeitlich universale" sei, so werden wir jetzt auch in der Lage sein, auszudrücken, dass die Aussage A *manchmal*, mitunter, zeitweilig gelte resp. nicht gelte, dass sie „nach der Dimension der Zeit (in ihrer zeitlichen Erstreckung) partikularen" Charakter habe, und zwar in Gestalt des Ansatzes:

$$A \neq 0 \quad \text{oder} \quad A_1 \neq 1 \qquad \text{resp.} \qquad A_1 \neq 0 \quad \text{oder} \quad A \neq 1.$$

Wir wollen jedoch an dieser Stelle hierauf nicht weiter eingehen.

Als Quintessenz, sozusagen Moral, der vorstehenden Überlegungen wollen wir nur die Wahrnehmung statuiren: dass die Beziehnngen, an deren Betrachtung wir uns bislang genügen liessen, nicht das ganze Gebiet der für die Logik des Umfanges wichtigen Beziehungen erschöpfen, dass vielmehr noch Lücken in diesem Betreff anszufüllen sind.

Und diese Wahrnehmung mag nns veranlassen, nunmehr zu forschen nach dem *vollständigen* System jener Beziehungen, die Frage aufzuwerfen: *in wie vielerlei und was für Beziehungen zwei Gebiete, Klassen* A, B (oder auch Begriffe hinsichtlich ihres Umfanges, in ex-

tensiver Hinsicht) *überhaupt zu einander stehen können?* — sodann die Anfangs nur als Studium der Subsumtionsbeziehung $\neq\!\!\!\!\!\!\,\,\,\in$ hingestellte Hülfsdisziplin des identischen Kalkuls über dieses umfassendere Untersuchungsfeld auszudehnen.

§ 34. Die 5 möglichen Elementarbeziehungen Gergonne's und die 14 Grundbeziehungen in anschaulich geometrischer Einführung.

Indem wir der am Schluss des vorigen Paragraphen aufgeworfenen Frage zunächst mit der Anschauung näher treten, wollen wir streng *„dichotomisch“* verfahren, d. h. bei der Aufzählung der *zwischen zwei Gebieten* A, B denkbaren Beziehungsmöglichkeiten immer je *zwei* Abteilungen machen, wovon die eine dem Fall entspricht, dass ein gewisses Merkmal zutreffe, die andere dem Falle, wo dies nicht der Fall ist. Auf diese Weise werden wir nach dem Satz des ausgeschlossenen Dritten die Sicherheit erlangen, dass keine Möglichkeit übersehen oder ausgelassen wird. Vergl. § 16.

Zwei Gebiete A und B haben *entweder* keinen Teil gemein (Fall „a“), *oder* sie haben einen Teil gemein (Fall „a_1“).*)

(Ein drittes ist nicht denkbar.)

Im letztern Falle ist der gemeinsame Teil entweder A selbst (Fall a_1^0), oder er ist es nicht (Fall a_1^1).

Im erstern Unterfall a_1^0 treten die zwei Möglichkeiten auf, wo der gemeinsame Teil (zugleich auch) B ist (Fall a_1^{00}), und wo er es nicht ist (Fall a_1^{01}).

Im zweiten Unterfall a_1^1 ebenso: der gemeinsame Teil kann B sein (Fall a_1^{10}) oder auch B nicht sein (Fall a_1^{11}).

Demnach haben wir folgende *fünf* Möglichkeiten (von *vier*erlei „Art“, weil eine bezüglich A und B unsymmetrisch ist, und doppelt — durch a_1^{01} und a_1^{10} — vertreten erscheint):

a_1^{00}	a_1^{01}	a_1^{10}	a_1^{11}	a
(unter a_1^0, a_1)	(unter a_1^0, a_1)	(unter a_1^1, a_1)	(unter a_1^1, a_1)	
1te,	2te,	2te,	3te,	4te Art.

Dieselben können versinnlicht werden durch die folgenden Figuren, zu

*) Wir sehen damit gänzlich ab von der mit den Buchstaben a, e, i, o im vorigen Paragraphen verknüpften herkömmlichen Bedeutung.

welchen wir der Übersicht wegen sogleich die für den betreffenden Fall jeweils charakteristischen Formeln hinzusetzen,

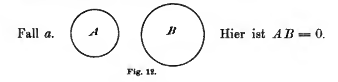
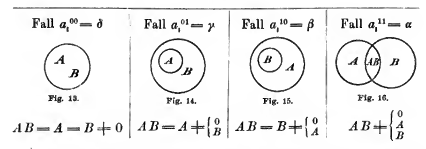


Fig. 12.



Fall $a_1^{00} = \delta$	Fall $a_1^{01} = \gamma$	Fall $a_1^{10} = \beta$	Fall $a_1^{11} = \alpha$
Fig. 13.	Fig. 14.	Fig. 15.	Fig. 16.
$AB = A = B \neq 0$	$AB = A \neq \begin{cases} 0 \\ B \end{cases}$	$AB = B \neq \begin{cases} 0 \\ A \end{cases}$	$AB \neq \begin{cases} 0 \\ A \\ B \end{cases}$

Die 5 erwähnten Beziehungen, in welche A und B zu einander treten können, nennen wir die *„Elementarbeziehungen“* unsres Gebietekalkuls, sowie überhaupt einer Logik des Umfanges.

In den vier letztern Fällen, zu deren Bezeichnung wir zugleich die bequemeren Namen δ, γ, β, α eingeführt haben, wenden wir zunächst eigentümliche Beziehungszeichen an, und zwar bezüglich wie folgt:

$A = B$	$A \subset B$	$A \supset B$	$A \between B$
gelesen:			
A gleich B	*A untergeordnet B*	*A übergeordnet B*	*A schnittig mit B*
identisch	*subordinirt*	*superordinirt*	*sekant*
d	f	e	g

doch werden sogleich zwingende Gründe zutage treten, *diesen letztern Propositionen grösstenteils noch eine weitergehende Bedeutung beizulegen*, also dass die Fälle d, f, e mit denen δ, γ, β sich nicht völlig decken, nämlich zwar mit ihnen gegeben sind, aus ihnen folgen, aber umgekehrt, sie nicht unbedingt nach sich ziehen, wogegen allerdings g mit α vollkommen zusammenfällt.

Dieses Auseinandergehen, diese Diskrepanz der Urteile d, f, e mit den die Elementarfälle statuirenden Aussagen δ, γ, β ist die unvermeidliche Wirkung der früher von uns vollzogenen *Adjungirung der Null*, welche ja ihrerseits eine wohlmotivirte war und vollzogen werden

musste, um die identische Multiplikation $A \cdot B$ zu einer allgemein anwendbaren oder unbedingt ausführbaren Operation zu machen.

Wir sind nämlich bereits verpflichtet, die Gleichung

$$0 = 0$$

als richtig anzuerkennen, das Beziehungszeichen der Gleichheit also als ein auch anwendbares gelten zu lassen, mit auszudehnen auf den Fall, wo eines der beiden verglichenen Gebiete und dann also auch das andre in 0 ausartet, degenerirt. Da für $A = B = 0$ auch $AB = 0$ ist, so gehört dieser Fall aber gar nicht zu a_1 (und folglich auch nicht zu a_1^{00} oder δ), sondern zu a.

Ebenso finden wir für die Zulassung des Falles $A = 0$ bei f und des Falles $B = 0$ bei e Bestimmungsgründe vor.

Beim Studium der Subsumtion kamen wir ja dazu, auch die Propositionen

$$0 \Subset B, \quad A \Supset 0$$

aufzustellen — cf. Def. $(2_\times)$ — und sollte eine solche Subsumtion $0 \Subset B$ nach § 1 uns ausdrücken, dass entweder $0 = B$ oder aber $0 \subset B$ sei. Sooft nun also nicht gerade $B = 0$, das heisst, sooft $B \neq 0$ ist, müssen wir auch:

$$0 \subset B, \text{ entsprechend desgleichen } A \supset 0$$

für ein von 0 verschiedenes A, stets gelten lassen. In diesen beiden Fällen ist nun aber wiederum $AB\,[= 0 \cdot B$ resp. $A \cdot 0] = 0$, sodass sie unter a, nicht aber unter a_1 und γ, resp. β, fallen.

Die Zeichen $=$, $\subset$, $\supset$ wurden schon in § 1 beschrieben, motivirt und gerechtfertigt. Das Zeichen $\between$, in dessen Wahl ich mit Wundt zusammentreffe, spricht für sich selbst, insofern es erstens zunächst *nicht ungeeignet* erscheint, vor allem nämlich gebührend symmetrisch ist — nicht nur, was minder wichtig, in Bezug auf oben und unten, wo die Symmetrie angezeigt erscheint in Ermangelung jeden Grundes, es nach diesen Richtungen verschieden zu gestalten — sondern auch, was erheblicher, in Bezug auf links und rechts, wie es denn auch eine symmetrische Beziehung zwischen den durch dasselbe als linke und rechte Seite zu verknüpfenden Ausdrücken darzustellen hat: sooft $A \between B$, wird auch $B \between A$ sich als gültig erweisen, sodass man die Propositionen dieser Art nun ohne weiteres, wird rückwärts lesen können. Zweitens aber empfiehlt sich jenes Zeichen als *das allergeeignetste* dadurch, dass es die wirkliche, zwischen den Gebieten A und B bestehende Beziehung in sich *abbildet, den wesentlichen Teil der Figur 16 kopirt:* man braucht die divergirenden Äste eines jeden der beiden in unserm Zeichen einander durchsetzenden Bögen nur fortgesetzt zu denken, sei es in's Unbegrenzte, sei es — noch besser — so, dass sie etwa je zu einem Ovale sich zusammenschliessen, so wird man die Konturen der Gebiete A und B vollständig in dem Zeichen erblicken, und

sehen, wie sie je nur einen Teil ihrer Fläche gemein haben. Das Zeichen gibt aber nur den wesentlichen Teil der Figur wieder: es drückt die Existenz des gemeinsamen Gebietes AB dadurch aus, dass es dieses vollständig in seiner Mitte dem Blick darbietet, zugleich lässt es erkennen, dass A sowol als B noch über diesen gemeinsamen Teil AB hinausgehen („overlap") — wie weit noch? dieses eben lässt unser Zeichen — als für die Beziehung nebensächlich — offen, dies allein verschmäht es, fertig auszudrücken. Das Zeichen besitzt in der geschilderten Hinsicht sogar einen Vorzug vor den Über- und Unterordnungszeichen, in Bezug auf welche wir bereits Bd. 1, S. 131 auseinandergesetzt haben, dass und warum ein ebenso getreues Nachbilden der Figur hier nicht angängig erscheint*), und wie man sich dafür zu behelfen hat. Ebenso wie diese ist es eminent mnemonisch.

Eine Proposition der vierten Art $\mathfrak{g}, = \alpha$, das ist eine Aussage der Form

$$A \overline{\underline{)(}} B$$

mögen wir eine „*Schnittbeziehung*" nennen. Leider fehlt ein international verwendbar erscheinendes Fremdwort, indem „Sektion" anderweitig ver-

---

*) Auf diesem Umstand beruht es wol schon vonhause aus, dass schwerlich das Ideal eines *vollkommen* ansdrucksvollen und zugleich konseqnenten Bezeichnungssystems für alle unsre Beziehungen überhaupt zu verwirklichen sein möchte. Vielmehr ist mit einem kleinen *Kompromisse* vorlieb zu nehmen:

Vom Zeichen $\overline{\underline{)(}}$ ist insbesondre zu merken, dass dasselbe als ein *einfaches* oder ursprüngliches zn gelten habe. Dasselbe darf nicht etwa als ein ans $\supset$ nnd $\subset$ zusammengesetztes angesehen und mit: $\subset$ *oder* $\supset$ gedeutet werden, so wie uns z. B. bisher zu gelten hatte:

$$(\subseteq) = (\subset + =)$$

Als eine fernere Unvollkommenheit nnsres Systems von Beziehnngszeichen verhehle ich mir auch keineswegs, betone ich vielmehr diesen Umstand: dass wenn wir ein solches als Alternative znsammengesetztes Zeichen mittelst vertikaler Durchstreichung *negiren*, wobei nach Th. 36) gelten muss:

$$(\not\subseteq) = (\not\subset \cdot \neq)$$

auch keineswegs die *Alternative* zwischen den beiden Beziehnngen $\not\subset$ nnd $\neq$, deren Zeichen sich doch aus dem resultirenden $\not\subseteq$ heranslesen lassen, demselben als Bedeutnng wird untergelegt werden dürfen, sondern vielmehr das Bestehen jener beiden Beziehungen hier als ein *gleichzeitiges* gefordert wird!

Unschwer könnten nnsre Bezeichnungs*prinzipien* auch als solche formulirt und durch gewisse Regeln (als Exceptionen) so verklausulirt werden, dass allgemein jede missverständliche Deutung der Zeichen ausgeschlossen wäre. Doch scheint es mir schon ausreichend, jene Prinzipien stillschweigend bei der individnellen Einführung der einzelnen Zeichen nur einfach zn bethätigen. Die Unvermeidlichkeit solcher Exceptionen thut dem rationellen und mnemonischen Charakter unsres Bezeichnnngssystems keinen Eintrag, und enthält den Hinweis, dass man, wie zumeist auch sonst im Leben, so auch auf diesem Felde, eben mit einem Kompromisse sich zn begnügen habe. Solcher bleibt der baaren Systemlosigkeit doch bei weitem vorzuziehen.

geben ist, *Tmesis* zu unbequem auszusprechen. Vielleicht würde *„Intersektion“* schon einigen Beifall finden. Am liebsten möchte ich die Neubildung *„Sekanz“* riskiren, die wenigstens Anklänge findet, ohne selbst lateinisch zu sein, doch im Latein zahlreiche Analoga besitzt. Die ältere Logik scheint solche Beziehungen ganz ausser Betracht gelassen zu haben, weshalb ein Name von alter Übung nicht zu finden ist. In neueren Werken begegnet man zuweilen für die in jene Beziehung eingehenden (eventuell den Klassen A, B zugeordneten) Begriffe dem Namen der *„kreuzenden“* oder Kreuzungsbegriffe, und wir könnten darnach auch von der gedachten Beziehung als von einer „Kreuzung“ reden.

Es erschiene dies nicht ganz unpassend, wenn dabei nur etwa an die Kreuzung zwischen Pflanzenspezies oder von Rassen aus dem Tierreiche gedacht wird. Dagegen verstiesse es höchlich gegen den mathematischen Sprachgebrauch, welchen wir für unsre Disziplin einer Berücksichtigung in erster Linie würdig erachten.

In Geometrie etc. wird der Fall, wo zwei Gebilde z. B. Körper, Flächen oder Linien sich mit nur einem Teile ihrerselbst gegenseitig durchdringen, regelmässig als ein *Schneiden* derselben bezeichnet und der gemeinsame Teil heisst die Schnittfigur; so schneiden sich zwei Gerade in einem Punkt, zwei Flächen zumeist in einer Linie, etc. Das Wort wird *nicht* gebraucht, wenn die Schnittfigur mit dem einen Gebilde selbst zusammenfällt, das eine also ganz im andern liegt: man sagt nicht: der Punkt schneide die Ebene, in der er liegt, und wenn gesagt wird, eine Gerade schneide eine Ebene, so ist damit ausdrücklich der Fall *ausgeschlossen*, wo die Gerade in die Ebene hineinfällt. Dieser Sprachgebrauch entspricht also vollkommen der hier in Betracht kommenden Beziehung.

Als einander „kreuzende“ Gerade z. B. werden dagegen solche Gerade in der Geometrie bezeichnet — entgegen wol dem Sprachgefühl im gemeinen Leben — die *ohne einen Punkt gemein zu haben* (und ohne in einunddieselbe Ebene zu fallen) im Raume an einander vorbeigehen — ein Fall, der nicht in α sondern in a sein Analogon fände.

Aus diesem Grunde — um hier nicht Verwirrung zu stiften, resp. die schon vorhandene zu vermehren — werden wir uns der eben erwähnten Benennung enthalten.

Will man die Urteile d, f, e, g *in der Wortsprache* darstellen, so kann dies ohne Abweichung vom Sprachgebrauche nur mittelst je zweier Sätze geschehen, und zwar:

d. Alle A sind B, und alle B sind A.

f. Alle A sind B, aber nicht alle B sind A.
(sive: einige B sind nicht-A).

e. Alle B sind A aber einige A sind nicht-B.

g. Nur einige A sind B und nur einige B sind A.
(sive: einige B sind nicht A).

Oder man muss gar für den letzten Fall zu drei Sätzen seine Zuflucht nehmen, als da sind:

g. Einige A sind B, aber einige A sind auch nicht B, und einige B nicht A.

Über den Sinn dieser Aussagen in den auch hier bei d, f, e zulässigen Degenerationsfällen wo es keine A (oder auch nur ein A) resp. B gibt, ist der vorige Paragraph nachzusehen.

Es gelingt, dieselben Beziehungen auch *je durch einen einzigen Satz* auszudrücken, wenn man sich — über den Sprachgebrauch hinausgehend — eines Verfahrens bedient, welches W. Hamilton*) aufgebracht, und von welchem Jevons und Andere viel Aufhebens gemacht haben. Dasselbe wird die *Quantifikation des Prädikates* genannt, und besteht darin, dass man auch dem Prädikate (wie schon innerhalb des Sprachgebrauchs den verneinenden Artikel „keine", so ausserhalb desselben) die Zahlbestimmung „alle" oder „einige" beigesellt.

Hierdurch bekommen wir für:

$d = (A = B)$: *Alle A sind alle B.*

$f = (A \subset B)$: *Alle A sind nur einige B.*

$e = (A \supset B)$: *Nur einige A sind alle B.*

$\alpha = g = (A \between B)$: *Nur einige A sind nur einige B.*

Man kann auch die Partikel „nur" fortlassen, wenn man en bloc erklärt, dass *hier* „einige" auch im Gegensatz stehen solle zu „alle".

Im übrigen *sollten* diese Urteile als *umkehrbare, konvertible* gelten (wie früher, vergl. Bd. 1, S. 242, wenn wir sagten: „dies ist alles", oder: „dies ist einiges von dem, was man schuldet", oder dergleichen), die Kopula „sind" sollte also die Kraft des *Gleichheits*zeichens haben, das Urteil die Identität von Subjekt und Prädikat statuiren. Es wird sich jedoch sogleich zeigen, dass dieses nicht durchaus angängig.

Bei „alle A" und „alle B" muss wieder auch der Fall zugelassen sein, dass solche gar nicht in Betracht kommen können, weil es sie gar nicht gibt, dass also die Bedeutung der betreffenden Klasse 0 oder „nichts" ist.

Bei d hat dies keine Schwierigkeit im Gefolge. Dagegen bei f und e müsste man entweder zugeben, dass „nur einige" B resp. A sich auch auf 0 reduziren dürften — entgegen den fundamentalen, die Bedeutung von „einige" stipulirenden Festsetzungen — oder man muss die Sätze f, e — anstatt, wie gesagt, als Gleichungen — in diesen Grenzfällen doch nur als Subsumtionen auffassen, den letztern e dann umkehrend in: Alle B sind nur einige A.

Am ungezwungensten würde man sagen:

*) Die Priorität gebührt nach Jevons[11] dem Botaniker G. Bentham.

f. Alle A, *falls es welche gibt,* sind nur-einige B,
und analog e, nur mit vertauschtem A und B; indessen hätten wir dann abermals nicht einfache Sätze.

Am besten wird man auf das ganze Kunststück verzichten, indem dasselbe augenscheinlich zuwiderläuft dem Grundsatze des „Quidquid de omnibus valet, valet etiam de nonnullis ac de singulis“.

Gilt nämlich z. B. „Alle A sind *alle* B“, so wird doch (die Anzahl der A grösser als 1 vorausgesetzt) gerade *nicht* gelten dürfen: Jedes A ist *alle* B, und ebensowenig zu gelten brauchen: Einige A sind *alle* B!

Jener Grundsatz aber beherrscht doch nun einmal notorisch unser *gesamtes Denken in Worten*, und es kann nicht nur nicht vorteilhaft, sondern auch nicht einmal unbedenklich sein, denselben mittelst der „Quantifikation des Prädikates“ durchbrechen zu wollen. Der Versuch erscheint mir als einer der Ausflüsse einer weitverbreiteten Tendenz (in der auch Jevons vielfach sündigt), die *Kopula* gewaltsam als Gleichheitszeichen zu deuten, das (in Wahrheit *Subsumtions*-)Urteil als eine Identitätsbehauptung hinzustellen.

Für die „Elementarbeziehungen“ δ, γ, β hätten wir noch, analog, die Formulirung:

δ. Alle A — *und solche gibt es* — sind alle B.
γ. Alle A, *dergleichen es gibt*, sind nur einige B.
β. — gerade wie γ, nur A und B vertauscht, oder auch selbständig
Nur einige A sind alle B (und gibt es folglich Individuen dieser letzteren Klasse). —

Auch diese letztern drei Beziehungen vermittelst eigener Beziehungszeichen darzustellen, werden wir selten Veranlassung haben. Man mag etwa dieselben drei Zeichen, wie oben bei d, f und e wählen, *zur Unterscheidung nur mit einer darübergesetzten kleinen* 0 *versehen*, sodass (wenn wir vorgreifend auch noch den Fall a mit seinem später zu motivirenden eignen Beziehungszeichen mit aufnehmen) wir die folgende Übersicht haben:

I⁰. Tafel der Elementarbeziehungen.

$$a_{\prime}^{00} = \delta = (A \mathrel{\overset{\circ}{=}} B)$$

$$a_{\prime}^{01} = \gamma = (A \mathrel{\overset{\circ}{\subset}} B), \qquad a_{\prime}^{10} = \beta = (A \mathrel{\overset{\circ}{\supset}} B)$$

$$a_{\prime}^{11} = \alpha = (A \mathrel{\between} B)$$

$$a = (A \mathrel{\ast} B),$$

worin uns die drei ersten an die früheren Beziehungen erinnern mit

dem Zusatze, dass das Verschwinden, *Nullsein* jedes Terms zur Linken oder Rechten *ausgeschlossen* werde. Für den terminus major, das Prädikat der Unter- oder Überordnung f resp. e wird sich dies ohnehin verstehen — siehe weiter unten, § 35, 4°) und 4°)′ — aber für den terminus minor, das Subjekt — mithin für eben *den* Term, gegen welchen die über das Zeichen gesetzte 0 herabzugleiten droht — muss dies ausdrücklich ausgeschlossen werden, und zeichnet gerade durch diese Ausschliessung die Elementarbeziehung oder *„elementare Unterordnung"* sich aus vor der Unterordnung (schlechtweg) f, die *„elementare Überordnung"* β vor der Überordnung e. Ebenso hebt sich die *„elementare Gleichsetzung"* vermittelst des Zeichens $\overset{\circ}{=}$ („elementar gleich") von der gewöhnlichen Gleichsetzung, vermittelst $=$, dadurch ab, dass sie die zu vergleichenden Dinge als existirend setzt, hinstellt oder voraussetzt, auf Nullen also *nicht* anwendbar ist, wogegen die letztere diese Frage nach der Existenz (innerhalb des Untersuchungsfeldes) des Verglichenen offen lässt.

Im Gegensatz, grösstenteils, zu den 5 *„Elementar*beziehungen" bezeichne ich die durch die Formeln d, f, e, g dargestellten als *„Grundbeziehungen"*. Diese letztern umfassen also diejenigen Modifikationen, welche an den Elementarbeziehungen zufolge Adjunktion der Null anzubringen waren. Die Mannigfaltigkeit der „Grundbeziehungen" wird aber mit dem Bisherigen noch nicht ganz abgeschlossen sein.

Wir erinnern zunächst, dass *behufs Anlehnung an die Wortsprache* ein Beziehungszeichen eingeführt werden musste, welches die *Kopula* des Urteils wiedergibt. Das *Subsumtionszeichen* $\Subset$ und seine Umkehrung $\Supset$ (die man das *Supersumtionszeichen* nennen könnte), diese beiden verdienen sicherlich, unter die Zeichen der logischen „Grundbeziehungen" aufgenommen zu werden. Und dies nicht nur wegen ihrer Wichtigkeit als Bindeglieder zwischen Sprache und Kalkul, sondern auch unter dem vorhin betonten Gesichtspunkte:

Der aus zwei Elementarfällen zusammengesetzte Kollektivfall $a_1^0 = a_1^{00} + a_1^{01}$ statuirt in der That, dass zwischen A und B eine Subsumtion, Einordnung

$$A \Subset B$$

stattfinde; doch ist hiermit die Bedeutung dieser letzteren wieder nicht erschöpfend angegeben; vielmehr verlangt a_1^0 noch obendrein, *dass sowol A als B von 0 verschieden seien* — indem unter dem Hauptfall a_1, in welchem a_1^0 als Unterfall enthalten ist, das Produkt AB nicht verschwinden darf — *während bei der Subsumtion auch diese Fälle zugelassen sind.*

Ebenso kann man, wenn die Alternative zwischen den Elementarfällen $a_{,}^{00}$ und $a_{,}^{10}$, m. a. W. der Kollektivfall $a_{,}^{00} + a_{,}^{10}$ vorliegt, $A \mathrel{=\!\!\!\supset} B$ schreiben; indess fordert jener Kollektivfall noch ausserdem, dass B und folglich auch A von 0 verschieden sei, wogegen letztere Proposition auch diese Möglichkeiten zulässt.

Endlich ist noch für den Elementarfall a ein Zeichen zu vereinbaren, und damit auch für dessen Negation, den aus der Alternative zwischen den vier übrigen Elementarfällen sich zusammensetzenden Kollektivfall $a_{,}$.

Nun werden wir ohnehin das Zeichen für die Negation einer jeden Beziehung immer dadurch aufbauen, dass wir das Zeichen der letzteren mit einem Vertikalstrich durchsetzen, dasselbe so gewissermassen *ausstreichen* — beziehungsweise, wenn in ihm bereits ein solcher Strich vorhanden sein sollte, diesen tilgen.

Darnach steht es zunächst in unserm Belieben, für die Beziehung a oder für die $a_{,}$ ein ursprüngliches Zeichen auszudenken, und ziehen wir das letztere vor, weil sich für diese Beziehung $a_{,}$ naturgemäss das in folgender Proposition vorgeschlagene Zeichen darbietet als *dasjenige, welches die Zeichen der vier Unterfälle von* $a_{,}$ *in sich vereinigt;* wir drücken den Fall $a_{,}$ aus durch den Ansatz:

$$A \mathrel{)\!\!\!=\!\!\!(} B$$

(gelesen: A, *gebietgemein*), korrelativ* B) — so wenigtens im Drucke, wogegen schriftlich der bequemer zu schreibende Ansatz:

$$A\,(=)\,B$$

dafür eintreten mag, von welchem auch schon in [1] vielfältig von mir Gebrauch gemacht ist, und dessen Zeichen durch hinreichende Verlängerung seiner Striche in das vergrösserte des vorigen überginge.

Im obigen Zeichen der Gebietgemeinschaft erblickt man in der That: das Gleichheitszeichen zusammen mit den Zeichen der Unter-, der Überordnung und der Schnittigkeit, Sekauz. Allerdings sind aber die drei erstern von diesen vier Zeichen hier nur in ihrer *„elementaren“* Bedeutung zu nehmen, bei welcher das Nullsein von A sowol als B ausgeschlossen war — eine Bedeutung die oben durch eine über das Zeichen gesetzte kleine Null jeweils vor der gewöhnlichen gekennzeichnet wurde.

---

*) Stellen A und B vieldeutige Zahlenausdrücke vor, so ist *„wertgemein“* (resp. „Wertgemeinschaft“) der passendste Ausdruck. In diesem Sinne habe ich das Zeichen schon vielfach auf seine Brauchbarkeit erprobt und als ein in der „absoluten Algebra“ ganz unentbehrliches erkannt.

Strenge genommen müsste also auch hier noch eine solche o über unser Zeichen $\mathrel{\asymp\!\!\!\!\!=}$ geschrieben werden; doch unterlassen wir dieses, nicht allein, um eine Überladung des Zeichens zu vermeiden, sondern auch, weil jene o doch nur ein Unterscheidungsmerkmal sein sollte, hier aber kein Anlass erfindlich sein wird, dem mit der o versehenen Zeichen ein gleiches ohne die o mit einer abweichenden Bedeutung gegenüberzustellen.

Von „Gebietgemeinschaft" als von einer besonderen Relation kann selbstverständlich nur unter Ausschluss, Ignorirung des Wertes 0, des Nullgebietes gesprochen werden, welches letztere ja nur ein uneigentliches, fiktives Gebiet vorstellt, das man einführte um von solch gemeinsamem Gebiete *stets* reden zu können, auch wenn eigentlich gar keines vorhanden.

Der Vorgang hat ein Analogon in der Zahlentheorie, wo man auch sagt, zwei Zahlen hätten *keinen* gemeinsamen Faktor oder Teiler (sie seien teilerfremd, relativ prim), wenn sie *nur* den Teiler 1 gemein haben, der sich überall von selbst versteht.

Wir sagen: zwei Gebiete seien *nicht* gebietgemein, gebietefremd (disjunkt), wenn sie nur das Nullgebiet gemein haben, welches allen ohnehin gemeinsam ist.

Darnach wird nun der Fall der Elementarbeziehung a im Drucke durch:

$$A \mathrel{\not\asymp\!\!\!\!\!=} B$$

gelesen: $\quad$ A *disjunkt* mit B,

und handschriftlich etwas bequemer mit:

$$A \,(+)\, B$$

darzustellen sein, und haben wir in übersichtlicher Zusammenstellung die *sieben* als „bejahende" zu bezeichnenden sogenannten „Grundbeziehungen" (die wir als Aussagen mit den nebenstehenden Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets darstellen wollen), wozu noch ebensoviele als deren Verneinungen hinzukommen:

II⁰. Tafel der 7 Paare von Grundbeziehungen:

$$\begin{array}{ll}
a_1 = \{A \mathrel{\asymp\!\!\!\!\!=} B\}, & a = \{A \mathrel{\not\asymp\!\!\!\!\!=} B\} = \{A \mathrel{\asymp\!\!\!\!\!=} B\}_1, \\
b = \{A \ni B\}, & b_1 = \{A \not\ni B\} = \{A \ni B\}_1, \\
c = \{A \in B\}, & c_1 = \{A \notin B\} = \{A \in B\}_1, \\
d = \{A = B\}, & d_1 = \{A \neq B\} = \{A = B\}_1, \\
e = \{A \supset B\}, & e_1 = \{A \not\supset B\} = \{A \supset B\}_1, \\
f = \{A \subset B\}, & f_1 = \{A \not\subset B\} = \{A \subset B\}_1, \\
g = \{A \asymp B\}, & g_1 = \{A \not\asymp B\} = \{A \asymp \cdot B\}_1.
\end{array}$$

Zwei von diesen Grundbeziehungen: a und $g = a_1^{11} = \alpha$ sind zugleich Elementarbeziehungen, deren übrige drei wir bercits unter I⁰ mit zur Darstellung gebracht haben.

Vertauscht man in unsern 14 zwischen A und B eine Grundbeziehung behauptenden Aussagen a_1, b bis g_1 die beiden „Seiten“ oder Gebiete A und B, so erhält man 14 neue Aussagen, die wir von den vorigen durch einen Accent unterscheiden wollen, sodass nun auch die Bedeutung der Symbole

$$a_1', b', c' \ldots g', a', b_1', c_1', \ldots g_1'$$

verständlich sein wird.

Das Bisherige sollte nun eigentlich blos zur *Motivirung* der Einführung gerade dieser Beziehungen und der für sie erkorenen Beziehungszeichen dienen, und ist es unsre nächste Aufgabe, den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Beziehungen in jeglicher Hinsicht klarzulegen und zu begründen.

Zu dem Ende werden wir zunächst nach einer *„analytischen“* Definition der sämtlichen Beziehungen uns umzusehen haben, worunter zu verstehen ist: ihre Erklärung vermittelst der uns nach wie vor als die *fundamentale* geltenden Beziehung $\in\!\!\!\!-$ der Subsumtion, und ihrer Verneinung $\not\in\!\!\!\!-$; demnach werden alle Beziehungsurteile durch solche vom Typus c oder c_1 erst auszudrücken sein.

Zum Begriff dieser Subsumtionsbeziehung sind wir bei unserm systematisch-*kombinatorischen* Vorgehen nur so nebenher gelangt. Die Logik der Alten hat aber die Aufsuchung der Beziehungen in welchen Klassen oder Begriffsumfänge zu einander treten können, überhaupt nicht auf solche Weise angegriffen, sondern sich einfach *an die Sprache angelehnt*, welche uns unmittelbar nur die Möglichkeit bietet, vermittelst der (salva venia) Kopula „ist“ oder „ist nicht“ von einem Subjekte A ein Attribut oder Prädikat B zu *bejahen* oder zu *verneinen*. Indem sie noch den Umfang des Subjekt*begriffes*, falls ein solcher vorhanden, durch Beisetzung der Zahlbestimmung „alle“ oder „einige“ — wie man sich in der That ausdrücken mag: — *„quantifizirt“*, gelangt die Sprache zu den bekannten vier Hauptformen von Urteilen, die wir in § 33 besprochen haben.

Der Umstand dass die Sprache *beim Prädikate auf die Quantifikation*, und *beim Subjekte auf Anwendung der Negation* (Qualifikation?) fast unbedingt *verzichtet* gibt ihr ein eigentümliches Gepräge (feature).

Den gegenteiligen Versuch De Morgan's, durch welchen die Vierzahl der Urteilsformen noch zwei mal verdoppelt wird, halte ich für ein

müssiges Beginnen. Will man ergänzend eingreifen, so sehe man von Ausdrucksformen in der Wortsprache, sofern vollends sie doch nicht legitim, nicht durch den Usus sanktionirt sind, ab, man achte nur auf den Sachverhalt selber und halte sich an dessen angemessenste Ausdrucksweisen, wie sie nur eine rationelle Zeichensprache schaffen mag.

Zu denken gibt es, dass jene vier Urteilsformen sich mit den fünf möglichen Elementarbeziehungen keineswegs decken! Die Urteile sind doch gerade bestimmt, Beziehungen zwischen Begriffen zu konstatiren — nach ihrem Inhalte und demzufolge auch nach ihrem Umfange.

Gegenüber der durch die Wortsprache geforderten Einteilung der Urteile in die bekannten vier Klassen haben aber die fünf Elementarbeziehungen, in welchen, wie gezeigt, hinsichtlich ihres Umfangs Begriffe überhaupt zu einander stehen können, lange nicht die gebührende Beachtung gefunden, und finden dieselbe in Logikbüchern der ältern Schule auch heute nicht.

Die Wahrnehmung dieser 5 Beziehungen ist vielmehr von des Aristoteles Zeiten (anno minus 384 . .—322 unsrer Zeitrechnung) bis zum Anfang des gegenwärtigen Jahrhunderts (+ 1816) gänzlich unterblieben, wo sie, soviel bekannt, zuerst Gergonne[1] ausdrücklich an das Licht zog.

Dass eine Sprache, welche nur diese letztern Beziehungen wiedergäbe oder auszudrücken fähig wäre, viel exakter, präziser oder ausdrucksvoller sein müsste, als unsre heutigen Wortsprachen, ist die Grundidee von dieses Mathematikers *„Dialectique rationelle“*.

Auf dieselben 5 Beziehungen kommt 1877, wie es scheint unabhängig von Gergonne, auch Fr. A. Lange[1]; Twesten[1] stellte ihrer viere auf; ausserdem finde ich Gergonne's Arbeit nur bei Venn[1] citirt.

Inwiefern diese Idee zutreffend ist, werden wir in § 48 sehen.

Jedenfalls gibt sich in dem Umstande, dass gedachte Beziehungen so lange übersehen wurden, eine übermässige Abhängigkeit, Unfreiheit der Denklehre von dem Gängelbande der in die Fesseln verbaler Ausdrucksformen gebannten Ausdrucksgewohnheiten zu erkennen.

§ 35. Analytische Definition der Grund- und Elementarbeziehungen und ihre Zurückführung auf einander.

Wir werden nunmehr mit den vorhin eingeführten Aussagen a_1 bis g und α bis δ, sowie mit deren Negationen a bis g_1 etc., welche selbst wieder als Aussagen zu bezeichnen sind, zu rechnen bekommen nach den Regeln des Aussagenkalkuls, wozu in Erinnerung gebracht werden mag, dass sooft das Symbol irgend einer von diesen Aussagen in Rechnung gesetzt wird, dasselbe zu deuten ist als die *Klasse der*

Gelegenheiten, bei welchen ebendiese Aussage anwendbar oder zulässig ist, gilt.

Als vonhause verständlich und allein bekannt werde wieder nur angesehen das Subsumtionszeichen $\Subset$, sei es zwischen Gebiete oder Klassen gesetzt, sei es auch (insbesondere) zwischen Aussagen. Auch verstehen wir von selbst das (identische) Produkt zweier Aussagen, durch welches die Faktoraussagen als gleichzeitig gültige hingestellt werden.

Mit diesen Mitteln ist auch bereits die Gleichheit, und insbesondre die Aussagenäquivalenz erklärt durch eine (unter andern nachher wieder zu rekapitulirende) allgemeine Festsetzung. Durch diese Mittel hat auch die identische 0 und 1 des Gebiete- wie des Aussagenkalkuls, es hat das identische Produkt zweier Gebiete oder Klassen, sowie deren Summe, und damit auch (Produkt und) Summe von Aussagen ihre Definition in der bisherigen Theorie bereits systematisch gefunden, desgleichen endlich die Negation eines Gebietes und speziell auch die einer Aussage.

Es kommt aber noch darauf an, nunmehr auch zu definiren die sonstigen aufgezählten „Beziehungen" als solche zwischen Gebieten und damit auch wiederum als solche zwischen irgend denkbaren Aussagen.

Am einfachsten definirt sich:

[1⁰] $b = c'$, somit auch $b_1 = c_1'$,

das heisst: mittelst der Festsetzung:

$$\{A \Supset B\} = \{B \Subset A\}$$

wird als Sinn der Aussage linkerhand die Subsumtion rechterhand hingestellt. Es findet damit die aus didaktischen Gründen schon am Schluss des § 3, Bd. 1, S. 167, angeführte (dort unnumerirt gelassene) Definition der eventuellen Überordnung hier im System nun ihre Stelle.

Weiter ist zu definiren:

[2⁰] $d = cc' = bc$, sonach $d_1 = c_1 + c_1' = b_1 + c_1$,

d. h. mittelst:

$$\{A = B\} = \{A \Subset B\}\{B \Subset A\} = \{A \Subset B\}\{A \Supset B\}$$

wird der Begriff der Gleichheit auf den der Subsumtion gegründet — was wesentlich nur eine Reproduktion unsrer alten Def. (1) ist.

Hiernach erscheint der Gebrauch der Symbole b, c, d fortan legitimirt.

Wir müssen uns demnächst auch auf die Aussagen $A = 0$ sowie $B = 0$ berufen, weshalb wir auch diese mit Symbolen zu bezeichnen haben, und zwar bedeute:

[3°] $$h = \{A = 0\}, \qquad h' = \{B = 0\} = k.$$

Alsdann gelten folgende Hülfssätze, deren wir gelegentlich bedürfen.

Erstens. Ist $A = 0$, so gilt nach Def. $(2_\times)$ auch $A \mathrel{\in\!\!\!\!=} B$, d. h. es ist:

$$h \mathrel{\in\!\!\!\!=} c;$$

von dieser Subsumtion aber sind nach Th. 43), Anm. 2 (Bd. 1, S. 400) folgende Umschreibungen zulässig:

$$c_1 \mathrel{\in\!\!\!\!=} h_1, \quad h = hc, \quad c = h + c, \quad h_1 = h_1 + c_1, \quad c_1 = h_1 c_1, \quad hc_1 = 0, \quad h_1 + c = 1.$$

Um darauf Bezug zu nehmen wollen wir von diesen allen nur diejenigen hervorheben, welche kein +Zeichen enthalten, — und analog verfahren wir auch künftig in ähnlichen Fällen — demgemäss notiren wir als ersten Hülfssatz:

1°) $$h \mathrel{\in\!\!\!\!=} c, \quad c_1 \mathrel{\in\!\!\!\!=} h_1, \quad h = hc, \quad c_1 = h_1 c_1, \quad hc_1 = 0.$$

Vertauscht man hierin in Gedanken A und B, so erhält man dazu noch ebenso:

1°)′ $$k \mathrel{\in\!\!\!\!=} b, \quad b_1 \mathrel{\in\!\!\!\!=} k_1, \quad k = kb, \quad b_1 = k_1 b_1, \quad kb_1 = 0.$$

Zweitens. Ist $A \mathrel{\in\!\!\!\!=} B$ und $B = 0$, so folgt nach Th. $5_\times$) auch $A = 0$, d. h. es ist:

2°) $$ck \mathrel{\in\!\!\!\!=} h, \quad \text{woraus:} \quad ch_1 k = 0, \quad chk = ck, \quad ch_1 k_1 = ch_1, \quad c_1 h_1 k = h_1 k.$$

Analog gilt desgleichen:

2°)′ $$bh \mathrel{\in\!\!\!\!=} k, \quad bhk_1 = 0, \quad bhk = bh, \quad bh_1 k_1 = bk_1, \quad b_1 hk_1 = hk_1.$$

Drittens. Ist $A = B$ und $A = 0$, so folgt nach Th. 4) auch $B = 0$, d. h. es ist $dh \mathrel{\in\!\!\!\!=} k$ und analog $dk \mathrel{\in\!\!\!\!=} h$. Endlich aus $A = 0$ und $B = 0$ folgt in gleicher Weise $A = B$, d. h. es ist auch $hk \mathrel{\in\!\!\!\!=} d$. Somit ist zu notiren:

3°) $$dh \mathrel{\in\!\!\!\!=} k, \quad dhk_1 = 0, \quad dhk = dh, \quad dh_1 k_1 = dk_1 \quad d_1 hk_1 = hk_1,$$

3°)′ $$dk \mathrel{\in\!\!\!\!=} h, \quad dh_1 k = 0, \quad dhk = dk, \quad dh_1 k_1 = dh_1, \quad d_1 h_1 k = h_1 k,$$

3°)″ $$hk \mathrel{\in\!\!\!\!=} d, \quad d_1 hk = 0, \quad dhk = hk, \quad d_1 hk_1 = d_1 h, \quad d_1 h_1 k = d_1 k,$$

oder, wenn wir einen Teil dieser Resultate zusammenfassen:

3°)‴ $$hk = dh = dk = dhk, \quad dh_1 = dk_1 = dh_1 k_1. \text{ —}$$

Demnächst soll f definirt werden durch:

[4°] $$f = c_1'c = b_1c, \quad \text{somit} \quad f_1 = c' + c_1 = b + c_1,$$
$$\{A \subset B\} = \{A \Subset B\}\{B \not\Subset A\} = \{A \Subset B\}\{A \not\Supset B\};$$

und analog e durch:

[5°] $$e = f' = c'c_1 = bc_1, \quad e_1 = c_1' + c = b_1 + c,$$
$$\{A \supset B\} = \{B \subset A\} = \{B \Subset A\}\{A \not\Subset B\} = \{A \Supset B\}\{A \not\Subset B\}.$$

Viertens folgt dann, weil unter 1°)' bereits $b_1k = 0$ erwiesen ist, dass auch $b_1ck = 0$, oder:

4°) $$fk = 0, \quad fk_1 = f, \quad f_1k = k, \quad k \Subset f_1, \quad f \Subset k_1,$$

und analog, weil $c_1h = 0$ nach 1°) ist:

4°)' $$eh = 0, \quad eh_1 = e, \quad e_1h = h, \quad h \Subset e_1, \quad e \Subset h_1.$$

Die letzten Subsumtionen rechts zeigen, *dass in jeder Unter- oder Überordnung der terminus major von* 0 *verschieden sein muss.*

Fünftens. Sofort folgt aus den Definitionen [2°], [4°], [5°] nach Th. $30_\times$) auch:

5°) $$de = 0, \quad df = 0, \quad ef = 0,$$

woraus zu sehen ist, *dass die Fälle d, e, f einander gegenseitig ausschliessen.* In Bezug auf Gleichheit d und Unterordnung f wurde dies schon in § 1 betont.

Sechstens haben wir nach Th. $30_\times$):
$$b = b \cdot 1 = b(c + c_1) = bc + bc_1, \quad \text{ebenso} \quad c = bc + b_1c$$
und mit Rücksicht auf die erwähnten Definitionen gibt dieses:

6°) $$b = d + e, \quad c = d + f, \quad b_1 = d_1e_1, \quad c_1 = d_1f_1.$$

Ausführlich angeschrieben lautet die zweite $c = f + d$ dieser Gleichungen nun:
$$\{A \Subset B\} = \{A \subset B\} + \{A = B\},$$
womit es gerechtfertigt erscheint, das Subsumtionszeichen $\Subset$ als „untergeordnet oder gleich" zu lesen. Die Formel sagt nämlich als disjunktives Urteil aus: wenn $A \Subset B$ ist, so ist entweder A untergeordnet B; oder aber [„oder aber" wegen $df = 0$, cf. 5°)] es ist A gleich B — und vice versa. Betrachtungen, welche wir *motivirens* halber in dem einleitenden § 1 sogar zum Ausgangspunkt genommen, haben hiermit

auch im systematischen Aufbau der Theorie jetzt ihre rechtmässige Stelle gefunden.

Siebentens mögen wir als Hülfssatz notiren:

$7^0)\qquad fh = hk_1 \qquad$ und $7^0)'\qquad ck = h_1k.$

In der That muss sein:

$$fh = fk_1h = b_1ck_1h = b_1k_1h = hk_1$$

wo beim Übergang über jedes Gleichheitszeichen ein früherer Satz zur Anwendung kommt; und zwar ist der erste Übergang gerechtfertigt, weil nach Hülfssatz $4^0)$ $f = fk_1$ ist, der zweite, weil nach Def. $[4^0]$ $f = b_1c$, der nächste, weil nach Hülfssatz $1^0)$ $ch = h$ ist, und der letzte indem nach $2^0)'$ direkt $b_1hk_1 = hk_1$ ist. Analog haben wir auch:

$$ck = ch_1k = bc_1h_1k = c_1h_1k = h_1k$$

zur Rechtfertigung der zweiten Formel unsres Hülfssatzes.

Man kann auch etwas kürzer auf $7^0)$ schliessen, indem man die letzte Subsumtion von $4^0)$ beiderseits mit h multiplizirt, wodurch sich zunächst $fh \leqslant hk_1$ ergibt.

Dass aber auch umgekehrt $hk_1 \leqslant fh$ sein muss, und darum Gleichheit eintritt, ergibt sich sogleich aus der Überlegung, dass $0 \leqslant B$ nach Def. $(2_\times)$ sein muss; wenn also, während $A = 0$ kraft h, und sonach $A \leqslant B$ ist, d. h. c gilt, B ungleich 0 — in Formeln $B \neq 0$ — vorausgesetzt wird gemäss k_1, so ist die Gleichheit $A = B$ oder d ausgeschlossen und bleibt mit Rücksicht auf $6^0)$ oder $c = d + f$ nur mehr die Alternative $A \subset B$ oder f übrig.

Nach Th. $6_\times)$ ist $fh \leqslant f$, $ck \leqslant c$, sonach folgt gemäss Th. 3) auch aus $7^0)$ und $7^0)'$ dass

$$hk_1 \leqslant f, \quad h_1k \leqslant c.$$

Ersteres, oder $(A = 0)\,(B \neq 0) \leqslant (A \subset B)$ lässt auch in:

$$(B \neq 0) \leqslant (0 \subset B)$$

sich zusammenziehen, indem man für A den vorausgesetzten Nullwert beiderseits einsetzt, wodurch links der erste Faktor in $(0 = 0) = 1$ übergeht und als ein *stets*fort gültiger selbstverständlicher gemäss Th. $\overline{21}_\times)$ unterdrückt werden darf. Dies Ergebniss lehrt, dass *das Nullgebiet wirklich untergeordnet* ist *jedem von* 0 *verschiedenen* Gebiete, und bildet es sonach eine Umkehrung und Ergänzung zu $4^0)$.

Es bleiben jetzt noch die Grundbeziehungen a_1 und g zu definiren — die ersten und die letzten von allen.

Wir definiren:

[6⁰] $\quad a = \{A \not\gtrless B\} = \{AB \subseteq 0\} = \{AB = 0\}$

welche letzten beiden Propositionen nach Th. $5_\times$) ja äquivalent sind.

Durch Negiren jeder Seite dieser Aussagenäquivalenz gemäss Th. 32) ergibt sich hienach auch die Definition von

$$a_1 = \{A \gtrless B\} = \{AB \not\subseteq 0\} = \{AB \neq 0\}.$$

Achtens. Da aus $A = 0$ auch $AB = 0$ nach Th. $22_\times$) folgt, so haben wir:

8⁰) $\quad h \subseteq a, \quad a_1 \subseteq h_1, \quad a_1 h = 0, \quad a_1 h_1 = a_1, \quad ah = h,$

8⁰)′ $\quad k \subseteq a, \quad a_1 \subseteq k_1, \quad a_1 k = 0, \quad a_1 k_1 = a_1, \quad ak = k,$

und muss hienach namentlich sein:

8⁰)″ $\quad a_1 = a_1 h_1 = a_1 k_1 = a_1 h_1 k_1$

— letzteres gemäss Th. $14_\times$), indem $a_1 = a_1 a_1 = a_1 h_1 \cdot a_1 k_1$ nach dem Vorhergehenden ist.

Neuntens. Wenn neben $AB = 0$ auch $A \supseteq B$ gilt, so folgt nach Th. $16_\times$) $AB \supseteq BB$, also $0 \supseteq B$ oder $0 = B$ nach bekannten Sätzen, d. h. wir haben:

9⁰) $\quad ab \subseteq k, \quad abk_1 = 0, \quad abk = ab, \quad ab_1 k_1 = ak_1, \quad a_1 bk_1 = bk_1.$

Analog ist $(AB = 0)(A \subseteq B) \subseteq (A = 0)$, oder:

9⁰)′ $\quad ac \subseteq h, \quad ach_1 = 0, \quad ach = ac, \quad ac_1 h_1 = ah_1, \quad a_1 ch_1 = ch_1.$

Durch beiderseitiges Multipliziren mit c_1 resp. b_1 folgt aus der letzten rechts von den gewonnenen Gleichungen noch:

$$a_1 bc_1 k_1 = bc_1 k_1 \quad \text{und} \quad a_1 b_1 ch_1 = b_1 ch_1,$$

oder wegen Def. [4⁰] und [5⁰]:

$$a_1 ek_1 = ek_1, \quad a_1 fh_1 = fh_1.$$

Nach 8⁰) dürfen wir aber $a_1 k_1$ und $a_1 h_1$ durch a_1 links ersetzen und erhalten:

9⁰)″ $\quad a_1 e = ek_1, \qquad$ 9⁰)‴ $\quad a_1 f = fh_1,$

womit rechnerisch aus der Definition nachgewiesen ist, *dass die Unterordnung $A \subset B$ nur soferne $A \neq 0$ ist unter die Beziehung $A \gtrless B$ der Gebietgemeinschaft fällt*, etc.

Zehntens. Ist $AB = 0$ und zugleich $A = B$, so folgt auch $AA = 0$ oder $A = 0$, desgleichen $B = 0$. Also haben wir:

$10^0)$ $ad \not\in h\,,\quad adh_1 = 0\,,\quad adh = ad\,,\quad ad_1h_1 = ah_1\,,\quad a_1dh_1 = dh_1\,,$

$10^0)'$ $ad \not\in k\,,\quad adk_1 = 0\,,\quad adk = ad\,,\quad ad_1k_1 = ak_1\,,\quad a_1dk_1 = dk_1\,;$

in den letzten Gleichungen rechts dürfen wir aber linkerhand a_1h_1 oder a_1k_1 nach $8^0)''$ durch a_1 selbst ersetzen, und erhalten namentlich — mit Rücksicht noch auf $3^0)'''$:

$$10^0)'' \qquad a_1d = dh_1 = dk_1 = dh_1k_1\,,$$

welches zeigt, *dass die Gleichheit nur insofern unter die Wertegemeinschaft fällt, als ihre beiden Seiten von 0 verschieden sind.*

Nachdem a_1 bereits seine Erklärung gefunden hat, sein Gebrauch legitimirt ist, definiren wir endlich die Schnittigkeitsbeziehung durch die Festsetzung:

$$[7^0] \qquad g = a_1b_1c_1$$

d. h.
$$\{A \between B\} = \{A \not\gtrless B\}\{A \not\ni B\}\{A \not\in B\}$$
$$= \{AB \not\in 0\}\{B \not\in A\}\{A \not\in B\}\,;$$

nach $6^0)$ wird dann also auch sein [für b_1 und c_1 ihre dortigen Werte gesetzt]:

$$11^0) \qquad g = a_1d_1e_1f_1\,,\quad \text{woraus}\quad g_1 = a + d + e + f$$

durch beiderseitiges Negiren entsteht.

Da nun $1 = g + g_1$ nach Th. $30_+)$ ist, so erhalten wir durch Einsetzung vorstehenden Wertes:

$$12^0) \qquad 1 = a + d + e + f + g\,.$$

In der fünfgliedrigen Summe rechterhand sind die vier letzten Terme schon ohnehin disjunkt, indem zu den schon gewonnenen Gleichungen $5^0)$ kraft der Definitionen $[7^0]$ in Verbindung mit $[2^0]$ $[4^0]$ und $[5^0]$ auch noch hinzutritt:

$$13^0) \qquad dg = 0\,,\quad eg = 0\,,\quad fg = 0\,.$$

[Das erstere Produkt wird ja in der That: $a_1b_1c_1 \cdot bc$, das zweite $a_1b_1c_1 \cdot bc_1$, das dritte $a_1b_1c_1 \cdot b_1c$, ein jedes also 0 nach Th. $30_\times)$.]

Um nun die Summe vollends in eine reduzirte zu verwandeln, brauchen wir blos nach dem Schema:

$$a + x = a + xa + xa_1 = a + a_1x$$

— im Grunde also unter Anwendung von Th. $33_+)$ Zusatz — die Gleichung $12^0)$ umzuschreiben in:

$$1 = a + a_1d + a_1e + a_1f + a_1g\,,$$

so werden ausser den rechts (implicite erwähnten) Produkten der vier

letzten Terme unter sich auch noch die vier Produkte aus dem ersten Term in jeden folgenden verschwinden.

Hiemit ist die ganze Möglichkeit $\dot{1}$ der Beziehungen in 5 einander gegenseitig ausschliessende Klassen zerfällt, die wir als die „*Elementarfälle*" zu bezeichnen haben.

Aus der Def. von g ist aber unmittelbar ersichtlich, dass:

14°) $a_1 g = g$, sonach $g \Subset a_1$, $a \Subset g_1$, $ag = 0$, $ag_1 = a$,

und hienach in Verbindung mit 10°)″, 9°)″ und 9°)‴ wird also:

15°) $$\dot{1} = a + dh_1k_1 + ek_1 + fh_1 + g$$

die Zerfällung in die fünf Klassen sein. Für letztere führen wir zum Teil noch kürzere Namen ein, indem wir *definiren:*

[8°] $$dh_1k_1 = \delta\,, \quad ek_1 = \beta\,, \quad fh_1 = \gamma\,, \quad g = \alpha\,,$$

sodass nunmehr

16°) $$\dot{1} = a + \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

bleiben wird.

Es ist dies eine *Hauptgleichung*, die man vorerst nicht aus den Augen verlieren darf. Die fünf Terme rechterhand müssen nach Bisherigem, wie gesagt, disjunkt sein, ihre zehn Produkte zu irgend zweien sind gleich 0. Es tritt hier also der Fall des Zusatz 2 zu Th. 28), Bd. 1, S. 314 sq. auf: die Negation irgend eines Terms oder eines Aggregates von Termen rechterhand ist jeweils das Aggregat der übrigen Terme, z. B. $a_1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta$, etc.

Ein jeder dieser fünf Terme ist eine Aussage, welche eine bestimmte Beziehung zwischen den Gebieten A und B statuirt. Die fünf Beziehungen nennen wir eben die „*Elementarbeziehungen*", und haben dieselben nunmehr auch analytisch definirt.

Wie immer die Gebiete A und B auch gegeben werden mögen, so gilt notwendig immer eine von diesen Elementarbeziehungen und dann nicht die übrigen.

Anmerkung. Anstatt dh_1k_1 hätten wir nach 10°)″ auch einfacher, jedoch auf Kosten der Symmetrie, blos dh_1 oder dk_1 in 15°) und [8°] schreiben können. Umgekehrt dürfen wir nach 4°)′ und 4°) für e auch eh_1 und für f auch fk_1 schreiben, also ek_1 durch eh_1k_1 und fh_1 durch fh_1k_1 ersetzen. Endlich war unter 8°)′ $a_1 = a_1h_1k_1$ erwiesen, wonach Def. [7°] auch $g = gh_1k_1$ liefert.

Als Definition der vier letzten Elementarfälle kann man daher auch schreiben:

[9⁰] $$\alpha = gh_1k_1, \quad \beta = ch_1k_1, \quad \gamma = fh_1k_1, \quad \delta = dh_1k_1$$

und mag der Hauptgleichung auch die Gestalt gegeben werden:

17⁰) $$1 = a + h_1k_1(d + e + f + g).$$

Nach [8⁰] verglichen mit 9⁰)″ resp. 9⁰)‴ und 10⁰)″ gelten übrigens auch die Gleichungen:

18⁰) $$\beta = a_1e, \quad \gamma = a_1f, \quad \delta = a_1d.$$

Wir haben oben die Elementarbeziehungen zurückgeführt auf die Grundbeziehungen — vergl. [8⁰] — zu denen die Aussagen h (oder $A = 0$) und k (oder $B = 0$) nebst deren Negationen noch herangezogen wurden, und welche sämtlich mittelst der Subsumtion ihre analytische Definition gefunden hatten.

Man kann nun auch das Umgekehrte verlangen, fordern dass die 14 Grundbeziehungen nebst den vier Relationen h, k, h_1, k_1 gewissermassen *in ihrer Verteilung auf die fünf Fächer blosgelegt,* durch die 5 Elementarbeziehungen ausgedrückt werden.

Übersichtlich wird dies durch das Tableau geleistet:

III⁰)	$1 = a \quad + \alpha + \beta + \gamma + \delta$	$1 = a \quad + \alpha + \beta + \gamma + \delta$
	$a_1 = \quad \alpha + \beta + \gamma + \delta,$	$a = a,$
	$b = k \quad + \quad \beta + \quad \delta,$	$b_1 = k_1a \quad + \alpha + \quad \gamma,$
	$c = h \quad + \quad \gamma + \delta,$	$c_1 = h_1a \quad + \alpha + \beta,$
	$d = hk \quad + \quad \delta,$	$d_1 = (h_1 + k_1)a + \alpha + \beta + \gamma,$
	$e = h_1k + \quad \beta,$	$e_1 = (h + k_1a) + \alpha + \quad \gamma + \delta,$
	$f = hk_1 + \quad \gamma,$	$f_1 = (h_1a + k) + \alpha + \beta + \quad \delta,$
	$g = \quad \alpha,$	$g_1 = a \quad + \quad \beta + \gamma + \delta,$
	$h = ha,$	$h_1 = h_1a \quad + \alpha + \beta + \gamma + \delta,$
	$k = ka,$	$k_1 = k_1a \quad + \alpha + \beta + \gamma + \delta,$

über welches wir behufs Markirung der 5 Abteilungen die Hauptgleichung 16⁰) wiederholt geschrieben haben.

Zum Verständniss der Formeln ist erforderlich, sich gegenwärtig zu halten, dass h und k ganz unter a fallen, also eigentlich durch ha, ka überall zu ersetzen wären, wozu auch die unter 8⁰) und 8⁰)′ erwiesene achte und neunte Gleichung links in III⁰) die Erlaubniss ausspricht. Diese beiden letzten Gleichungen der linksseitigen Kolonne sind hiermit auch schon gerechtfertigt.

Was die *Begründung der Formeln* im übrigen betrifft, so wurde die erste links schon unter 16°) aus dieser Hauptgleichung entnommen; (die erste rechts ist eine analytische Identität); ebenso ergibt aus der siebenten Gleichung links $g = \alpha$, die als Definition galt, sich auch die siebente rechts aus 16°). — Ferner haben wir:

$$f = fh + fh_1 = hk_1 + \gamma \text{ nach } 7^0) \text{ und } [8^0],$$
$$e = ek + ek_1 = h_1k + \beta \text{ nach } 7^0)' \text{ „ „ },$$

womit die sechste und fünfte Gleichung links gewonnen. — Nach Th. 34_+) ist endlich:

$$d = d \cdot 1 = d(hk + hk_1 + h_1k + h_1k_1) = dhk + dh_1k_1 = hk + \delta$$

wegen 3°) und 3°)', sodann 3°)''' und [8°], womit auch die vierte Formel links gewonnen. Mit dieser folgt dann sofort auch die dritte und zweite links gemäss 6°), indem sich bei der Addition dieses d mit f resp. e das einemal

$$hk + hk_1 = h, \quad \text{das andremal} \quad hk + h_1k = k$$

zusammenzieht. — Um auch noch die Gleichungen rechterhand oder die Ausdrücke für die Negationen unsrer Beziehungen zu gewinnen, sucht man am besten nur die Ergänzung des unter a fallenden Terms (innerhalb der Mannigfaltigkeit der Fälle a selbst) direkt auf, und entnimmt die übrigen Terme aus der Hauptgleichung 16°); um die Formeln, so wie sie angegeben, zu beweisen, genügt es schon, die Probe zu machen nach den Schemata des Th. 30). [Anstatt des Obigen hätte man auch $(h + k_1)\,a$ resp. $(h_1 + k)\,a$ als ersten Term von e_1 resp. f_1 schreiben können.] —

Als eine Anwendung wollen wir jetzt hervorheben und beleuchten den Unterschied der beiden in § 15 besprochenen Redensarten [dort einfach β) und γ) genannt]:

$\hat{\beta}$) A (*ist nicht*) B — und $\hat{\gamma}$) A *ist* (*nicht* B)

oder auch:

Alle A (sind nicht) B resp. Alle A sind (nicht-B)

— unter den A die Elemente oder Punkte des Gebietes A verstanden, desgl. unter den B oder den Nicht-B Punkte ebendieser Gebiete.

Letztere Redensart, $\hat{\gamma}$), d. i. auch ohne Klammer geschrieben die: „A ist Nicht-B“ repräsentirt den Fall:

$$\{A \Subset B_1\} = \{AB = 0\} = a.$$

Ertere $\hat{\beta}$) dagegen, seinerzeit erklärt als die Verneinung der Aussage „*A* ist *B*“, repräsentirt den Fall:

$$\{A \not\Subset B\} = \{A \Subset B\}_1 = c_1 = h_1 a + \alpha + \beta = h_1 a + g + e k_1.$$

Jene $\hat{\gamma}$) besagt: *Kein A ist B, falls überhaupt es A's gibt,* und wird versinnlicht durch die Figur 17, in welcher der Kreis *A* auch schwinden, gänzlich eingehen, *fehlen* kann. Abgesehen von diesem Grenzfalle, dessen Möglichkeit die *Umgangssprache* einfach *übersieht,* und für den sie daher auch gar nicht ausgesagt haben will (weder Gültigkeit noch Ungültigkeit für ihre Aussage beansprucht) — abgesehen von diesem Grenzfalle ist Vorstehendes der korrekte Sinn, der mit einer Aussage von der Form: „Alle *A* sind nicht *B*“ oder „Kein *A* ist *B*“ *ganz allgemein und von rechtswegen* verbunden wird.

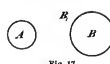


Fig. 17.

Durch das von uns im Einklang mit der herrschenden Terminologie (aber im Gegensatz zu neueren Theorieen) als ein universal *verneinendes* bezeichnete Urteil $\hat{\gamma}$) wird eine Beziehung zwischen den Begriffsumfängen *A* und *B* ausgedrückt, die zugleich eine Elementarbeziehung und eine Grundbeziehung ist. Die Verneinungspartikel „nicht“ gehört dabei zum *Prädikate.*

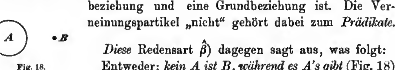


Fig. 18.

Diese Redensart $\hat{\beta}$) dagegen sagt aus, was folgt: Entweder: *kein A ist B, während es A's gibt* (Fig. 18) — wobei aber zugelassen ist, dass vielleicht es ein *B* gar nicht gebe — [um hierauf hinzuweisen, haben wir das Gebiet *B* blos durch einen Punkt hier dargestellt; wir hätten auch die vorige Figur, Fig. 17, zur Darstellung dieses Unterfalles von β) benutzen können, nur *ohne* die dort beigefügte Erlaubniss der Unterdrückung des Kreises *A*] —

Fig. 19.

Oder aber: *nur einige A* (deren es sonach gibt) *sind B und umgekehrt,* nur einige *B* auch sind *A* (Fig. 19).

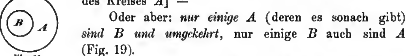


Fig. 20.

Oder aber endlich: *es gibt B's, und diese alle sind A's, aber nicht umgekehrt* (Fig. 20).

Die Redensart $\hat{\beta}$) drückt eine Beziehung aus, welche als Negation einer Grundbeziehung auch selber zu den Grundbeziehungen gehört,

dagegen aber keine Elementarbeziehung ist. Von den fünf Elementarbeziehungen vielmehr streicht sie zwei ganze und einen Bruchteil einer dritten aus, und lässt den Rest als möglich zu. —

Es ist gewiss der Wortsprache zur Last zu legen, dass über solche Fragen, wie die den Sinn einer Aussage „A ist nicht B" betreffende, noch Meinungsverschiedenheiten und Streit überhaupt bestehen können.

Achtzehnte Vorlesung.

§ 36. Reduktion sämtlicher Beziehungen auf den Typus der Gleichung und ihrer Negation (der Ungleichung).

Es lassen sich in Bezug auf unsre zahlreichen Beziehungen manche Fragen aufwerfen und viele Probleme stellen. Um jedoch nicht jetzt schon in einer Menge von (vielleicht nicht uninteressanten) Spezialuntersuchungen uns zu verlieren, und um ferner das Wichtigere gebührend hervortreten zu lassen vor dem minder Wichtigen, streben wir zunächst einmal mit ersterm einem Abschluss zu. Solchen zu gewinnen, suchen *wir sämtliche Beziehungen auf einen gemeinsamen Typus zurückzuführen.*

Dies *gelingt,* indem wir sie samt und sonders blos *durch Gleichungen und Ungleichungen* ausdrücken, das ist durch *bejahte oder verneinte Gleichungen.*

Auf mannigfache Weise haben wir gelernt, eine jede Subsumtion umzuschreiben in eine Gleichung, z. B. es war:

$$\{A \mathrel{=\!\!\!\in} B\} = \{AB = A\} = \{A + B = B\} = \{AB_1 = 0\}.$$

Nach § 18, ϱ) konnte auch umgekehrt jede Gleichung verwandelt werden in eine Subsumtion nach dem Schema:

$$\{A = B\} = \{A + B \mathrel{=\!\!\!\in} AB\}.$$

Aus diesen Aussagenäquivalenzen folgt durch beiderseitiges Negiren gemäss Th. $\bar{32}$), dass auch jede Verneinung einer Subsumtion sich schreiben lassen wird als eine Ungleichung, und jede Ungleichung als verneinte Subsumtion; es muss z. B. sein:

$$\{A \mathrel{\not{=\!\!\!\in}} B\} = \{AB \neq A\} = \{AB_1 \neq 0\}, \quad \{A \neq B\} = \{A + B \mathrel{\not{=\!\!\!\in}} AB\}.$$

Jedes Problem, dessen Einkleidung in die Zeichensprache möglich war vermittelst Subsumtionen *und* Gleichungen, musste demnach sich auch in Formeln kleiden lassen, wenn man ausschliesslich nur von *einem* der beiden zugehörigen Beziehungszeichen Gebrauch machen darf;

dasselbe lässt sich bereits in Subsumtionen allein formuliren, desgleichen schon ganz durch Gleichungen.

Dass aber die Zeichen dieser beiden Beziehungen, als *bejahende* ⋹ und $=$, nicht ausreichen zur Behandlung auch nur der Probleme der alten Logik, insbesondre zur Einkleidung der *partikularen* (und Existenzial-) Urteile, haben wir in § 34 erkannt.

Erst wenn neben den Operationen des identischen Kalkuls an Gebieten oder Klassen und *mit* denselben Operationen an Aussagen auch die *Aussagenverneinung* zugelassen war, konnte letzteres gelingen, wogegen bei *Ausschluss* der Negation *an Aussagen* damit nicht durchzukommen war, wo sonst man auch über sämtliche Operationen verfügte. Mit andern Worten: es waren *zwei* Beziehungszeichen nötig, ein bejahendes und ein verneinendes.

Dass wir uns nunmehr für die beiden Zeichen $=$ und $\neq$ aus den Grundbeziehungen d und d_1 entscheiden, ist unsre Willkür.

Ebensogut könnten wir nach Vorbemerktem auch mit den beiden Zeichen ⋹ und ⋹̸ aus c und c_1 auskommen; ja es könnte das bejahende Zeichen des einen Paares mit dem verneinenden des andern zum ausschliesslichen Gebrauch erkoren und bestimmt werden.

Wir lernen so jedoch zunächst einmal auf wenigstens *eine* Weise zum Ziel zu kommen — und, wie sich zeigen wird, auf eine gute Weise. Ob auf die beste, steht noch dahin. Es bleibt auch ferneren Spezialforschungen vorbehalten, zu ermitteln, mittelst welcher andern Paare von Zeichen man ebenfalls zur Lösung aller einschlägigen Aufgaben — aller im Gebiet der Logik des Begriffsumfanges überhaupt erdenklichen Probleme — gelangen könnte, und auf welche Weise? Ja, es wäre auch in Bezug auf die Beziehungszeichen der noch übrigen Gruppe eigentlich erst noch nachzusehen, ob man nicht vielleicht mit *einem* von *diesen* allein schon auskommen könnte. Man ersieht hier die Möglichkeit von mehreren Algebra's der Logik! Vergleiche über diese Fragen auch Frau Franklin-Ladd [1,2,3].

Ich erblicke darin einen Hauptvorzug der rechnerisch exakten Behandlungsweise der logischen Disziplin vor der herkömmlichen schulmässig-verbalen, dass sie nach allen Seiten einen Reichtum von Problemen in Sicht stellt. Es war stets Merkmal einer in gesundem Fortschreiten begriffenen Wissenschaft, bei jedem Zuwachs an Erkenntnissmaterial durch Herbeiführung endgültiger Entscheidung über irgend eine Frage, zugleich eine Fülle von neuen Fragestellungen aufzuwerfen und so zu fortgesetztem Forschen anzuregen.

Sehen wir darauf hin uns die schulmässige formale Logik an, so finden wir, wie schon Bd. 1, S. 121 ausgeführt, wohl interessante, hie und da auch

gründliche und neue Betrachtungen, wo etwa das Gebiet der Metaphysik, Psychologie, etc. gestreift wird, auch geistreiche Bemerkungen über das Wesen dieser oder jener Begriffe — nicht minder: verdienstliche Anstrengungen, die Schwierigkeiten der Darstellung und des Unterrichts zu überkommen. Allein gerade in Bezug auf ihre Hauptaufgabe, die Entwickelung einer Kunstlehre und Technik des Denkens, scheint diese Wissenschaft sich einer grossen Selbstgenügsamkeit zu befleissigen, sich einer langweiligen Abgeschlossenheit zu erfreuen (?); sie beschäftigt hier sich mit einem stereotypen Kreise einiger wenigen ein bischen komplizirteren Formen des Schlusses und nirgends wird ersichtlich, dass überhaupt noch etwas zu thun übrig bleibt, noch weniger aber tritt zu Tage, nach welcher Richtung hin etwa weitergearbeitet werden könnte und sollte.

Für die Darstellung aller Grund- und Elementarbeziehungen durch Gleichungen und Ungleichungen erhalten wir folgenden Überblick:

IV^0. $a_1 = \{A \mathrel{\neq\!\!\!\!\!\between} B\} = \{AB \neq 0\}$, $\quad a = \{A \mathrel{=\!\!\!\!\!\between} B\} = \{AB = 0\}$,

$b = \{A \ni B\} = \{A_1 B = 0\}$, $\quad b_1 = \{A \not\ni B\} = \{A_1 B \neq 0\}$,

$c = \{A \in B\} = \{AB_1 = 0\}$, $\quad c_1 = \{A \notin B\} = \{AB_1 \neq 0\}$,

$d = \{A = B\} = \{AB_1 + A_1 B = 0\}$,

$d_1 = \{A \neq B\} = \{AB_1 + A_1 B \neq 0\}$,

$e = \{A \supset B\} = \{A_1 B = 0\}\{AB_1 \neq 0\}$,

$e_1 = \{A \not\supset B\} = \{A_1 B \neq 0\} + \{AB_1 = 0\}$,

$f = \{A \subset B\} = \{AB_1 = 0\}\{A_1 B \neq 0\}$,

$f_1 = \{A \not\subset B\} = \{AB_1 \neq 0\} + \{A_1 B = 0\}$,

$g = \alpha = \{A \between B\} = \{AB \neq 0\}\{AB_1 \neq 0\}\{A_1 B \neq 0\}$,

$g_1 = \alpha_1 = \{A \not\between B\} = \{AB = 0\} + \{AB_1 = 0\} + \{A_1 B = 0\}$,

$\beta = \{A \supset B\}\{B \neq 0\} = \{A_1 B = 0\}\{AB_1 \neq 0\}\{AB \neq 0\}$,

$\beta_1 = \{A \not\supset B\} + \{B = 0\} = \{A_1 B \neq 0\} + \{AB_1 = 0\} + \{AB = 0\}$,

$\gamma = \{A \subset B\}\{A \neq 0\} = \{AB_1 = 0\}\{A_1 B \neq 0\}\{AB \neq 0\}$,

$\gamma_1 = \{A \not\subset B\} + \{A = 0\} = \{AB_1 \neq 0\} + \{A_1 B = 0\} + \{AB = 0\}$,

$\delta = \{A = B\}\{A \neq 0\}\{B \neq 0\} = \{AB_1 + A_1 B = 0\}\{AB \neq 0\}$,

$\delta_1 = \{A \neq B\} + \{A = 0\} + \{B = 0\} = \{AB_1 + A_1 B \neq 0\} + \{AB = 0\}$.

Von diesen Formeln kommen diejenigen rechterhand für die Negationen unsrer Beziehungen auf die andern links hinaus durch beiderseitiges Negiren nach Th. 32 und $\overline{36}$). Und Behufs der Begründung dieser letztgenannten ist auch nur weniges zu sagen.

Nämlich bei a ist allein auf die Def. [6⁰] hinzuweisen, bei b und c auf das Th. $38_\times$), bei d auf Th. $39_\times$). Die Formeln für e, f, g sind Wiederholungen der Definitionen [5⁰], [4⁰] und [7⁰], nämlich $e = bc_1$, $f = b_1 c$, $g = a_1 b_1 c_1$ mit Rücksicht auf die unmittelbar vorher gewonnenen Darstellungen der Symbole rechterhand.

Bei β, γ, δ endlich sind die ersten Darstellungen zunächst nur Ausdruck (ausführlichere Wiedergabe) der Definitionen [8⁰]: $\beta = ek_1$, $\gamma = fh_1$, $\delta = dh_1 k_1$. Durch blosses Einsetzen der voraufgehenden Werte von e, f, d aber würde man hieraus etwas andere, als die dahinter angegebenen Darstellungen von β, γ, δ erhalten, nämlich solche, in denen an Stelle des letzten Faktors $\{AB \neq 0\}$ bezüglich stünde $\{B \neq 0\}$, $\{A \neq 0\}$, und $\{A \neq 0\}\{B \neq 0\}$ [oder auch einfacher aber unsymmetrisch nur einer von diesen beiden Faktoren allein, gleichviel, welcher von beiden — wegen $dh_1 k_1 = dh_1 = dk_1$ unter 10⁰)"]. Die angegebenen zweiten Darstellungen von β, γ, δ fliessen jedoch sofort aus den Darstellungen 18⁰) mittelst Einsetzung der gefundenen Werte für die Symbole rechterhand.

Anmerkung. Wo in IV⁰ die Gleichung $AB_1 + A_1 B = 0$ auftritt, könnte dieselbe nach Th. 24_+) auch in das Produkt $(AB_1 = 0)(A_1 B = 0)$ umgeschrieben werden, und da die beiden Aussagen äquivalent sind, müssen nach Th. $\overline{32}$) auch ihre Negationen es sein, woraus zu lernen, dass analog die Ungleichung $AB_1 + A_1 B \neq 0$ auch in die Summe $(AB_1 \neq 0) + (A_1 B \neq 0)$ verwandelt werden dürfte.

Es haben sonach alle Umfangsbeziehungen sich durch Aussagen über Gleichheit oder Ungleichheit wirklich darstellen lassen.

Hieraus folgt aber die wichtige Erkenntniss, *dass wir jede über Beziehungen zwischen Klassen (oder Umfangsverhältnisse von Begriffen) überhaupt erdenkliche Aufgabe gelöst haben werden, sobald es uns nur gelingen wird, das allgemeinste auf Gleichungen und Ungleichungen bezügliche Problem zu lösen.*

Diesem letztern Ziele werden wir demnach in Bälde zusteuern (§ 41 und 49 besonders).

Insofern mit einem Beziehungszeichen, bei Zulassung der Negation auch an den solche Beziehung statuirenden Aussagen, immer schon dessen Verneinung mitgegeben erscheint, können wir auch sagen:

Die Logik des Umfanges kommt mit den Operationen der identischen drei Spezies (zur Not schon mit Negation und Multiplikation, vergl. Th. 36) Anm.) *und einem einzigen Beziehungszeichen aus* bei allen ihren Problemen und Untersuchungen, und zwar namentlich *mit dem Zeichen = der Gleichheit*, oder wenn man will auch *mit dem Zeichen* $\Subset$ *der Subsumtion.*

Praktisch werden die *beiden* Zeichen = und $\neq$, oder auch die beiden $\Subset$ und $\not\Subset$ alle Dienste versehen.

Auf Grund der Darstellungen IV⁰ bewahrheiten sich unmittelbar die folgenden Beziehungsäquivalenzen:

V°. $(A \between B) = (B \between A) = (A_1 \not\ni B) = (B_1 \not\ni A) = (A \not\in B_1) = (B \not\in A_1)$,
$(A \not\between B) = (B \not\between A) = (A_1 \ni B) = (B_1 \ni A) = (A \in B_1) = (B \in A_1)$,
$(A \ni B) = (B_1 \ni A_1) = (B \in A) = (A_1 \in B_1) = (A_1 \not\between B) = (B \not\between A_1)$,
$(A \not\ni B) = (B_1 \not\ni A_1) = (B \not\in A) = (A_1 \not\in B_1) = (A_1 \between B) = (B \between A_1)$,
$(A \in B) = (B_1 \in A_1) = (B \ni A) = (A_1 \ni B_1) = (A \not\between B_1) = (B_1 \not\between A)$,
$(A \not\in B) = (B_1 \not\in A_1) = (B \not\ni A) = (A_1 \not\ni B_1) = (A \not\between B_1) = (B_1 \not\between A)$;

$$(A = B) = (A_1 = B_1) = (B = A) = (B_1 = A_1),$$
$$(A \neq B) = (A_1 \neq B_1) = (B \neq A) = (B_1 \neq A_1),$$
$$(A \supset B) = (B_1 \supset A_1) = (B \subset A) = (A_1 \subset B_1),$$
$$(A \not\supset B) = (B_1 \not\supset A_1) = (B \not\subset A) = (B_1 \not\subset A_1),$$
$$(A \subset B) = (B_1 \subset A_1) = (B \supset A) = (A_1 \supset B_1),$$
$$(A \not\subset B) = (B_1 \not\subset A_1) = (B \not\supset A) = (A_1 \not\supset B_1);$$
$$(A \bowtie B) = (B \bowtie A),$$
$$(A \not\bowtie B) = (B \not\bowtie A).$$

$(A \overset{\circ}{\supset} B) = (B \overset{\circ}{\subset} A)$,
$(A \overset{\circ}{\subset} B) = (B \overset{\circ}{\supset} A)$,
$(A \overset{\circ}{=} B) = (B \overset{\circ}{=} A)$.
} desgleichen mit vertikal durchstrichenen Beziehungszeichen.

Einige von diesen sind uns bereits aus früheren Definitionen und Theoremen bekannt, insbesondere aus Th. 32) und 37).

Andere lehren, *dass wie die Gleichheit, so auch die Gebietgemeinschaft* (Korrelation) *und die Schnittigkeit* (Sekanz) *eine symmetrische Beziehung ist*, dass man die beiden Seiten (Beziehungsglieder) jeder derartigen Relation vertauschen, die Beziehung ohne weiteres auch rückwärts lesen darf. Und *die Negation einer symmetrischen Beziehung ist ebenfalls immer wieder eine symmetrische Beziehung.* Auch die Gleichheit als Elementarbeziehung (elementare Gleichheit) ist symmetrisch.

Für die übrigen, die *unsymmetrischen Beziehungen* drücken unsre Formeln aus, *dass man dieselben auch rückwärts lesen kann, indem man ihr Beziehungszeichen umkehrt.* Ferner: *durch beiderseitiges Negiren entspringen aus ihnen wieder richtige Beziehungen, wofern man ebenfalls das zu negirende Beziehungszeichen umkehrt, oder, falls man das unmittelbar negirte beibehalten will, dafür Major und Minor vertauscht,* und zwar gilt dies sowol für die bejahenden als für die verneinenden unsymmetrischen Beziehungen.

Die Negation einer Elementarbeziehung ist allerdings keine Ele-

mentarbeziehung, bietet nicht mehr das Interesse einer solchen. Die ev. über ihr Zeichen gesetzte ∘ wäre samt diesem vom Negationsstrich zu durchsetzen, weil in dieser Negation das Verschwinden des angezogenen Terms nicht mehr ausgeschlossen, sondern vielmehr zugelassen erscheint.

[Die meisten, alle nicht symmetrischen, von den Sätzen V^0 sind in doppelter Ausfertigung angeschrieben, nämlich für das Gebietepaar A, B sowol als für das B, A.]

Um das Theorem $\{A \subset B\} = \{B \supset A\}$

ganz direkt zu beweisen, könnte man auch die bekannte, seinerzeit als Definition der rechten Seite hingestellte Äquivalenz:

$$\{A \not\subset B\} = \{B \not\supset A\}$$

nach Th. $\overline{19_\times}$) überschiebend multipliziren mit der andern:

$$\{A \neq B\} = \{B \neq A\}$$

welche sich aus dem Zusatze zu Def. (1): $\{A = B\} = \{B = A\}$ durch beiderseitiges Negiren nach Th. $\overline{32}$), ergibt. Man hätte dabei blos zu berücksichtigen, dass laut Definition von e und f nach [2^0] sein muss:

$$(b_1 c =)\, cd_1 = f \quad \text{und} \quad (bc_1 =)\, bd_1 = c\,,$$

wie sich dies auch aus dem Tableau III^0 bewahrheitet.

Ebenso lässt sich das Theorem:

$$\{A \subset B\} = \{A_1 \supset B_1\}, \quad \text{also auch} = \{B_1 \subset A_1\}$$

beweisen, indem man die nach Th. 37) bekannte Äquivalenz:

$$\{A \not\subset B\} = \{A_1 \not\supset B_1\}$$

überschiebend multiplizirt mit der Gleichung:

$$\{A \neq B\} = \{A_1 \neq B_1\}$$

welche sich aus dem Th. 32) durch Anwendung auf sich selbst ergab.

Die Formeln der ersten beiden Zeilen in V^0 zeigen, dass das *Zeichen* $\not\asymp$ *„der Disjunktion"*, welches die Gebietgemeinschaft verneint und zugleich dem Elementarfall a entspricht, sich vertreten lässt durch das Subsumtionszeichen $\prec$, somit auch die Verneinung des erstern durch die des letztern, d. h. dass ebenso das Zeichen $\asymp$ der Gebietgemeinschaft a_1 entbehrlich gemacht werden kann durch dasjenige $\not\prec$ der Subsumtionenverneinung oder Nicht-Einordnung. Gegenüber dem letzteren hat aber das erstere Zeichen den Vorzug der *Symmetrie.*

Es ist demnach auch $\not\asymp$ *und* $\asymp$ *ein Paar von Beziehungszeichen, welches für die Logik des Umfanges ausreichen würde,* während mit einem derselben allein (im frühern Sinne) nicht auszukommen wäre. Ebendieser, die sie nur äusserlich anders gestaltet, bedient sich Miss Ladd in [1].

§ 37. Entwickelung der Produkte und Summen von Grundbeziehungen.
(Überschlagbar.)

Wir wollen nun an unsre Umfangsbeziehungen noch einige Studien anknüpfen, welche derjenige Leser überschlagen mag, der etwa rasch dem Hauptprobleme und den Syllogismen zueilen möchte. Ein solcher wird auch die übrigen Paragraphen gegenwärtiger Vorlesung vorerst überspringen können, deren Thema wir jedoch für ein an sich kaum minder interessantes und wichtiges erklären müssen. Wir reden demnächst nur von Beziehungen zwischen durchweg denselben zwei Gebieten A und B.

Das Produkt von irgend zwei verschiedenen *Elementar*beziehungen ist 0, weil diese disjunkt sind, einander gegenseitig ausschliessen. Eine Summe von solchen ist einfach hinzuschreiben und lässt sich nicht vereinfachen.

Dagegen kann man für die Produkte und Summen von *Grund*beziehungen verlangen, dass dieselben entwickelt werden, so, dass klar zu sehen ist, wie viel jeweils davon unter eine jede der fünf Elementarabteilungen fällt.

Auf Grund der Tafel III⁰ des § 35 ist die Ermittelung dieser Verknüpfungsergebnisse eine blosse Rechenübung. Wir bringen die Resultate in übersichtliche Tabellen, die auch für rasches Nachschlagen erwünscht sein können.

Bei der Bildung der Produkte von nach den fünf Fächern $a, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ geordneten Summen ist der Vorteil zu beachten, dass das Ausmultipliziren zu bewerkstelligen ist durch einfaches Übereinanderschieben, Superponiren derselben, nämlich durch multiplikative Verknüpfung von immer nur den *gleichstelligen* Termen — geradeso, wie bei nach denselben Argumenten entwickelten Funktionen in Th. 45_+) geschildert — weil die ungleichstelligen Terme hier ebenfalls disjunkt sein müssen — vergl. den Zusatz Bd. 1, S. 422.

In sämtlichen Tafeln sind die *lateinischen* Symbole *rechterhand* durch ihre Werte aus dem Tableau III⁰ ersetzt zu denken; insbesondere ist also a unverändert zu lassen, hk, hk_1 und h_1k gemäss der ersten Zeile von VI⁰ mit dem Faktor a versehen zu denken, während g rechts immer den Elementarfall α vertritt.

Es sind die Tafeln dazu bestimmt, *wenn über zwei Gebiete oder Klassen A und B eine ganze Reihe von Aussagen gegeben sein sollte, die irgendwelche Elementar- oder Grundbeziehungen zwischen denselben als simultan oder alternativ geltende oder nichtgeltende hinstellen, den logischen Gehalt der* aus all' diesen Aussagen sich zusammensetzenden *Kollektiv-*

VI⁰. Produkte der Grundbeziehungen mit den Hülfsbeziehungen h, h_1, k, k_1.

$hk = hka$,	$hk_1 = hk_1a$,	$h_1k = h_1ka$,	$h_1k_1 = h_1k_1a + a_1$.
$a_1h = 0$,	$a_1h_1 = a_1$,	$ah = h$,	$ah_1 = h_1a$,
$a_1k = 0$,	$a_1k_1 = a_1$,	$ak = k$,	$ak_1 = k_1a$,
$bh = hk$,	$bh_1 = c + \delta$,	$b_1h = hk_1$,	$b_1h_1 = h_1k_1a + \alpha + \gamma$,
$bk = k$,	$bk_1 = \beta + \delta$,	$b_1k = 0$,	$b_1k_1 = b_1$
$ch = h$,	$ch_1 = \gamma + \delta$,	$c_1h = 0$,	$c_1h_1 = c_1$,
$ck = hk$,	$ck_1 = f + \delta$,	$c_1k = h_1k$,	$c_1k_1 = h_1k_1a + \alpha + \beta$,
$dh = hk$,	$dh_1 = \delta$,	$d_1h = hk_1$,	$d_1h_1 = c_1 + \gamma$,
$dk = hk$,	$dk_1 = \delta$,	$d_1k = h_1k$,	$d_1k_1 = b_1 + \beta$,
$eh = 0$,	$eh_1 = e$,	$e_1h = h$,	$e_1h_1 = h_1k_1a + \alpha + \gamma + \delta$,
$ek = h_1k$,	$ek_1 = \beta$,	$e_1k = hk$,	$e_1k_1 = b_1 + \delta$,
$fh = hk_1$,	$fh_1 = \gamma$,	$f_1h = hk$,	$f_1h_1 = c_1 + \delta$,
$fk = 0$,	$fk_1 = f$,	$f_1k = k$,	$f_1k_1 = h_1k_1a + \alpha + \beta + \delta$,
$gh = 0$,	$gh_1 = g$,	$g_1h = h$,	$g_1h_1 = h_1a \quad + \beta + \gamma + \delta$,
$gk = 0$,	$gk_1 = g$,	$g_1k = k$,	$g_1k_1 = k_1a \quad + \beta + \gamma + \delta$.

VII⁰. Summen der Grundbeziehungen mit den h, h_1, k, k_1.

$h+k=(h+k)a$,	$h+k_1=e_1+\beta$,	$h_1+k=f_1+\gamma$,	$h_1+k_1=d_1+\delta$,
$a_1+h=h+a_1$,	$a_1+h_1=h_1$,	$a+h=a$,	$a+h_1=1$,
$a_1+k=k+a_1$,	$a_1+k_1=k_1$,	$a+k=a$,	$a+k_1=1$,
$b+h=h+b$,	$b+h_1=f_1+\gamma$,	$b_1+h=h+b_1$,	$b_1+h_1=d_1+\delta$,
$b+k=b$,	$b+k_1=1$,	$b_1+k=a+\alpha+\gamma$,	$b_1+k_1=k_1$,
$c+h=c$,	$c+h_1=1$,	$c_1+h=a+\alpha+\beta$,	$c_1+h_1=h_1$,
$c+k=k+c$,	$c+k_1=c_1+\beta$,	$c_1+k=k+c_1$,	$c_1+k_1=d_1+\delta$,
$d+h=h+\delta$,	$d+h_1=f_1+\gamma$,	$d_1+h=a+\alpha+\beta+\gamma$,	$d_1+h_1=d_1+\delta$,
$d+k=k+\delta$,	$d+k_1=e_1+\beta$,	$d_1+k=a+\alpha+\beta+\gamma$,	$d_1+k_1=d_1+\delta$,
$e+h=(h+k)+\beta$,	$e+h_1=h_1$,	$e_1+h=e_1$,	$e_1+h_1=1$,
$e+k=k+\beta$,	$e+k_1=d_1+\delta$,	$e_1+k=a+\alpha+\gamma+\delta$,	$e_1+k_1=e_1+\beta$,
$f+h=h+\gamma$,	$f+h_1=d_1+\delta$,	$f_1+h=a+\alpha+\beta+\delta$,	$f_1+h_1=f_1+\gamma$,
$f+k=(h+k)+\gamma$,	$f+k_1=k_1$,	$f_1+k=f_1$,	$f_1+k_1=1$,
$g+h=h+\alpha$,	$g+h_1=h_1$,	$g_1+h=g_1$,	$g_1+h_1=1$,
$g+k=k+\alpha$,	$g+k_1=k_1$,	$g_1+k=g_1$,	$g_1+k_1=1$.

VIII⁰. Produkte der Grundbeziehungen unter sich.

$a_1 b = \beta + \delta$,	$a_1 b_1 = \alpha + \gamma$,	$ab = k$,	$ab_1 = k_1 a$,
$a_1 c = \gamma + \delta$,	$a_1 c_1 = \alpha + \beta$,	$ac = h$,	$ac_1 = h_1 a$,
$a_1 d = \delta$,	$a_1 d_1 = \alpha + \beta + \gamma$,	$ad = hk$,	$ad_1 = (h_1 + k_1)\, a$,
$a_1 e = \beta$,	$a_1 e_1 = \alpha + \gamma + \delta$,	$ae = h_1 k$,	$ae_1 = (h + k_1 a)$,
$a_1 f = \gamma$,	$a_1 f_1 = \alpha + \beta + \delta$,	$af = hk_1$,	$af_1 = (h_1 a + k)$,
$a_1 g = g$,	$a_1 g_1 = \beta + \gamma + \delta$,	$ag = 0$,	$ag_1 = a$,
$bc = d$,	$bc_1 = e$,	$b_1 c = f$,	$b_1 c_1 = h_1 k_1 a + \alpha$,
$bd = d$,	$bd_1 = e$,	$b_1 d = 0$,	$b_1 d_1 = b_1$,
$be = e$,	$be_1 = d$,	$b_1 e = 0$,	$b_1 e_1 = b_1$,
$bf = 0$,	$bf_1 = b$,	$b_1 f = f$,	$b_1 f_1 = h_1 k_1 a + \alpha$,
$bg = 0$,	$bg_1 = b$,	$b_1 g = g$,	$b_1 g_1 = k_1 a + \gamma$,
$cd = d$,	$cd_1 = f$,	$c_1 d = 0$,	$c_1 d_1 = c_1$,
$ce = 0$,	$ce_1 = c$,	$c_1 e = e$,	$c_1 e_1 = h_1 k_1 a + \alpha$,
$cf = f$,	$cf_1 = d$,	$c_1 f = 0$,	$c_1 f_1 = c_1$,
$cg = 0$,	$cg_1 = c$,	$c_1 g = g$,	$c_1 g_1 = h_1 a + \beta$,
$de = 0$,	$de_1 = d$,	$d_1 e = e$,	$d_1 e_1 = b_1$,
$df = 0$,	$df_1 = d$,	$d_1 f = f$,	$d_1 f_1 = c_1$,
$dg = 0$,	$dg_1 = d$,	$d_1 g = g$,	$d_1 g_1 = (h_1 + k_1)\, a + \beta + \gamma$,
$ef = 0$,	$ef_1 = e$,	$e_1 f = f$,	$e_1 f_1 = (hk + h_1 k_1 a) + \alpha + \delta$,
$eg = 0$,	$eg_1 = e$,	$e_1 g = g$,	$e_1 g_1 = (h + k_1 a) + \gamma + \delta$,
$fg = 0$,	$fg_1 = f$,	$f_1 g = g$,	$f_1 g_1 = (h_1 a + k) + \beta + \delta$.

aussage möglichst rasch *herauszuschälen*, die Tragweite derselben übersichtlich zu machen, insbesondre nämlich diese Kollektivaussage *nach den fünf Elementarfällen* alsbald *zu entwickeln.*

Letzteres wird erreicht durch successive „Ausrechnung", aussagenrechnerische Reduktion jener Kollektivaussage unter Benutzung der Tafeln.

Ein paar Beispiele mögen das Gesagte erläutern.

Sei etwa die Kollektivaussage folgende:

$$x = (A \;\overline{)\!(}\; B)\,(A \notin B) + (A \not\asymp B)\,(A \neq 0)\,(B = 0) +$$
$$+ (A \not\asymp B)\,(A \notin B)\,(A \not\ni B),$$

so haben wir (aus Tafel II⁰ und § 35, [3⁰] die Werte einsetzend, sodann aus Tafel VIII⁰ $c_1 g = g$, aus Tafel VI⁰ $ak = k$, aus VIII⁰ $b_1 c = f$ und $a_1 f = \gamma$, endlich aus III⁰ $g = \alpha$ berücksichtigend):

IX⁰. Summen der Grundbeziehungen unter sich.

$$\begin{array}{llll}
a_1+b=k+a_1, & a_1+b_1=k_1, & a+b=a+\beta+\delta, & a+b_1=a+\alpha+\gamma, \\
a_1+c=h+a_1, & a_1+c_1=h_1, & a+c=a+\gamma+\delta, & a+c_1=a+\alpha+\beta, \\
a_1+d=hk+a_1, & a_1+d_1=d_1+\delta, & a+d=a+\delta, & a+d_1=a+\alpha+\beta+\gamma, \\
a_1+e=h_1k+a_1, & a_1+e_1=e_1+\beta, & a+e=a+\beta, & a+e_1=a+\alpha+\gamma+\delta, \\
a_1+f=hk_1+a_1, & a_1+f_1=f_1+\gamma, & a+f=a+\gamma, & a+f_1=a+\alpha+\beta+\delta, \\
a_1+g=a_1, & a_1+g_1=1, & a+g=a+\alpha, & a+g_1=g_1, \\
\hline
b+c=(h+k)+\beta+\gamma+\delta, & b+c_1=f_1, & b_1+c=e_1, & b_1+c_1=d_1, \\
b+d=b, & b+d_1=1, & b_1+d=e_1, & b_1+d_1=d_1, \\
b+e=b, & b+e_1=1, & b_1+e=d_1, & b_1+e_1=e_1, \\
b+f=(h+k)+\beta+\gamma+\delta, & b+f_1=f_1, & b_1+f=b_1, & b_1+f_1=1, \\
b+g=b+\alpha, & b+g_1=g_1, & b_1+g=b_1, & b_1+g_1=1, \\
\hline
c+d=c, & c+d_1=1, & c_1+d=f_1, & c_1+d_1=d_1, \\
c+e=(h+k)+\beta+\gamma+\delta, & c+e_1=e_1, & c_1+e=c_1, & c_1+e_1=1, \\
c+f=c, & c+f_1=1, & c_1+f=d_1, & c_1+f_1=f_1, \\
c+g=c+\alpha, & c+g_1=g_1, & c_1+g=c_1, & c_1+g_1=1, \\
\hline
d+e=b, & d+e_1=e_1, & d_1+e=d_1, & d_1+e_1=1, \\
d+f=c, & d+f_1=f_1, & d_1+f=d_1, & d_1+f_1=1, \\
d+g=d+\alpha, & d+g_1=g_1, & d_1+g=d_1, & d_1+g_1=1, \\
\hline
e+f=(h_1k+h_1k)+\beta+\gamma, & e+f_1=f_1, & e_1+f=e_1, & e_1+f_1=1, \\
e+g=e+\alpha, & e+g_1=g_1, & e_1+g=e_1, & e_1+g_1=1, \\
\hline
f+g=f+\alpha, & f+g_1=g_1, & f_1+g=f_1, & f_1+g_1=1,
\end{array}$$

$$x = gc_1 + ah_1k + a_1cb_1 = g + h_1k + \gamma = h_1k + \alpha + \gamma$$

als die gesuchte Zerfällung der Aussage x in die fünf Elementarfächer. Dieselbe lässt sofort übersehen, welche Möglichkeiten der von den Gebieten A, B gebildeten Figur zugelassen nnd eventuell gefordert sind, welche dagegen ausgeschlossen — auch leuchtet das Ergebniss unmittelbar ein, wenn man sich die Bedeutung der Beziehungszeichen zum Bewusstsein bringt. —

Was verlangt die Aussage:

$$y = (a_1b_1 + bc_1 + cd_1)(ab + b_1c + c_1d + d_1a_1)?$$

Antwort: $y = (\alpha + \gamma + e + f)(k + f + 0 + \alpha + \beta + \gamma) =$
$= (hk_1+h_1k+\alpha+\beta+\gamma)(k+hk_1+\alpha+\beta+\gamma) = (hk_1+h_1k)+\alpha+\beta+\gamma.$ —

Wenn $z = e_1 f_1 (c + e)(d_1 + h)$ bedeutet, so wird man ebenso mittelst der Zwischenrechnung:

$$z = \{(hk + h_1 k_1 a) + \alpha + \delta\}\,\{(h + k) + \beta + \gamma + \delta\}\,\{a + \alpha + \beta + \gamma\} = a(h + k)(hk + h_1 k_1 a)$$

dies leicht reduziren zu:

$$z = hk\,. \quad \text{Etc.}$$

In dieser Weise können die hier gegebenen Tafeln auch dazu beitragen, die Aufgabe der Reduktion einer Kollektivaussage auf den Typus der Gleichung und Ungleichung gemäss § 36, Tafel IV⁰ und später noch § 39, Tafel XVII⁰ vorbereitend zu erleichtern.

Für manch' ein Untersuchungsfeld ist ständig $h = 0$ und $k = 0$, nämlich von vornherein die Möglichkeit ausgeschlossen, dass A oder B ein leeres Gebiet sei, „nichts" bedeute, oder, wie wir auch sagen können „sinnlos" oder „*undeutig*" werde. Dies wäre z. B. der Fall bei den Anwendungen auf eine Mannigfaltigkeit, welcher die identische Null nicht adjungirt ist, nicht angehört. Eine Exemplifikation bildet die Rechnung mit vieldeutigen Zahlen-Ausdrücken, mehrdeutigen Funktionen, welche für das ganze Zahlengebiet „explizirt" sind, niemals eines Wertes entbehren oder undeutig ausfallen, wie ich sie in meinem Lehrbuch der Arithmetik und Algebra [1] in Untersuchung gezogen habe. Da hier $h_1 = 1$, $k_1 = 1$ ist, so wird $\delta = d$, $\gamma = f$, $\beta = e$, und da ohnehin stets $\alpha = g$, so geht die „Hauptgleichung" nebst dem Tableau III⁰ über in:

$$\text{X}^0.\left\{\begin{array}{llll} & 1 = a + d + e + f + g, & & \\ a_1 = d + e + f + g, & b = d + e, & c = d + f, & \\ & b_1 = a + f + g, & c_1 = a + e + g, & \\ d_1 = a + e + f + g, & e_1 = a + \underbrace{d + f}_{c} + g, & f_1 = a + \underbrace{d + e}_{b} + g, & g_1 = a + \overbrace{e + \underbrace{d}_{}}^{b}\!\!\underbrace{{}+ f}_{c}, \end{array}\right.$$

wo nunmehr die Terme rechterhand sämtlich disjunkt sind.

Wir können dann sagen, *dass von den vier Zeichen der „Wertgemeinschaft"*:

$$\not\in\!\ni,\ \not\ni,\ \not\in,\ = \quad \text{(entsprechend } a_1,\ b,\ c,\ d\text{)}$$

das erste in die drei letzten und die drei ersten in das letzte übergehen oder ausarten *können*, wie ich dies schon [1] p. 148 bemerkte.

Die Tafeln VI⁰ und VII⁰ kommen dann von selbst in Wegfall, und verlohnt es, zusammenzustellen, zu was sich die Tafeln VIII⁰ und IX⁰ alsdann vereinfachen:

XI⁰. Multiplikationstabelle bei Ausschluss undeutiger Symbole.

———,	$a_1b=b=d+e$,	$a_1c=c=d+f$,	$a_1d=d$,	$a_1e=e$,	$a_1f=f$,	$a_1g=g$,
$ab_1=a$,	———,	$bc=d$,	$bd=d$,	$be=e$,	$bf=0$,	$bg=0$,
$ac_1=a$,	$b_1c_1=a+g$,	———,	$cd=d$,	$ce=0$,	$cf=f$,	$cg=0$,
$ad_1=a$,	$b_1d_1=b_1=a+f+g$,	$c_1d_1=c_1=a+e+g$,	———,	$de=0$,	$df=0$,	$dg=0$,
$ae_1=a$,	$b_1e_1=b_1=a+f+g$,	$c_1e_1=a+g$,	$d_1e_1=b_1=a+f+g$,	———,	$ef=0$,	$eg=0$,
$af_1=a$,	$b_1f_1=a+g$,	$c_1f_1=c_1=a+e+g$,	$d_1f_1=c_1=a+e+g$,	$e_1f_1=a+d+g$,	———,	$fg=0$,
$ag_1=a$,	$b_1g_1=a+f$,	$c_1g_1=a+e$,	$d_1g_1=a+e+f$,	$e_1g_1=a+d+f$,	$f_1g_1=a+d+e$,	———,
———,	$a_1b_1=f+g$,	$a_1c_1=e+g$,	$a_1d_1=e+f+g$,	$a_1e_1=d+f+g$,	$a_1f_1=d+e+g$,	$a_1g_1=c+d+f$,
$ab=0$,	———,	$bc_1=e$,	$bd_1=e$,	$be_1=d$,	$bf_1=b=d+e$,	$bg_1=b=d+e$,
$ac=0$,	$b_1c=f$,	———,	$cd_1=f$,	$ce_1=c=d+f$,	$cf_1=d$,	$cg_1=c=d+f$,
$ad=0$,	$b_1d=0$,	$c_1d=0$,	———,	$de_1=d$,	$df_1=d$,	$dg_1=d$,
$ae=0$,	$b_1e=0$,	$c_1e=e$,	$d_1e=e$,	———,	$ef_1=e$,	$eg_1=e$,
$af=0$,	$b_1f=f$,	$c_1f=0$,	$d_1f=f$,	$e_1f=f$,	———,	$fg_1=f$,
$ag=0$,	$b_1g=g$,	$c_1g=g$,	$d_1g=g$,	$e_1g=g$,	$f_1g=g$,	———.

XII^c. Additionstabelle bei Ausschluss undeutiger Symbole.

———,	$a_1+b=a_1=$ etc.,	$a_1+c=a_1=$ etc.,	$a_1+d=a_1=$ etc.,	$a_1+e=a_1=$ etc.,	$a_1+f=a_1=$ etc.,	$a_1+g=a_1=$ etc.,
$a+b_1=b_1=a+f+g$,	———,	$b+c=d+e+f$,	$b+d=b=d+e$,	$b+e=b=d+e$,	$b+f=d+e+f$,	$b+g=d+e+g$,
$a+c_1=c_1=a+e+g$,	$b_1+c_1=d_1=$ etc.,	———,	$c+d=c=d+f$,	$c+e=d+e+f$,	$c+f=c=d+f$,	$c+g=d+f+g$,
$a+d_1=d_1=$ etc.,	$b_1+d_1=d_1=$ etc.,	$c_1+d_1=d_1=$ etc.,	———,	$d+e=b=d+e$,	$d+f=c=d+f$,	$d+g=d+g$,
$a+e_1=e_1=$ etc.,	$b_1+e_1=e_1=$ etc.,	$c_1+e_1=\mathrm{i}$,	$d_1+e_1=\mathrm{i}$,	———,	$e+f=e+f$,	$e+g=e+g$,
$a+f_1=f_1=$ etc.,	$b_1+f_1=\mathrm{i}$,	$c_1+f_1=f_1=$ etc.,	$d_1+f_1=\mathrm{i}$,	$e_1+f_1=\mathrm{i}$,	———,	$f+g=f+g$,
$a+g_1=g_1=$ etc.,	$b_1+g_1=\mathrm{i}$,	$c_1+g_1=\mathrm{i}$,	$d_1+g_1=\mathrm{i}$.	$e_1+g_1=\mathrm{i}$,	$f_1+g_1=\mathrm{i}$,	———,
———,	$a_1+b_1=\mathrm{i}$,	$a_1+c_1=\mathrm{i}$,	$a_1+d_1=\mathrm{i}$,	$a_1+e_1=\mathrm{i}$,	$a_1+f_1=\mathrm{i}$,	$a_1+g_1=\mathrm{i}$,
$a+b=a+d+c$,	———,	$b+c_1=f_1=$ etc.,	$b+d_1=\mathrm{i}$,	$b+e_1=\mathrm{i}$,	$b+f_1=f_1=$ etc.,	$b+g_1=g_1=$ etc.,
$a+c=a+d+f$,	$b_1+c=e_1=$ etc.,	———,	$c+d_1=\mathrm{i}$,	$c+e_1=e_1=$ etc.,	$c+f_1=\mathrm{i}$,	$c+g_1=g_1=$ etc.,
$a+d=a+d$,	$b_1+d=e_1=$ etc.,	$c_1+d=f_1=$ etc.,	———,	$d+e_1=e_1=$ etc.,	$d+f_1=f_1=$ etc.,	$d+g_1=g_1=$ etc.
$a+e=a+e$,	$b_1+e=d_1=$ etc.,	$c_1+e=c_1=a+c+g$,	$d_1+e=d_1=$ etc.,	———,	$e+f_1=f_1=$ etc,	$e+g_1=g_1=$ etc.,
$a+f=a+f$,	$b_1+f=b_1=a+f+g$,	$c_1+f=d_1=$ etc.,	$d_1+f=d_1=$ etc.,	$e_1+f=e_1=$ etc.,	———,	$f+g_1=g_1=$ etc.,
$a+g=a+g$,	$b_1+g=b_1=a+f+g$,	$c_1+g=c_1=a+e+g$,	$d_1+g=d_1=$ etc.,	$e_1+g=e_1=$ etc.,	$f_1+g=f_1=$ etc.,	———

§ 38. Erweiterung des Beziehungskreises durch Zuzug auch der negirten Gebiete.

Es wurde schon unter Theorem 37) erwähnt, dass die Anwendung desselben, oder der Schluss von einer Subsumtion $A \Subset B$ auf die $B_1 \Subset A_1$ (oder umgekehrt) genannt wird die *Konversion — durch Kontraposition —* des die betreffende Prämisse bildenden Subsumtionsurteils. Ebenso leistete das Theorem 32) in Gestalt des Schlusses von einer Gleichung $A = B$ auf die $A_1 = B_1$ (oder umgekehrt) diese „Konversion durch Kontraposition" für die umkehrbaren oder reziprokabelen Urteile.*)

Dies verallgemeinernd wollen wir nunmehr aus einer Beziehung irgend welcher Art zwischen irgend zweien der vier Gebiete A, B, A_1, B_1 auf jede damit äquivalente Beziehung zwischen wiederum zweien von diesen Gebieten schliessen lernen.

Zu dem Ende ziehen wir ausser den sämtlichen in § 34 eingeführten Beziehungen zwischen den Gebieten A und B selber auch noch diejenigen in Betracht, welche aus jenen hervorgehen, wenn man B oder A, oder beide Gebiete durch ihre Negationen B_1 resp. A_1 ersetzt.

Um zunächst diese zahlreichen Beziehungen als Aussagen systematisch, übersichtlich und mnemonisch zu bezeichnen, lassen wir die in § 34 den Symbolen a_1^{01}, a_1^{10} und a_1^{11} untergelegte Bedeutung oder gegebene Auslegung fallen und verwenden die Exponenten 01, 10 und 11 in einem neuen (bei a_1 hiervon abweichenden) Sinne; wir machen uns also unabhängig von gewissen in § 34 vorübergehend stipulirten, zu einem Teil aber inzwischen schon überflüssig gewordenen, ohnehin antiquirten Bezeichnungen.

Es werde fortan unter a_1^{01} verstanden die Aussage a_1, wenn darin A belassen, aber B durch B_1 ersetzt wird,

unter a_1^{10} die Aussage a_1, wenn umgekehrt darin A durch A_1 ersetzt, B belassen wird,

mit a_1^{11} werde die Aussage a_1 bezeichnet, wenn darin A durch A_1 und zugleich auch B durch B_1 ersetzt wird.

Analog werde jetzt b^{01}, b^{10} und b^{11} erklärt als die Aussage b, nachdem in dieser bezüglich B durch B_1, oder A durch A_1, oder B nebst A durch B_1 und A_1 ersetzt sind, und finde c^{01}, c^{10}, c^{11} und so weiter bis g^{01}, g^{10} und g^{11} (mit letzterem zugleich auch α^{01}, α^{10}, und α^{11}) und dann noch weiter $\beta^{01}, \ldots$ bis δ^{11} die entsprechende Erklärung.

---

*) Die man auch *konvertible* nennen könnte — „konvertibel" jedoch in andrem Sinne, nämlich mittelst einfacher Umkehrung der „conversio *simplex*". In Bezug auf die Umkehrung mittelst „Kontraposition" würden *alle* Urteile als konvertible zu bezeichnen sein.

Nach II⁰ haben wir also die Bedeutungen:

$$a_1^{01} = \{A \not\asymp B_1\}, \qquad a_1^{10} = \{A_1 \not\asymp B\}, \qquad a_1^{11} = \{A_1 \not\asymp B_1\},$$
$$a^{01} = \{A \divideontimes B_1\}, \qquad a^{10} = \{A_1 \divideontimes B\}, \qquad a^{11} = \{A_1 \divideontimes B_1\},$$
$$b^{01} = \{A \not\ni B_1\}, \qquad b^{10} = \{A_1 \not\ni B\}, \qquad b^{11} = \{A_1 \not\ni B_1\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\delta^{01} = \{A \overset{\circ}{-} B_1\}, \qquad \delta^{10} = \{A_1 \circ\!- B\}, \qquad \delta^{11} = \{A_1 \;^\circ\; B\}.$$

Diese Aussagen werden zum Teil auf frühere zurückkommen und liefern uns dann Regeln der „Konversion“ im eigentlichen Sinne.

Zunächst sollen diese sämtlichen Aussagen nach den 5 Elementarfällen entwickelt, über die 5 Fächer verteilt werden.

Dazu bedürfen wir ausser den beiden h, k noch dreier weitern Hülfsaussagen mit ihren Negationen, nämlich der folgenden:

$$m = \{A_1 = 0\} = \{A = 1\}, \qquad m_1 = \{A_1 \neq 0\} = \{A \neq 1\},$$
$$n = \{B_1 = 0\} = \{B = 1\}, \qquad n_1 = \{B_1 \neq 0\} = \{B \neq 1\},$$
$$l = \{A_1 B_1 = 0\}, \qquad l_1 = \{A_1 B_1 \neq 0\}.$$

Für die Aussage m brauchte man freilich kein neues Zeichen; man könnte sie wegen $m = h^{10} = h^{11}$ (sintemal für eine B nicht enthaltende Aussage es einerlei, ob man B durch B_1 ersetzt, oder nicht) konsequenterweise durch eines dieser beiden letzteren Symbole darstellen, während $h^{01} = h$ bedeuten würde, und ebenso könnte ja $n = k^{10} = k^{11}$ genannt werden, während $k^{01} = k$ bleibt. Endlich ist ersichtlichermassen laut Definition l einerlei mit a^{11}.

Allein für Hülfssymbole, die nicht nur als linke Seite von Aussagenäquivalenzen anzusetzen sind, sondern auch rechterhand in komplizirtere Aus-

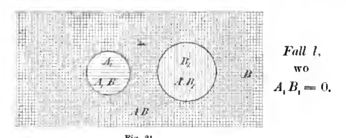


Fig. 21.

drücke wiederholt eingehen werden, erscheinen uns diese systematisch gewählten Zeichen als zu schwerfällig und ziehen wir vor, jene vorstehend eingeführten einfacheren Namen dafür zu gebrauchen.

Nach Th. 34₊) ist: $1 = AB + AB_1 + A_1B + A_1B_1$. Bezüglich der drei ersten von den vier rechts zusammengefassten Termen kommt das Verschwinden immer auf eine unsrer früher betrachteten Beziehungen

hinaus, indem $\{AB = 0\} = a$, $\{AB_1 = 0\} = c$, $\{A_1 B = 0\} = b$ ist. Nunmehr haben wir aber in Gestalt von l auch ein Symbol, um auszudrücken, dass auch der vierte und letzte Term verschwinde, oder verschwinden solle.

Diesen Fall, der in der That Interesse beansprucht, versinnlicht die Figur 21, in welcher A den (vertikal schraffirten) Aussenkreis von A_1, B den (horizontal schraffirten) Aussenkreis von B_1 bedeutet.

In unserm früheren engeren Sinne des Wortes „Beziehung“ stellt dieser Fall nur eine Beziehung zwischen A_1 und B_1 vor, im weiteren Sinne können wir ihn auch als eine Beziehung zwischen A und B hinstellen.

Für die *Grund-* und obigen Hülfsbeziehungen gibt die Lösung der gestellten Aufgabe im Überblick die Tafel:

XIII⁰. **Zerfällung der hinzugekommenen Grundbeziehungen.**

$$m = mk + m\beta + mn\delta, \quad m_1 = m_1 a + \alpha + m_1\beta + \gamma + m_1 n_1 \delta,$$
$$n = nh + n\gamma + mn\delta, \quad n_1 = n_1 a + \alpha + \beta + n_1\gamma + m_1 n_1 \delta,$$
$$l = a^{11} = b^{01} = c^{10} = la + l\alpha + m\beta + n\gamma + mn\delta,$$
$$l_1 = a_1^{11} = b_1^{01} = c_1^{10} = l_1 a + l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma + m_1 n_1\delta;$$
$$a_1^{01} = b_1^{11} = c_1, \quad a^{01} = b^{11} = c, \quad a_1^{10} = c_1^{11} = b_1, \quad a^{10} = c^{11} = b;$$
$$b^{10} = c^{01} = a, \qquad b_1^{10} = c_1^{01} = a_1;$$
$$d^{01} = d^{10} = la, \quad d_1^{01} = d_1^{10} = l_1 a + \alpha + \beta + \gamma + \delta, \quad d^{11} = d, \quad d_1^{11} = d_1;$$
$$e^{01} = f^{10} = l\alpha + m\beta + n\gamma + mn\delta, \quad e_1^{01} = f_1^{10} = a + l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma + m_1 n_1\delta$$
$$e^{10} = f^{01} = l_1 a, \qquad e_1^{10} = f_1^{01} = la + \alpha + \beta + \gamma + \delta,$$
$$e^{11} = f, \quad e_1^{11} = f_1, \qquad f^{11} = e, \quad f_1^{11} = e_1;$$
$$g^{01} = \alpha^{01} = l_1\alpha + m_1\beta, \quad g_1^{01} = \alpha_1^{01} = a + l\alpha + m\beta + \gamma + \delta,$$
$$g^{10} = \alpha^{10} = l_1\alpha + n_1\gamma, \quad g_1^{10} = \alpha_1^{10} = a + l\alpha + \beta + n\gamma + \delta,$$
$$g^{11} = \alpha^{11} = h_1 k_1 l_1 a + l_1\alpha, \quad g_1^{11} = \alpha_1^{11} = (h + k + la) + l\alpha + \beta + \gamma + \delta$$

— worin bei denjenigen Zerfällungen, die auf solche der Tafel III⁰ zurückkommen, dieselben nicht wiederholt angegeben sind, sondern durch die rechte Seite der Aussagenäquivalenz nur einfach auf diese Tafel zurückverwiesen ist. Hiezu ist anzufügen die Tafel für die

XIV⁰. **Zerfällung der noch hinzukommenden Elementarbeziehungen.**

$$\beta^{01} = l\alpha + m\beta, \quad \beta_1^{01} = a + l_1\alpha + m_1\beta + \gamma + \delta,$$
$$\beta^{10} = k_1 l_1 a, \quad \beta_1^{10} = (k + la) + \alpha + \beta + \gamma + \delta,$$
$$\beta^{11} = hk_1 n_1 + n_1\gamma, \quad \beta_1^{11} = (k + hn + h_1 a) + \alpha + \beta + n\gamma + \delta;$$

$$\begin{array}{ll}
\gamma^{01} = h_1 l_1 a, & \gamma_1^{01} = (h + la) + \alpha + \beta + \gamma + \delta, \\
\gamma^{10} = l\alpha + n\gamma, & \gamma_1^{10} = a + l_1\alpha + \beta + n_1\gamma + \delta, \\
\gamma^{11} = h_1 k m_1 + m_1\beta, & \gamma_1^{11} = (h + km + k_1 a) + \alpha + m\beta + \gamma + \delta; \\
\delta^{01} = h_1 la, & \delta_1^{01} = (h + l_1 a) + \alpha + \beta + \gamma + \delta, \\
\delta^{10} = k_1 la, & \delta_1^{10} = (k + l_1 a) + \alpha + \beta + \gamma + \delta, \\
\delta^{11} = hk + m_1 n_1 \delta, & \delta_1^{11} = (h_1 + k_1)\, a + \alpha + \beta + \gamma + mn\delta.
\end{array}$$

Zu diesen Tafeln verdient noch angemerkt zu werden, dass die wiederholt als Term in ihnen auftretende Aussage *la bedeutet, dass die Gebiete A und B Negationen von einander sind.* Nach Th. 24_+) und 39_+) haben wir nämlich in der That:

$$la = \{AB = 0\}\{A_1 B_1 = 0\} = \{AB + A_1 B_1 = 0\} = \{A = B_1\} = \{B = A_1\}.$$

Der Beweis ihrer Formeln — soweit (unter XIII⁰) die Aussagen linkerhand nicht unmittelbar auf solche der Tafel III⁰ ohnehin zurückkommen — kann geleistet werden

erstens selbständig, nach dem Schema:

$$x = xa + x\alpha + x\beta + x\gamma + x\delta$$

— wo also x die Aussage linkerhand in irgend einer zu beweisenden Formel vorstellt — indem man eine Reihe von Hülfssätzen dazu aufstellt, die sich analog wie die in § 35 beweisen lassen.

Als solche seien namhaft gemacht:

XV⁰. Hülfssätze.

$$\begin{array}{lllll}
m \Subset b, & \text{oder} & mb_1 = 0, & mb = m, & m_1 b_1 = b_1, \\
n \Subset c, & & nc_1 = 0, & nc = n, & n_1 c_1 = c_1, \\
m \Subset l, & & ml_1 = 0, & ml = m, & m_1 l_1 = l_1, \\
n \Subset l, & & nl_1 = 0, & nl = n, & n_1 l_1 = l_1;
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
dm \Subset n, & \text{oder} & dmn_1 = 0, & dmn = dm, & dm_1 n_1 = dn_1, & d_1 mn_1 = mn_1, \\
dn \Subset m, & & dm_1 n = 0, & dmn = dn, & dm_1 n_1 = dm_1, & d_1 m_1 n = m_1 n, \\
mn \Subset d, & & d_1 mn = 0, & dmn = mn, & d_1 mn_1 = d_1 m, & d_1 m_1 n = d_1 n,
\end{array}$$

namentlich also: $mn = dm = dn = dmn, \quad dm_1 = dn_1 = dm_1 n_1.$

Sonach auch:

$$\begin{array}{lllll}
mf = 0 & \text{oder}\ \ mf_1 = m, & m_1 f = f; & \text{desgl.}\ \ ne = 0, & ne_1 = n, \quad n_1 e = e; \\
m\gamma = 0, & m\gamma_1 = m, & m_1\gamma = \gamma; & n\beta = 0, & n\beta_1 = n, \quad n_1\beta = \beta;
\end{array}$$

$$mn_1\delta = 0, \quad m_1n\delta = 0, \quad mn\delta_1 = 0, \quad \text{also wie oben:}$$

$$mn = m\delta = n\delta = mn\delta, \quad m_1\delta = n_1\delta = m_1n_1\delta. \quad \text{Ferner:}$$

$$mg = m\alpha = 0, \quad m_1\alpha = \alpha; \quad ng = n\alpha = 0, \quad n_1\alpha = \alpha;$$

$$hm = 0, \quad hm_1 = h, \quad h_1m = m; \quad kn = 0, \quad kn_1 = k, \quad k_1n = n;$$

$$ma = kl = km, \quad kl_1 = km_1; \quad na = hl = hn, \quad hl_1 = hn_1;$$

$$lb = m, \quad lc = n, \quad ld = mn; \quad l\beta = m\beta, \quad l\gamma = n\gamma, \quad l\delta = mn\delta;$$

$$hkl = 0, \quad hkl_1 = hk, \quad hk_1l = hl = hn, \quad h_1kl = kl = km;$$

$$m_1k_1a = k_1a, \quad n_1h_1a = h_1a, \quad mna = 0.$$

Von diesen werden wir einige (der das Symbol l enthaltenden) auch später noch gebrauchen, und reichen dieselben jedenfalls zum Beweise des ersten Teils der Tafel XIII⁰ aus. Im übrigen möge die Formeln in dieser Weise zu begründen als eine Fundgrube von Übungsaufgaben dem Studirenden empfohlen sein.

Zweitens kann man aber auch sich begnügen, die Formeln unsrer Tafeln blos durch Rechnung zu verifiziren auf eine Weise, die wir im nächsten Paragraphen auseinandersetzen und die als das *allerbequemste* Mittel erscheint, sich der Berechtigung zu ihrem Gebrauche zu versichern. Das Verfahren erscheint zwar auf den ersten Blick als weniger heuristisch, doch würden im Anschluss an dasselbe sich auch Wege zeigen lassen, die Formeln systematisch durch Rechnung zu entdecken.

Sieht man bei Tafel XIII⁰ von den Zerfällungen in die 5 Fächer ab, so bleiben doch noch gewisse Aussagenäquivalenzen daselbst stehen, und diese lösen das eingangs statuirte Problem, die „Konversion mittelst Kontraposition" der bisherigen Beziehungen zu leisten, soweit eine solche zulässig erscheint. Das Wesentlichste von diesen Sätzen haben wir bereits im § 36 unter Tafel V⁰ zusammengestellt. Sie geben zugleich im Kreise der bisherigen Beziehungen die aus einer gegebenen Relation ziehbaren *„unmittelbaren Folgerungen"* an, soweit diese Folgerungen sich auch umkehren lassen.

Zufolge der Berücksichtigung auch von A_1, B_1 neben A, B sind zu den alten Grund-, Hülfs- und Elementarbeziehungen im gegenwärtigen Paragraphen noch fernere Beziehungen hinzugekommen. Alle zusammen wollen wir *„urwüchsige Umfangsbeziehungen"* schlechtweg nennen (im Hinblick auf ihre Interpretirbarkeit für die Logik der Begriffsumfänge), und zwar „urwüchsige" im Gegensatz zu den später noch in's Auge zu fassenden „abgeleiteten" Umfangsbeziehungen. Jene werden also entweder Grund- oder Elementarbeziehungen sein, sei es zwischen A und B, sei es zwischen A und B_1, oder zwischen

A_1 und B, oder zwischen A_1 und B_1 — oder aber sie werden als die „Hülfsbeziehungen" das Verschwinden resp. Nichtverschwinden von nur einem der Gebiete A, B selbst oder von seiner Negation ausdrücken.

§ 39. Die denkbaren Umfangsbeziehungen überhaupt und ihre Darstellung durch vier primitive (De Morgan's). Die möglichen Aussagen über n Klassen und Peano's Anzahl derselben.

Am bequemsten wird man sämtliche Umfangsbeziehungen ausdrücken durch die vier folgenden, welche *„primitive* Beziehungen" heissen mögen:

XVI⁰. $a = \{AB = 0\}$, $c = \{AB_1 = 0\}$, $b = \{A_1 B = 0\}$, $l = \{A_1 B_1 = 0\}$,

und deren Negationen:

$a_1 = \{AB \neq 0\}$, $c_1 = \{AB_1 \neq 0\}$, $b_1 = \{A_1 B \neq 0\}$, $l_1 = \{A_1 B_1 \neq 0\}$.

Für die Grund- und Elementarbeziehungen ist dies bereits in § 36, Tafel IV⁰ wesentlich geleistet, und erhalten wir aus den dortigen Formeln — durch Einsetzung der für die rechterhand stehenden Aussagen geltenden Symbole — unmittelbar den Anfang der nächstfolgenden Tafel, sofern wir nur eines berücksichtigen und zwar dieses: Nach Th. 24_+) ist:

$$(AB_1 + A_1 B = 0) = (AB_1 = 0)(A_1 B = 0)$$

und wie hieraus durch beiderseitiges Negiren (Kontraposition) folgt auch:

$$(AB_1 + A_1 B \neq 0) = (AB_1 \neq 0) + (A_1 B \neq 0). \text{ —}$$

Ebenso ist aber auch ferner:

$$h = (A = 0) = (AB + AB_1 = 0) = (AB = 0)(AB_1 = 0)$$

und analog:

$$k = (B = 0) = (AB + A_1 B = 0) = (AB = 0)(A_1 B = 0).$$

Sonach werden auch die Hülfsrelationen — zunächst h, k — sich in Faktoren der obigen vier Formen zerspalten lassen.

Die Fortsetzung der Tafel ergibt sich leicht, wenn man hierin, sowie in IV⁰, B durch B_1 oder (resp. und) A durch A_1 ersetzt und dann wieder rechterhand für die Aussagen selbst die zur Abkürzung für sie eingeführten Symbole schreibt.

XVII⁰. Tafel für die Darstellung sämtlicher bisherigen Umfangsbeziehungen zwischen Gebieten A, B, A_1, B_1 durch die vier primitiven Beziehungen.

XVII$_a^0$. Die auxiliären Relationen.

$$h = ac,\quad h_1 = a_1 + c_1,\quad k = ab,\quad k_1 = a_1 + b_1,\qquad l = l,\quad l_1 = l_1,$$
$$m = bl,\quad m_1 = b_1 + l_1,\quad n = cl,\quad n_1 = c_1 + l_1.$$

XVII$_b^0$. Grund- und Elementarbeziehungen für A, B:

$$a = a,\quad a_1 = a_1,\quad b = b,\quad b_1 = b_1,\quad c = c,\quad c_1 = c_1,$$
$$d = d^{11} = bc,\qquad d_1 = d_1^{\,11} = b_1 + c_1,$$
$$e = f^{11} = bc_1,\quad e_1 = f_1^{\,11} = b_1 + c,\quad f = e^{11} = b_1 c,\quad f_1 = e_1^{\,11} = b + c_1,$$
$$g = \alpha = a_1 b_1 c_1,\qquad g_1 = \alpha_1 = a + b + c,$$
$$\beta = a_1 b c_1,\quad \beta_1 = a + b_1 + c,\quad \gamma = a_1 b_1 c,\quad \gamma_1 = a + b + c_1,$$
$$\delta = a_1 bc,\qquad \delta_1 = a + b_1 + c_1.$$

XVII$_c^0$. Desgleichen mit Hinzuziehung von A_1, B_1:

$$a_1^{\,11} = b_1^{\,01} = c_1^{\,10} = l_1,\qquad a^{11} = b^{01} = c^{10} = l,$$
$$a_1^{\,01} = b_1^{\,11} = c_1,\quad a^{01} = b^{11} = c,\quad a_1^{\,10} = c_1^{\,11} = b_1,\quad a^{10} = c^{11} = b,$$
$$b_1^{\,10} = c^{01} = a,\qquad b_1^{\,10} = c_1^{\,01} = a_1,$$
$$d^{01} = d^{10} = al,\qquad d_1^{\,01} = d_1^{\,10} = a_1 + l_1,$$
$$e^{01} = f^{10} = a_1 l,\quad e_1^{\,01} = f_1^{\,10} = a + l_1,\quad e^{10} = f^{01} = al_1,\quad e_1^{\,10} = f_1^{\,01} = a_1 + l,$$
$$g^{01} = \alpha^{01} = a_1 c_1 l_1,\quad g_1^{\,01} = \alpha_1^{\,01} = a + c + l,\quad g^{10} = \alpha^{10} = a_1 b_1 l_1,\quad g_1^{\,10} = \alpha_1^{\,10} = a + b + l,$$
$$g^{11} = \alpha^{11} = b_1 c_1 l_1,\qquad g_1^{\,11} = \alpha_1^{\,11} = b + c + l,$$
$$\beta^{01} = a_1 c_1 l,\ \beta_1^{\,01} = a + c + l_1,\ \beta^{10} = ab_1 l_1,\ \beta_1^{\,10} = a_1 + b + l,\ \beta^{11} = b_1 c l_1,\ \beta_1^{\,11} = b + c_1 + l,$$
$$\gamma^{01} = ac_1 l_1,\ \gamma_1^{\,01} = a_1 + c + l,\ \gamma^{10} = a_1 b_1 l,\ \gamma_1^{\,10} = a + b + l_1,\ \gamma^{11} = bc_1 l_1,\ \gamma_1^{\,11} = b_1 + c + l,$$
$$\delta^{01} = ac_1 l,\ \delta_1^{\,01} = a_1 + c + l_1,\ \delta^{10} = ab_1 l,\ \delta_1^{\,10} = a_1 + b + l_1,\ \delta^{11} = bcl_1,\ \delta_1^{\,11} = b_1 + c_1 + l.$$

Zwischen den vier primitiven Aussagen a, c, b, l selbst besteht übrigens eine Relation, nämlich diese:

$$a_1 + c_1 + b_1 + l_1 = 1, \quad \text{also auch}$$
$$abcl = 0$$

zufolge des Theorems $34_\times$) und $\overline{32}$).

In der letzteren Fassung unsrer Relation als einer „Inkonsistenz“

lässt dieselbe in der That sich indirekt, durch „reductio ad absurdum" beweisen:

Gälte nämlich zugleich:

$$(AB = 0)(AB_1 = 0)(A_1B = 0)(A_1B_1 = 0)$$

so hätten wir:

$$AB + AB_1 + A_1B + A_1B_1 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

und führte das Th. 34_+) auf die Absurdität:

$$0 = 1.$$

Mit Hülfe der Ausdrücke in den Tafeln XVII⁰, die an Einfachheit nichts zu wünschen übrig lassen, können nun sämtliche Formeln der gegenwärtigen und der vorigen Vorlesung auf das leichteste verifizirt werden und laufen sie durchweg auf analytische Identitäten, wo nicht auf die Relation $acbl = 0$, hinaus. Auch stehen mancherlei Kontrolen zur Verfügung, indem man z. B. die angegebene Negation einer Relation aus dieser selbst ableiten oder auch direkt verifiziren kann. Etc.

Erinnert man sich der *vier* Urteilsformen der Wortsprache, so fällt der Umstand auf, dass es wieder *vier* Urteilsformen waren — — zusammen mit ihren Negationen aber *acht* Formen — durch welche alle Umfangsbeziehungen sich so ungezwungen darstellen liessen. Diese aber sind mit jenen nur zur Hälfte identisch.

Von den Buchstaben a, e, i, o haben wir von § 33 ab die beiden a und e in einem Sinne gebraucht, der zu dem herkömmlichen dortselbst angegebenen in keiner Beziehung stand, vielmehr von demselben wesentlich abwich. Nimmt man die Buchstaben wieder im früheren in § 33 erläuterten Sinne, so sollen (zur Unterscheidung von der teilweise ihnen später beigelegten Bedeutung) dieselben nun in Gestalt von $\hat{a}$, $\hat{e}$, $\hat{\imath}$, $\hat{o}$ mit einem Circumflexe versehen werden.

Es zeigt sich, dass

$$\hat{a} = c = (AB_1 = 0),$$
$$\hat{e} = a = (AB = 0),$$
$$\hat{\imath} = a_1 = (AB \neq 0),$$
$$\hat{o} = c_1 = (AB_1 \neq 0). \text{ —}$$

Jene acht Urteilsformen decken sich nicht ganz mit den sogenannten „acht Propositionen" De Morgan's in deren gewöhnlichem Sinne, insofern De Morgan, wenn er von „alle A" spricht, das Verschwinden dieser Subjektklasse auszuschliessen pflegt, sich also auf eine Mannigfaltigkeit bezieht, welche das Nichts nicht adjungirt hat, und indem er ferner „einige A"

als im Gegensatz zu „alle A“ stehend aufgefasst wissen will. Diese Unterschiede sind keineswegs belanglos, vielmehr von tiefeinschneidender Wirkung. Formell aber fallen die einen und die andern Urteilsformen zusammen. Auch konnte De Morgan selbst nicht umhin, sie in unserm Sinne zu nehmen, da wo er von denselben unter dem von ihm so genannten „onymatischen“ Gesichtspunkt spricht, unter welchem das Urteil sein soll die Behauptung oder Verneinung der Verbundenheit (Concomitanz) zweier Namen, sonach $AB \neq 0$ bedeutete: die Namen A und B haben eine (und $AB = 0$: sie haben keine) gemeinsame Anwendung. Vergl. Syllabus[3], p. 112 und [8].

Ich will die vier primitiven Aussagen XVI⁰ samt ihren Negationen kurz „die acht De Morgan'schen Propositionen“ nennen. Aus ihnen müssen alle denkbaren Urteile über die Klassen A und B sich zusammensetzen lassen.

Der Frage, *wie vielerlei und welche von einander verschiedenen Aussagen sich über zwei bestimmte Gebiete* (A und B) in unsrer Zeichensprache *überhaupt abgeben lassen*, sollen die weiteren Betrachtungen gewidmet sein. Als „verschieden“ haben nur solche Aussagen zu gelten, die nicht denknotwendig einander äquivalent sind, also auch für mindestens einen der 5 Elementarfälle verschiedenes statuiren.

Zunächst ist es leicht sich über die möglichen Kombinationen zu orientiren, in welchen die 8 De Morgan'schen Propositionen *als simultane* ausgesprochen werden können.

Es sind 28 „Amben“, nämlich $\frac{8 \times 7}{1 \times 2}$ Kombinationen (ohne Wiederholung) zu zweien möglich. Nach Abrechnung der vier inkompatiblen aa_1, cc_1, bb_1, ll_1 bleiben 24. Von diesen erweisen sich unter den als „urwüchsige“ aufgezählten Umfangsbeziehungen vertreten folgende zehn:

$ac = h$	$ab = k$	$al = d^{01} = d^{10}$	$cb = d$	$cl = n$	$bl = m$
		$al_1 = c^{10} = f^{01}$	$cb_1 = f$		
		$a_1l = c^{01} = f^{10}$	$c_1b = c$		

Nicht vertreten sind die vierzehn:

	ac_1	ab_1			cl_1	bl_1
$x)$	a_1c	a_1b			c_1l	b_1l
	a_1c_1	a_1b_1	a_1l_1	c_1b_1	c_1l_1	b_1l_1

welche wir so aufgestellt haben, dass sie sich mit den darüber stehenden ohne weiteres zu dem vollständigen Tableau der (leidlich) geordneten Binionen oder Amben zusammenschieben liessen.

Zu dreien könnte man die 8 Propositionen auf $\frac{8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3} = 56$ Arten ohne Wiederholungen kombiniren. Davon fallen aber als inkompatibel, unzulässig fort die $4 \times 6 = 24$, in welchen ein Faktor mit seiner Negation zusammentrifft (wie aa_1 verbunden mit c, b, l, c_1, b_1 oder l_1; etc.).

Von den 32 hienach noch zugelassenen Ternionen oder „Ternen" ist unter unsern urwüchsigen Umfangsbeziehungen schon aufgezählt gerade die Hälfte, nämlich die 16 folgenden:

$a_1cb = \delta$	$ac_1l = \delta^{01}$	$ab_1l = \delta^{10}$	$cbl_1 = \delta^{11}$
$a_1cb_1 = \gamma$	$ac_1l_1 = \gamma^{01}$	$ab_1l_1 = \beta^{10}$	$cb_1l_1 = \beta^{11}$
$a_1c_1b = \beta$	$a_1c_1l = \beta^{01}$	$a_1b_1l = \gamma^{10}$	$c_1bl_1 = \gamma^{11}$
$a_1c_1b_1 = g = \alpha$	$a_1c_1l_1 = g^{01} = \alpha^{01}$	$a_1b_1l_1 = g^{10} = \alpha^{10}$	$c_1b_1l_1 = g^{11} = \alpha^{11}$.

Nicht aufgenommen erscheinen die andern 16:

	acb	acl	abl	cbl
$y)$	acb_1	acl_1	abl_1	cb_1l
	ac_1b	a_1cl	a_1bl	c_1bl
	ac_1b_1	a_1cl_1	a_1bl_1	c_1b_1l.

Von den $\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 70$ möglichen Quaternen könnte man wieder diejenigen in Abrechnung zu bringen suchen, welche (weil sie ein- oder zweimal ein Symbol samt seiner Negation zum Faktor haben) als inkonsistente verschwinden. Bequemer lässt sich aber die Zahl und Beschaffenheit der zulässigen Quaternen direkt ermitteln.

Man sieht, dass in einer solchen die vier Faktoren verschiedene Buchstaben sein müssen. Denn käme in einer Quaterne ein Buchstabe zweimal als Faktor vor, so könnte das, da eine tautologische Wiederholung ausgeschlossen ist, nur einmal mit und einmal ohne Negationsstrich sein, die Quaterne müsste also verschwinden. Jenachdem nun in $acbl$ der erste, zweite, dritte oder vierte Faktor ohne oder mit Negationsstrich steht, werden wir also $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$ möglicherweise zulässige Quaternen erhalten.

Von diesen war aber die eine: $acbl$, welche $= 0$, als Inkonsistenz zu verwerfen. Und mit Rücksicht auf letztere kommen von den 15 übrigen Quaternen noch die folgenden viere auf (schon angeführte) Ternen zurück:

$$acbl_1 = acb, \qquad acb_1l = acl,$$
$$ac_1bl = abl, \qquad a_1cbl = cbl,$$

wie man leicht nach dem Vorbild:

$$a_1cbl = 0 + a_1cbl = acbl + a_1cbl = (a + a_1)\,cbl = 1 \cdot cbl = cbl$$

auch für die übrigen beweist.

Demnach fallen nur noch in Betracht die 11 Quaternen:

$$z) \quad \begin{array}{c|c|c} acb_1l_1 & & a_1cb_1l_1 \\ ac_1bl_1 & a_1cbl_1 & a_1c_1bl_1 \\ ac_1b_1l & a_1cb_1l & a_1c_1b_1l \\ ac_1b_1l_1 & a_1c_1bl & a_1c_1b_1l_1 . \end{array}$$

Mehr wie vier Faktoren, entnommen aus der Gruppe der acht primitiven Propositionen: a, c, b, l, a_1, c_1, b_1, l_1, können nicht zu einem Produkt zusammengefasst werden, ohne dass sich einer von den vier Buchstaben zweimal vertreten findet, infolge welchen Umstandes aber, wie vorhin ausgeführt, das Produkt dann verschwinden müsste.

Wir haben also die möglichen *Produkte* von De Morgan'schen Propositionen mit Vorstehendem erschöpft.

Unter x), y) und z) ergaben sich $14 + 16 + 11 = 41$ neue Propositionen, die wir als „*abgeleitete* Beziehungen" zu bezeichnen haben werden. Sind diese nun aber auch wirklich zulässig, und sind sie sämtlich unter sich und von den früheren verschieden?

Auf diese Fragen erlangen wir Antwort, indem wir zuvörderst die hinzugekommenen Produkte sämtlich in die 5 Elementarfächer zerfällen. Zu dem Ende braucht man nur die Tafel zu benutzen, welche gewisse Teile aus den Tafeln III° und XIII° hervorhebend zusammenfasst:

XVIII°. Zerfällung der Unionen von De Morgan's Propositionen.

$$a = a, \qquad c = h + \gamma + \delta,\ b = k + \beta + \delta,\ l = la + l\alpha + m\beta + n\gamma + mn\delta,$$
$$a_1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta,\ c_1 = h_1a + \alpha + \beta,\ b_1 = k_1a + \alpha + \gamma,\ l_1 = l_1a + l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma + m_1n_1\delta.$$

[Man beachte hiezu, dass h, $= ha$, und k, $= ka$, in das Fach a fallen, und dass:

$$1 = a + \alpha + \beta + \gamma + \delta.]$$

Die Anwendung dieser Tafeln wird eine blosse Multiplikationsübung sein, erleichtert durch den Prozess des Übereinanderschiebens.

Mit der sich hiernach ergebenden Zerfällung der neu hinzugekommenen oder „zusammengesetzten“ Aussagen wollen wir aber sogleich auch diejenige der bisherigen „ursprünglichen“ Aussagen (soweit sie multiplikative Kombinationen von De Morgan'schen Propositionen sind) rekapitulirend in übersichtlicher Zusammenstellung verbinden, da man letztere sonst aus verschiedenen Tafeln erst mühsam zusammensuchen müsste.

Wir haben dann die Tafeln:

XIX⁰. Zerfällung der Binionen De Morgan'scher Propositionen.

$ac = h$	$ab = k$	$al = la$	$cb = hk + \delta$
$ac_1 = h_1 a$	$ab_1 = k_1 a$	$al_1 = l_1 a$	$cb_1 = hk_1 + \gamma$
$a_1 c = \gamma + \delta$	$a_1 b = \beta + \delta$	$a_1 l = l\alpha + m\beta + n\gamma + mn\delta$	$c_1 b = h_1 k + \beta$
$a_1 c_1 = \alpha + \beta$	$a_1 b_1 = \alpha + \gamma$	$a_1 l_1 = l_1 \alpha + m_1 \beta + n_1 \gamma + m_1 n_1 \delta$	$c_1 b_1 = h_1 k_1 a + \alpha$

$cl = hn + n\gamma + mn\delta$	$bl = km + m\beta + mn\delta$
$cl_1 = hn_1 + n_1 \gamma + m_1 n_1 \delta$	$bl_1 = km_1 + m_1 \beta + m_1 n_1 \delta$
$c_1 l = h_1 la + l\alpha + m\beta$	$b_1 l = k_1 la + l\alpha + n\gamma$
$c_1 l_1 = h_1 l_1 a + l_1 \alpha + m_1 \beta$	$b_1 l_1 = k_1 l_1 a + l_1 \alpha + n_1 \gamma$

XX⁰. Zerfällung der Ternionen von De Morgan's Propositionen.

$a_1 cb = \delta$	$ac_1 l = h_1 la$	$ab_1 l = k_1 la$	$cbl_1 = hk + m_1 n_1 \delta$
$a_1 cb_1 = \gamma$	$ac_1 l_1 = h_1 l_1 a$	$ab_1 l_1 = k_1 l_1 a$	$cb_1 l_1 = hk_1 n_1 + n_1 \gamma$
$a_1 c_1 b = \beta$	$a_1 c_1 l = l\alpha + m\beta$	$a_1 b_1 l = l\alpha + n\gamma$	$c_1 bl_1 = h_1 km_1 + m_1 \beta$
$a_1 c_1 b_1 = \alpha$	$a_1 c_1 l_1 = l_1 \alpha + m_1 \beta$	$a_1 b_1 l_1 = l_1 \alpha + n_1 \gamma$	$c_1 b_1 l_1 = h_1 k_1 l_1 a + l_1 \alpha$
$acb = hk$	$acl = hn$	$abl = km$	$cbl = mn\delta$
$acb_1 = hk_1$	$acl_1 = hn_1$	$abl_1 = km_1$	$cb_1 l = hn + n\gamma$
$ac_1 b = h_1 k$	$a_1 cl = n\gamma + mn\delta$	$a_1 bl = m\beta + mn\delta$	$c_1 bl = km + m\beta$
$ac_1 b_1 = h_1 k_1 a$	$a_1 cl_1 = n_1 \gamma + m_1 n_1 \delta$	$a_1 bl_1 = m_1 \beta + m_1 n_1 \delta$	$c_1 b_1 l = h_1 k_1 la + l\alpha$

XXI⁰. Zerfällung der Quaternionen von De Morgan's Propositionen.

$acb_1l_1 = hk_1n_1$		$a_1cb_1l_1 = n_1\gamma$
$ac_1bl_1 = h_1km_1$	$a_1cbl_1 = m_1n_1\delta$	$a_1c_1bl_1 = m_1\beta$
$ac_1b_1l = h_1k_1la$	$a_1cb_1l = n\gamma$	$a_1c_1b_1l = l\alpha$
$ac_1b_1l_1 = h_1k_1l_1a$	$a_1c_1bl = m\beta$	$a_1c_1b_1l_1 = l_1\alpha$

[wozu $acbl = 0$ und

$$acbl_1 = acb,\quad acb_1l = acl,\quad ac_1bl = abl,\quad a_1cbl = cbl$$

in Erinnerung gerufen werde.]

Bei der Aufstellung haben wir auch gelegentlich Gebrauch gemacht von den Hülfssätzen XV⁰:

$hl = hn,\quad kl = km,\quad hl_1 = hn_1,\quad kl_1 = km_1,\quad h_1m = m,\quad k_1n = n,\quad hkl_1 = hk,$

wonach insbesondre:

$$h_1kl = h_1km = km \quad \text{und} \quad hk_1l = hk_1n = hn$$

gesetzt werden durfte. —

Man sieht, dass die vier Elementarfälle α, β, γ, δ sich als ternäre Aussagen darstellen.

Vermittelst der acht primitiven Propositionen können also über zwei Gebiete A, B abgegeben werden:

8 *primitive* Urteile, dazu
24 *binäre*
32 *ternäre* und ausserdem nur
11 *quaternäre* Urteile

zusammen 75 Urteile, welche lediglich *gleichzeitige* (koexistirende, simultane) De Morgan'sche Beziehungen statuiren und die wir kurz „*monomische*“ oder „*einfache*“ Aussagen nennen werden.

Der Anblick ihrer Zerfällungen in den vorstehenden Tafeln offenbart sofort, dass diese 75 Urteile durchweg zulässig und von einander verschieden sind — letzteres schon durch die verschiedenartige Besetzung der Elementarfächer in ihnen, ersteres aber auch dadurch, dass man sich die Bedeutung jedes Koeffizienten, mit welchem irgend ein Elementarfall behaftet erscheint, zum Bewusstsein bringen und durch eine Figur anschaulich exemplifiziren kann.

Mit Hülfe dieser Tafeln XVIII⁰ bis XXI⁰ wird nun jede noch so komplizirte Aussage sich aufs leichteste nach den 5 Elementarfällen entwickeln lassen.

Jeder Komplex von auf dieselben Gebiete A, B bezüglichen Aussagen muss auf eine Alternative zwischen diesen 75 hinauslaufen, rechnerisch gesprochen durch eine *Summe* von solchen darstellbar sein.

Da in Bezug auf jede einzelne dieser 75 Aussagen die zwei Möglichkeiten vorliegen, dass sie (als Summand) zugelassen oder ausgeschlossen wird, so ergibt dies *anscheinend* die ungeheure Zahl von $2^{75}-1$ über A und B möglichen Aussagen — um 1 weniger als 2^{75}, weil der Fall, wo jede Aussage ausgeschlossen wird, unzulässig ist, indem die Summe aller $= 1$ sein, also mindestens eine derselben zutreffen muss.

Bei genauerem Zusehen jedoch stellt sich diese Zahl, wenn auch als eine immer noch erhebliche, so doch als sehr bedeutend kleiner heraus.

Indem wir hiemit dem Problem näher treten: *die Anzahl der Urteile zu ermitteln, welche die Logik abzugeben vermag über zwei* oder auch noch mehr *Begriffe* — wird es sich nur um die durchweg von einander verschiedenen (d. h. wie gesagt, niemals einander allgemein äquivalenten), Urteile handeln, und wird die Form, in der sie statuirt, ausgesagt werden, als ganz nebensächlich gelten.

Die Formel, welche für n Begriffe obiges Problem löst, ist von Herrn Peano in dem Vorwort zu seiner Schrift[1] ohne eine Andeutung über ihre Herleitung bekannt gegeben worden, und werde ich dieselbe am Schluss dieses Paragraphen begründen.

Für $n = 2$ hatte ich die Aufgabe (ohne Kenntniss von Peano's Ergebnisse — vergl. Bd. 1, S. 713) auf zwei Wegen gelöst die hier ebenfalls dargelegt werden sollen, und war ich zu einem mit dem Herrn Peano's sich übereinstimmend erweisenden Ergebniss gelangt.

Der *erste* Weg ist zwar länger und etwas mühsamer; er studirt die möglichen Aussagen *in ihrer Entwickelung nach den fünf* Gergonne'schen *Elementarbeziehungen.* Auf dem kürzeren *zweiten* Wege, der sich auch zu beliebig viel Klassen ausdehnen liess, werden die Aussagen lediglich betrachtet als nach De Morgan's vier primitiven Urteilen entwickelt.

Der erste Weg hat aber den Vorzug, die — soweit sich zur Zeit übersehen lässt — *beste* Übersicht über die fraglichen Aussagen selbst zu verschaffen; sein Zuwerkegehen bewährt sich auch für die Entscheidung von Nebenfragen, die mit unserm Probleme zusammenhängen, als z. B. der Frage nach Zahl und Art der lediglich universalen von jenen Aussagen.

Schon darum möchte ich zuerst gedachten längeren Weg zu Ende gehen, und werde behufs Darlegung des kürzesten zweiten das Problem noch einmal ganz selbständig gegen Ende des Paragraphen aufnehmen,

die Verallgemeinerung auf n Begriffe an die Fälle $n = 1$ und $n = 2$ alsdann anreihend.

Die Methode des Fortschreitens wird auf beiden Wegen wesentlich dieselbe sein und sich an einen Vorgang von Jevons anlehnen.

Zudem sind wir aber auch mit Begehung des längeren Weges schon ziemlich weit gelangt und ohnehin im Zuge.

Wir finden im Ganzen — nämlich bei den obigen Kombinationen und, als monomische Glieder wenigstens, sogar bei *allen* bisher erwähnten (sowie überhaupt erdenklichen) Aussagen — nur die folgenden Möglichkeiten in den 5 Elementarfächern vertreten:

23 resp. 25 unter a	3 unter α	3 unter β	3 unter γ	3 unter δ
a	α	β	γ	δ
h	$l\alpha$	$m\beta$	$n\gamma$	$mn\delta$
k	$l_{,}\alpha$	$m_{,}\beta$	$n_{,}\gamma$	$m_{,}n_{,}\delta$
$h_{,}a$				
$k_{,}a$				
hk				
$hk_{,}$				
$h_{,}k$				
$h_{,}k_{,}a$				
la				
$l_{,}a$				
$(hl = na =) hn$				
$(kl = ma =) km$				
$h_{,}la$				
$k_{,}la$				
$(hl_{,} =) hn_{,}$				
$(kl_{,} =) km_{,}$				
$h_{,}l_{,}a$				
$k_{,}l_{,}a$				
$(hk_{,}l_{,} =) hk_{,}n_{,}$				
$(h_{,}kl_{,} =) h_{,}km_{,}$				
$h_{,}k_{,}la$				
$h_{,}k_{,}l_{,}a$				
$(hl_{,} + h_{,}a =) n_{,}a$				
$(kl_{,} + k_{,}a =) m_{,}a$				

(unter den Spalten α, β, γ, δ zusammengefasst:) $a_{,}$

Die am Ende der ersten Kolumne unter dem Strich (wegen XIII⁰) angeführten beiden Beziehungen:

$$m_{,}a = kl_{,} + k_{,}a, \quad n_{,}a = hl_{,} + h_{,}a$$

bewahrheiten sich als Identitäten leicht aus Tafel XVII⁰, oder auch als kleine Hülfssätze durch direkte Überlegungen nach Art derjenigen, die zu unsern andern Hülfssätzen führten.

Zu jeder der drei über $a_{,}$ angeführten Möglichkeiten einer Kolonne ist als vierte noch 0 hinzuzufügen als diejenige mit welcher — in Gestalt von $0 \cdot \alpha$, $0 \cdot \beta$, $0 \cdot \gamma$, $0 \cdot \delta$ — die betreffende Elementarbeziehung *gar nicht* (in der Aussage) vertreten erscheinen mag. Ebenso ist in der ersten Kolonne zu den 25 (resp. 23 über dem Strich) angeführten Möglichkeiten noch als 26(resp. 24)ste die Annahme $0, = 0 \cdot a$ in Gedanken hinzuzuschlagen.

Darnach lassen durch irgendwelche Multiplikationen zwischen den Aussagen einer jeden so durch Adjunktion der 0, Nullaussage vervollständigten Kolonne — die erste nur bis zum Strich genommen — sich jedenfalls keine neuen Aussagen mehr gewinnen, keine, die nicht in eben-

dieser Kolonne bereits einregistrirt wären, d. h. in Bezug auf die Operation der Multiplikation bilden die Aussagen einer jeden von den gedachten 5 Kolonnen mathematisch gesprochen eine „Gruppe".*)

Bei einer jeden von den vier letzten Kolonnen thun sie dies auch in Bezug auf die Operation der Addition: auch additiv lassen sich die 4 Aussagen einer jeden der vier Kolonnen von a_1 nicht weiter zu neuen Aussagen kombiniren; denn während das Addiren von 0 ohnehin nichts ändert, ist z. B. auch

$$\alpha + l\alpha = \alpha, \quad \alpha + l_1\alpha = \alpha, \quad l\alpha + l_1\alpha = \alpha; \quad \text{etc.}$$

Als additive Kombinationen der unter a unterscheidbaren möglichen Aussagen in je den vier Elementarfällen erhalten wir demnach

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^4 = 2^8 = 256$$

welche unter sich verschieden und zulässig sein werden.

Nennen wir $\mathfrak{x}$ die (noch unbekannte) Anzahl der Arten, auf welche auch die 24 Aussagen der ersten Kolonne additiv miteinander eigentümlich kombinirt werden können, so wird

$$\mathfrak{x} \times 256 - 1$$

die gesuchte *Anzahl der Urteile* sein, welche die Logik des Umfanges über zwei bestimmte Begriffe A und B abzugeben vermag.

[Um 1 ist wieder das arithmetische Produkt $\mathfrak{x} \times 256$ zu vermindern, weil diejenige Aussage unzulässig bleibt, bei welcher jede von den 5 Elementaraussagen mit dem Faktor 0 versehen erschiene. Dagegen ist die Aussage „Eins" in obiger Anzahl mit eingerechnet, obwol sie „nichtssagend" ist, nämlich in Gestalt von

$$1, = a_1 + \alpha + \beta + \gamma + \delta,$$

eine jede Möglichkeit offenlässt.]

Es würde $\mathfrak{x} = 2^{26}$ sein müssen, wären die additiven Kombinationen der 26 unter a registrirten Fälle alle unter sich verschieden. Das sind sie aber nicht, vielmehr kommen sie teilweise auf diese Fälle selbst oder auf andere von ebendiesen Kombinationen zurück. Darum wird auch die Zahl $\mathfrak{x}$ erheblich kleiner sein. Um sie zu ermitteln, könnte man versuchen, diese additiven Kombinationen etwa für die 24 in h, k, l, a_1 monomischen von den 26 Aussagen selbst aufzustellen als Amben, Ternen und so weiter bis zur „24-erne" (Vigintiquaterne) um eine jede derselben auf ihre Verschiedenheit von den ihr vorhergegangenen zu untersuchen — zu welchem Ende die kombinatorischen Summen etwa je zu „entwickeln"

*) Man überzeugt sich davon unschwer, auch bei der (nur bis zum Strich genommen) ersten Kolonne, unter Berücksichtigung der Hülfsrelationen XV°, doch wird dieser Nachweis durch spätere Betrachtungen überflüssig gemacht.

wären nach jenen vier in ihrer Gesamtheit vorkommenden Symbolen. Wegen ihrer, sechzehn Millionen übersteigenden Anzahl (16 777 216) würde das aber eine übergrosse Geduldsprobe werden.

Besser verfahren wir in der folgenden Weise, einen Gedankengang verwirklichend, auf welchen bei einem analogen Problem schon **Jevons**[9] verfallen ist (vergl. Bd. 1, Anhang 6), dessen noch verfehlte Anwendung aber von Miss **Ladd**[1] zuerst richtig gestellt worden.

Behufs Ermittelung der Zahl $\mathfrak{x}$ „entwickeln" wir den Elementarfall a (selbst) nach den vier Symbolen a, h, k, l, aus deren Kombinationen — wenn man will *ausschliesslich* — die Unterfälle des a sich zusammensetzen. Zu dem Ende braucht man nur a zu multipliziren mit der Entwickelung der 1 nach den drei letztern Symbolen. Wegen $hkl = 0$ fällt aber von den acht Gliedern (Konstituenten) dieser Entwickelung das erste fort, und bleibt:

$$a = a\,(hkl_1 + hk_1l + hk_1l_1 + h_1kl + h_1kl_1 + h_1k_1l + h_1k_1l_1),$$

was mit Rücksicht auf die angeführte Relation noch weiter sich vereinfachen lässt zu:

$$a = a\,(hk + hl + hk_1l_1 + kl + h_1kl_1 + h_1k_1l + h_1k_1l_1)$$

und mit Rücksicht auf die mehrerwähnten Hülfsrelationen auch geschrieben werden könnte in einer der beiden Formen:

$$a = hk + hl + hk_1l_1 + kl + h_1kl_1 + h_1k_1la + h_1k_1l_1a,$$

$$a = hk + hn + hk_1n_1 + km + h_1km_1 + h_1k_1la + h_1k_1l_1a.$$

Bei diesen Summen sind wir nun sicher, dass sie „reduzirte", dass ihre Glieder unter sich „disjunkt" sind.

Die *sieben* Glieder sind auch die Konstituenten der Entwickelung jedes erdenklichen Unterfalles von a nach ebendiesen Symbolen h, k, l.

Die Logik des Umfanges mit ihren mannigfachen Beziehungszeichen vermochte aber, wie wir gesehen haben, nur solche Unterfälle von a zu konstruiren, auszusprechen, zu beschreiben, in deren Ausdruck lediglich die Symbole a, h, k, l auftreten. (Die Verwendung der m und n liess sich ja im Elementarfall a umgehen, war daselbst eine blos fakultative.) Also: *jeder angebbare Unterfall von a ist eine Funktion lediglich von a, h, k und l,* in deren Ausdruck ausser diesen vier Buchstaben — die drei letztern negirt oder unnegirt genommen — *keine weiteren Buchstaben*symbole vorkommen.

Entwickelt nach allen vier Argumenten wird er a in jedem Gliede zum ausdrücklichen oder stillschweigenden Faktor haben — letzteres insofern bei h und k der Faktor als ein selbstverständlicher unterdrückt werden durfte — und zwar weil nach Th. $20_\times)$ $x \subseteq a$ äquivalent ist: $x = xa$

Denken wir uns solchen Unterfall entwickelt, so kann mit irgend einem der 7 *Konstituenten als der zugehörige Koeffizient* (in Ermangelung eben noch andrer Buchstaben) *nur entweder* 0 *oder* 1 *verknüpft sein*, d. h. der betreffende Konstituent ist in der Entwickelung *entweder ganz oder gar nicht* als Glied vorhanden.

Hieraus erhellt, dass *jeder* Unterfall von a auf eine Alternative zwischen jenen 7 Konstituenten hinauslaufen, als Summe irgend einer Gruppe von aus den sieben herausgegriffenen Gliedern darstellbar sein muss.

Die Anzahl $\mathfrak{x}$ der erdenklichen Unterfälle von a fällt darum zusammen mit der Anzahl der möglichen additiven Kombinationen unsrer sieben Konstituenten.

Diese Kombinationen lassen sich aber leicht vollständig aufstellen und noch leichter lässt ihre Anzahl sich a priori ermitteln.

Da in Bezug auf jeden einzelnen der 7 Konstituenten (ganz unabhängig von den übrigen) die zwei Möglichkeiten vorliegen, dass er als Alternativfall zugelassen, nämlich als Glied in der Entwickelung vertreten, oder aber ausgeschlossen, nicht als Glied vorhanden ist, so haben wir:

$$\mathfrak{x} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7 = 128.$$

Von dieser Anzahl der möglichen Unterfälle von a ist keine Einheit in Abzug zu bringen, weil der Fall $0 \cdot a$ wirklich vorkommen kann, der Elementarfall a überhaupt nicht vorzuliegen braucht, sofern nämlich nur von den übrigen Elementarfällen α, β, γ, δ dann allermindestens einer vorliegt.

Hiermit ist nun auch endlich

$$128 \times 256 - 1 = 2^7 \times 2^8 - 1,$$

oder

$$2^{15} - 1 = 32\,767$$

sage: *dreissigzweitausend siebenhundert sechzigsieben* gefunden als *die Anzahl der inhaltlich verschiedenen Aussagen, Urteile, welche die Logik des Umfanges über zwei bestimmte Gebiete, Klassen, Begriffe A, B abzugeben, zu fällen vermag.*

Es versteht sich übrigens, dass die hier eingeflochtenen auf *Zahlen* bezüglichen Betrachtungen (zu denen immer schon die Kenntniss des Einmaleinses ausreicht) lediglich als ein *Beiwerk* unsrer Theorie anzusehen sind, welche grundsätzlich die Zahlen ganz der Arithmetik überlässt und wesentliche Schlüsse wol nirgends auf numerische Betrachtungen gründet.

Es verlohnt wol, die 128 sub a unterscheidbaren Fälle einmal wirklich zusammenzustellen, zugleich damit für einen jeden derselben auch die Angabe seines einfachsten Formelausdrucks zu verbinden.

Für erstern Zweck empfiehlt es sich, die sieben Terme der obigen Entwickelung von a der Reihe nach mit den Ziffern 2 bis 8 kürzehalber zu benennen und die additiven Kombinationen dieser sieben Ziffern sodann streng systematisch (nach den Regeln der Kombinatorik) aufzustellen, wodurch einer jeden als Unterfall von a möglichen Alternative eine bestimmte Ordnungszahl (von 1 bis 128) zugeteilt wird.

Von diesen Unterfällen stellen wir aber jeweils diejenigen nebeneinander, welche in der Mannigfaltigkeit a Negationen von einander sind, sodass die 128 Fälle in zwei Kolonnen auf 64 Zeilen untergebracht werden. Die erste Kolonne geht dabei an ihrem Ende hufeisenförmig in die zweite über, deren Nummern demnach von unten nach oben gelesen sich an diejenigen der ersten Kolonne anschliessen.

Als einfachsten Ausdruck eines Unterfalles geben wir erstens denjenigen an (eventuell, wo mehrere gleichberechtigt, einen solchen) der aus den Symbolen h, k, l, a bei Berücksichtigung der Relation $hkl = 0$ *mit minimalem Buchstabenaufwande* in Aggregatform sich für ihn herstellen lässt. Zweitens aber fügen wir diesem Ausdruck auch noch einen andern bei, wofern solcher nach den für seine Bildung aufzustellenden Grundsätzen möglich und von dem vorigen äusserlich verschieden erscheint.

Die zweite Form des Ausdrucks soll diejenige sein, welche für A, B *am einfachsten zu deuten* wäre. In dieser Hinsicht fällt in Betracht, dass eine Aussage, die eine Beziehung *zwischen* A und B statuirt, weniger leicht nach ihrem logischen Gehalt zu übersehen ist, als wie Aussagen, die über A, resp. B nur je für sich aussagen. Die Information z. B. dass $(A \neq 0)$ $(A \neq 1)$ $(B = 1)$ sei, erscheint *fasslicher*, als etwa eine Information des Inhaltes, dass $(A_1 B_1 \neq 0)$ $(AB = 0)$, und ist die Tragweite der letztern unstreitig weniger leicht zu übersehen als die der vorigen; nicht leicht wird man sich auf sie hin das Verhältniss zwischen A und B sofort anschaulich vorzustellen vermögen. Der Interpretation zuliebe werden daher die Symbole a, l und ihre Negationen thunlichst zu verdrängen sein durch die h, k, m, n samt Negationen, indem eben letztere je nur über A oder B allein eine Aussage abgeben.

Die Ausmerzung der Symbole l, l_1, wo solche sich finden, gelingt nun zuweilen ganz, nicht selten aber auch gar nicht, oder nur teilweise, nämlich bei einzelnen Gliedern; auch konnte ja a bei h und k stets unterdrückt, ferner konnte ma durch km, sowie na durch hn ersetzt werden, etc. Überhaupt genügt die Anwendung der Hülfssätze XV° S. 134 sq. zur Erreichung des gesteckten Zieles und jedenfalls lassen sich die von mir aufgestellten Transformationsgleichungen, durch Einsetzung der Werte aus

Tafel XVII⁰ für sämtliche Symbole, stets leicht als Identitäten in a, c, b, l verifiziren.

[Wo l, l_1 *nicht* zu beseitigen sind, wird sich erkennen lassen aus dem Anblick der Formeln:

$$la = hn + km + uh_1k_1a, \qquad l_1a = hn_1 + km_1 + u_1m_1n_1a,$$

in welchen u eine unbestimmte Aussage bedeutet, und die sich ergeben, indem man das Gleichungenpaar $m = bl$, $n = cl$ systematisch nach der Unbekannten l resp. l_1 auflöst, hernach mit a multiplizirt und die Hülfsrelationen berücksichtigt.]

Zur Übung (und gelegentlichen Anwendung) mag man auch sich überzeugen, dass:

$$h(k_1+l) = h(k_1+m) = h(k_1+n) = hk_1, \qquad k(h_1+l) = k(h_1+m) = k(h_1+n) = h_1k,$$

$$h(k+l_1) = h(k+n_1) = hl_1 = hn_1, \qquad k(h+l_1) = k(h+m_1) = kl_1 = km_1,$$

$$h_1k + l_1a = k + l_1a, \qquad hk_1 + l_1a = h + l_1a$$

[nämlich $a(b+l_1) = a(bl+l_1) = a(bcl+bc_1l+l_1) = a(bc_1l+l_1) = a(bc_1+l_1)$],

$$hk_1 + h_1la = hk_1 + la, \qquad h_1k + k_1la = h_1k + la,$$

$$hk_1 + kl_1 = h + kl_1 = hk_1 + km_1 = h + km_1, \quad h_1k + hl_1 = k + hl_1 = h_1k + hn_1 = k + hn_1,$$

$$(h_1+n_1)a = n_1a, \qquad (k_1+m_1)a = m_1a,$$

$$m(h_1+n_1)a = ma = km, \qquad n(k_1+m_1)a = na = hn,$$

$$(h_1+n_1)(k_1+m_1)a = m_1n_1a,$$

$$(h+k)(h_1+n_1)(k_1+m_1) = hn_1 + km_1,$$

$$hn + km + m_1n_1a = a,$$

etc. — Relationen, dergleichen manche noch aus dem Anblick unsrer Tafel selbst entnommen werden können.

Nach diesen Vorbemerkungen erscheint als motivirt und gerechtfertigt nach Anordnung und Inhalt die nachfolgende Tafel, von welcher indess zu wünschen ist, dass sie vielseitig geprüft werde, da nicht ganz ausgeschlossen, dass vielleicht eine Vereinfachungsmöglichkeit von mir noch übersehen wäre.

XXII⁰. Tafel der 128 Unterfälle von a.

1) $\qquad 0 \cdot a$	$128 = 2+3+4+5+6+7+8 = a$
$2 = hkl_1 = hk$	$127 = 3+4+5+6+7+8 = (h_1+k_1)\,a = hk_1 + h_1a = h_1k + k_1a$
$3 = hk_1l = hl = hn$	$126 = 2+4+5+6+7+8 = (h_1+l_1)\,a = hn_1 + h_1a = n_1a$
$4 = hk_1l_1 = hk_1n_1$	$125 = 2+3+5+6+7+8 = k + (h_1+l)\,a = k + hn + h_1a$
$5 = h_1kl = kl = km$	$124 = 2+3+4+6+7+8 = (k_1+l_1)\,a = km_1 + k_1a = m_1a$
$6 = h_1kl_1 = h_1km_1$	$123 = 2+3+4+5+7+8 = h + (k_1+l)\,a = h + km + k_1a$
$7 = h_1k_1la$	$122 = 2+3+4+5+6+8 = h + k + l_1a$
$8 = h_1k_1l_1a$	$121 = 2+3+4+5+6+7 = h + k + la$
$9 = 2+3 = h\,(k+l) = h\,(k+n)$	$120 = 4+5+6+7+8 = (h_1+k_1l_1)\,a = hk_1n_1 + h_1a$
$10 = 2+4 = hl_1 = hn_1$	$119 = 3+5+6+7+8 = (h_1+l)\,a = hn + h_1a$
$11 = 2+5 = k\,(h+l) = k\,(h+m)$	$118 = 3+4+6+7+8 = (k_1+h_1l_1)\,a = h_1km_1 + k_1a$
$12 = 2+6 = kl_1 = km_1$	$117 = 3+4+5+7+8 = (k_1+l)\,a = km + k_1a$
$13 = 2+7 = hk + h_1k_1la$	$116 = 3+4+5+6+8 = hk_1 + h_1k + h_1k_1l_1a$
$14 = 2+8 = hk + h_1k_1l_1a$	$115 = 3+4+5+6+7 = hk_1 + h_1k + h_1k_1la$
$15 = 3+4 = hk_1$	$114 = 2+5+6+7+8 = k + h_1a$
$16 = 3+5 = (h+k)\,l = hn + km$	$113 = 2+4+6+7+8 = (h_1k_1+l_1)\,a = m_1n_1a$
$17 = 3+6 = hl + h_1kl_1 = hn + h_1km_1$	$112 = 2+4+5+7+8 = hl_1 + (h_1l + k_1l_1)\,a = km + hn_1 + h_1k_1a$
$18 = 3+7 = k_1la$	$111 = 2+4+5+6+8 = k + l_1a$
$19 = 3+8 = hl + h_1k_1l_1a = hn + h_1k_1l_1a$	$110 = 2+4+5+6+7 = h_1la + (h+k)\,l_1 = k + hn_1 + h_1la$
$20 = 4+5 = kl + hk_1l_1 = km + hk_1n_1$	$109 = 2+3+6+7+8 = kl_1 + (k_1l + h_1l_1)\,a = hn + km_1 + h_1k_1a$

$21 = 4+6 = (hk_1+h_1k)l_1 = hk_1n_1+h_1km_1$
$22 = 4+7 = k_1(hl_1+h_1la) = k_1(hn_1+h_1la)$
$23 = 4+8 = k_1l_1a$
$24 = 5+6 = h_1k$
$25 = 5+7 = h_1la$
$26 = 5+8 = kl+h_1k_1l_1a = km+h_1k_1l_1a$
$27 = 6+7 = h_1(kl_1+k_1la) = h_1(km_1+k_1la)$
$28 = 6+8 = h_1l_1a$
$29 = 7+8 = h_1k_1a$
$30 = 2+3+4 = h$
$31 = 2+3+5 = hk+(h+k)l = hk+hn+km$
$32 = 2+3+6 = hl+kl_1 = hn+km_1$
$33 = 2+3+7 = hk+k_1la$
$34 = 2+3+8 = h(k+l)+h_1k_1l_1a = h(k+n)+h_1k_1l_1a$
$35 = 2+4+5 = hl_1+kl = hn_1+km$
$36 = 2+4+6 = (h+k)l_1 = hn_1+km_1$
$37 = 2+4+7 = hl_1+h_1k_1la = hn_1+h_1k_1la$
$38 = 2+4+8 = (h+k_1a)l_1 = hn_1+k_1l_1a$
$39 = 2+5+6 = k$
$40 = 2+5+7 = hk+h_1la$
$41 = 2+5+8 = k(h+l)+h_1k_1l_1a = k(h+m)+h_1k_1l_1a$
$42 = 2+6+7 = kl_1+h_1k_1la = km_1+h_1k_1la$

$108 = 2+3+5+7+8 = hk+(h_1k_1+l)a = hk+hn+km+h_1k_1a$
$107 = 2+3+5+6+8 = k+hl+h_1l_1a = k+hn+h_1l_1a$
$106 = 2+3+5+6+7 = k+la$
$105 = 2+3+4+7+8 = h+k_1a$
$104 = 2+3+4+6+8 = h+l_1a$
$103 = 2+3+4+6+7 = k_1la+(h+k)l_1 = h+km_1+k_1la$
$102 = 2+3+4+5+8 = h+kl+k_1l_1a = h+km+k_1l_1a$
$101 = 2+3+4+5+7 = h+la$
$100 = 2+3+4+5+6 = h+k$
$99 = 5+6+7+8 = h_1a$
$98 = 4+6+7+8 = \{h_1k_1+(h_1+k_1)l_1\}a = hk_1n_1+h_1km_1+h_1k_1a$
$97 = 4+5+7+8 = (h_1l+k_1l_1)a = km+hk_1n_1+h_1k_1a$
$96 = 4+5+6+8 = h_1k+k_1l_1a$
$95 = 4+5+6+7 = h_1(k+la)+hk_1l_1 = h_1k+hk_1n_1+h_1la$
$94 = 3+6+7+8 = (h_1l_1+k_1l)a = hn+h_1km_1+h_1k_1a$
$93 = 3+5+7+8 = (h_1k_1+l)a = hn+km+h_1k_1a$
$92 = 3+5+6+8 = hl+h_1(k+l_1a) = hn+h_1(k+l_1a)$
$91 = 3+5+6+7 = h_1k+la$
$90 = 3+4+7+8 = k_1a$
$89 = 3+4+6+8 = hk_1+h_1l_1a$
$88 = 3+4+6+7 = k_1(h+la)+h_1kl_1 = hk_1+h_1km_1+k_1la$
$87 = 3+4+5+8 = kl+k_1(h+l_1a) = km+k_1(h+l_1a)$

$43 = 2+6+8 = (k+h_1a)l_1 = km_1 + h_1l_1a$

$44 = 2+7+8 = hk + h_1k_1a$

$45 = 3+4+5 = hk_1 + kl = hk_1 + km$

$46 = 3+4+6 = hk_1 + h_1kl_1 = hk_1 + h_1km_1$

$47 = 3+4+7 = k_1(h+la)$

$48 = 3+4+8 = k_1(h+l_1a)$

$49 = 3+5+6 = h_1k + hl = h_1k + hn$

$50 = 3+5+7 = la$

$51 = 3+5+8 = (h+k)l + h_1k_1l_1a = hn + km + h_1k_1l_1a$

$52 = 3+6+7 = k_1la + h_1kl_1 = h_1km_1 + k_1la$

$53 = 3+6+8 = hl + h_1l_1a = hn + h_1l_1a$

$54 = 3+7+8 = hl + h_1k_1a = hn + h_1k_1a$

$55 = 4+5+6 = h_1k + hk_1l_1 = h_1k + hk_1n_1$

$56 = 4+5+7 = h_1la + hk_1l_1 = hk_1n_1 + h_1la$

$57 = 4+5+8 = kl + k_1l_1a = km + k_1l_1a$

$58 = 4+6+7 = (hk_1+h_1k)l_1 + h_1k_1la = hk_1n_1 + h_1km_1 + h_1k_1la$

$59 = 4+6+8 = (h_1+k_1)l_1a = hk_1n_1 + h_1km_1 + h_1k_1l_1a$

$60 = 4+7+8 = (h_1+l_1)k_1a = k_1n_1a$

$61 = 5+6+7 = h_1(k+la)$

$62 = 5+6+8 = h_1(k+l_1a)$

$63 = 5+7+8 = kl + h_1k_1a = km + h_1k_1a$

$64 = 6+7+8 = (k_1+l_1)h_1a = h_1m_1a$

$86 = 3+4+5+7 = hk_1 + la$

$85 = 3+4+5+6 = hk_1 + h_1k$

$84 = 2+6+7+8 = h_1k_1a + kl_1 = km_1 + h_1k_1a$

$83 = 2+5+7+8 = k(h+l) + h_1k_1a = k(h+m) + h_1k_1a$

$82 = 2+5+6+8 = k + h_1l_1a$

$81 = 2+5+6+7 = k + h_1la$

$80 = 2+4+7+8 = h_1k_1a + hl_1 = hn_1 + h_1k_1a$

$79 = 2+4+6+8 = l_1a$

$78 = 2+4+6+7 = (h+k)l_1 + h_1k_1la = hn_1 + km_1 + h_1k_1la$

$77 = 2+4+5+8 = k(h+l) + k_1l_1a = k(h+m) + k_1l_1a$

$76 = 2+4+5+7 = hl_1 + h_1la = hn_1 + h_1la$

$75 = 2+4+5+6 = k + hl_1 = k + hn_1$

$74 = 2+3+7+8 = h(k+l) + h_1k_1a = h(k+n) + h_1k_1a$

$73 = 2+3+6+8 = h(k+l) + h_1l_1a = h(k+n) + h_1l_1a$

$72 = 2+3+6+7 = kl_1 + k_1la = km_1 + k_1la$

$71 = 2+3+5+8 = hk + (h+k)l + h_1k_1l_1a = hk + hn + km + h_1k_1l_1a$

$70 = 2+3+5+7 = hk + la$

$69 = 2+3+5+6 = k + hl = k + hn$

$68 = 2+3+4+8 = h + k_1l_1a$

$67 = 2+3+4+7 = h + k_1la$

$66 = 2+3+4+6 = h + kl_1 = h + km_1$

$65 = 2+3+4+5 = h + kl = h + km$

Verbindet man auf jegliche Weise irgend eine von diesen 128 Angaben mit irgend einer von den vieren in jeder nachstehenden Kolumne:

XXIII⁰. Tafel der 256 Unterfälle von a_1:

1	$0\cdot\alpha$	$0\cdot\beta$	$0\cdot\gamma$	$0\cdot\delta$
2	$l\alpha$	$m\beta$	$n\gamma$	$mn\delta$
3	$l_1\alpha$	$m_1\beta$	$n_1\gamma$	$m_1n_1\delta$
4	α	β	γ	δ

so erhält man die sämtlichen 32768 Aussagen, welche die Logik über A und B abzugeben vermag, von welchen aber eine (die erste) als absurde oder Nullaussage in Abzug zu bringen sein wird.

Hienach ist eine übersichtliche Klassifikation, nebst Chiffrirung, gewissermassen Etikettirung der 32768 Aussagen in folgender Weise möglich. Man wird eine jede derselben vermittelst einer „fünfziffrigen" Zahl darstellen und bestimmen können:

$$t,\ p,\ q,\ r,\ s$$

deren sozusagen — Ziffern durch Kommata getrennt werden mögen, von welchen nämlich die erste „Ziffer" t nur eine Quasi-Ziffer, nämlich irgend eine von den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, ... 127, 128 ist und auf die Tafel XXII⁰ verweist, wogegen die folgenden p, q, r, s wirkliche Ziffern sind, denen aber immer nur einer der Werte 1, 2, 3, 4 zukommen kann, indem sie auf die entsprechende Rubrik der Tafel XXIII⁰ hinweisen. Die sämtlichen Aussagen erhalten hierdurch auch eine streng bestimmte Rangordnung oder Reihenfolge, und ist insbesondre:

$$1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1$$

die Chiffre der ersten von ihnen, das ist der absurden oder Nullaussage, und

$$128,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4$$

die Chiffre der letzten, nämlich der identischen oder nichtssagenden Aussage.

Man bemerkt, dass unter den Fällen der Tafel XXII⁰ sich

$$2\times 16=32$$

solche finden, die bezüglich A und B (sonach auch h und k nebst m und n) *symmetrisch* sind, und zwar die folgenden:

1), 2, 7, 8, 13, 14, 16, 21, 29, 31, 36,
128 127 122 121 116 115 113 108 100 98 93

44, 50, 51, 58, 59.
85 79 78 71 70

Die übrigen sind, für sich betrachtet, unsymmetrisch, gruppiren sich jedoch zu $2\times 24=48$ symmetrischen Paaren von Aussagen. Diese Paare sind folgende:

(3,5), (4,6), (9,11), (10,12), (15,24), (17,20), (18,25),
(126,124) (125,123) (120,118) (119,117) (114,105) (112,109) (111,104)

(19,26), (22,27), (23,28), (30,39), (32,35), (33,40), (34,41),
(110,103) (107,102) (106,101) (99,90) (97,94) (96,89) (95,88)

(37,42), (38,43), (45,49), (46,55), (47,61), (48,62), (52,56),
(92,87) (91,86) (84,80) (83,74) (82,68) (81,67) (77,73)

(53,57), (54,63), (60,64).
(76,72) (75,66) (69,65)

Für irgend eine in De Morgan'schen Urteilen gegebene Aussage $F(a, b, c, l)$ wird man die Koeffizienten ihrer Entwickelung nach den Gergonne'schen 5 Elementarfällen allemal erhalten können, indem man sie bezüglich multiplizirt mit:

$$a, \quad (\alpha =) \, a_1 b_1 c_1, \quad (\beta =) \, a_1 b c_1, \quad (\gamma =) \, a_1 b_1 c, \quad (\delta =) \, a_1 b c$$

— ev. unter Benutzung eines Mc Coll'schen Satzes Bd. 1, S. 589, wonach insbesondre $a F(1, b, c, l)$ ihr unter a fallender Teil sein wird.

Um nun mit Hülfe der Tafel XXII⁰ für irgend eine unter a fallende noch so komplizirte Aussage den einfachsten oder typischen Ausdruck rasch zu finden und so derselben ihre Stellung im logischen Systeme anzuweisen — man könnte in Analogie mit der Naturgeschichte sagen: um sie „zu bestimmen“ — wird man dieselbe (eventuell unter Benutzung der Relationen:

$$ma = kl, \quad na = hl, \quad m_1 a = kl_1 + k_1 a, \quad n_1 a = hl_1 + h_1 a,$$

sowie derer aus Tafel XIX⁰: $ac = h$, $ab = k$, $ac_1 = h_1 a$, $ab_1 = k_1 a$, nach welchen es *unter* a geradezu gestattet ist, c, b durch h, k zu ersetzen) blos nach den Symbolen h, k, l, a zu „entwickeln“ brauchen. Man sucht hierauf die Nummern ihrer so sich ergebenden Konstituenten im ersten Teil der Tafel XXII⁰ auf; das Aggregat derselben muss eine von den weiterhin darin aufgeführten additiven Kombinationen der Ziffern 2 bis 8 sein, für welche man die Nummer nebst dem typischen Ausdruck alsdann leicht in der Tafel entdecken wird.

Der Prozess kann sehr erleichtert werden, wenn man sich ein für alle mal die beiden folgenden Hülfstafeln anlegt, in welchen wir die Produkte der 24 monomischen Unterfälle von a vergl. S. 145) in die Symbole m, n, m_1, n_1 und in dieser letzteren Produkte — solchergestalt „bestimmt“ — zusammenstellen. Die nächste von diesen Tafeln soll ohne weitere Abkürzungen gegeben werden.

XXIV⁰. Hülfstafel.

$ma = 5$,	$na = 3$,	$m_{,}a = 124$,	$n_{,}a = 126$,
$mh = 0$,	$nh = 3$,	$m_{,}h = h = 30$,	$n_{,}h = 10$,
$mk = 5$,	$nk = 0$,	$m_{,}k = 12$,	$n_{,}k = k = 39$,
$mh_{,}a = 5$,	$nh_{,}a = 0$,	$m_{,}h_{,}a = 64$,	$n_{,}h_{,}a = h_{,}a = 99$,
$mk_{,}a = 0$,	$nk_{,}a = 3$,	$m_{,}k_{,}a = k_{,}a = 90$,	$n_{,}k_{,}a = 60$,
$mhk = 0$,	$nhk = 0$,	$m_{,}hk = hk = 2$,	$n_{,}hk = hk = 2$,
$mhk_{,} = 0$,	$nhk_{,} = nh = 3$,	$m_{,}hk_{,} = hk_{,} = 15$,	$n_{,}hk_{,} = 4$,
$mh_{,}k = mk = 5$,	$nh_{,}k = 0$,	$m_{,}h_{,}k = 6$,	$n_{,}h_{,}k = h_{,}k = 24$,
$mh_{,}k_{,}a = 0$,	$nh_{,}k_{,}a = 0$,	$m_{,}h_{,}k_{,}a = h_{,}k_{,}a = 29$,	$n_{,}h_{,}k_{,}a = h_{,}k_{,}a = 29$,
$mla = ma = 5$,	$nla = na = 3$,	$m_{,}la = 18$,	$n_{,}la = 25$,
$ml_{,}a = 0$,	$nl_{,}a = 0$,	$m_{,}l_{,}a = l_{,}a = 79$,	$n_{,}l_{,}a = l_{,}a = 79$,
$mhl = 0$,	$nhl = hl = nh = 3$,	$m_{,}hl = hl = 3$,	$n_{,}hl = 0$,
$mkl = kl = mk = 5$,	$nkl = 0$,	$m_{,}kl = 0$,	$n_{,}kl = kl = 5$,
$mh_{,}la = 5$,	$nh_{,}la = 0$,	$m_{,}h_{,}la = 7$,	$n_{,}h_{,}la = h_{,}la = 25$,
$mk_{,}la = 0$,	$nk_{,}la = 3$,	$m_{,}k_{,}la = k_{,}la = 18$,	$n_{,}k_{,}la = 7$,
$mhl_{,} = 0$,	$nhl_{,} = 0$,	$m_{,}hl_{,} = hl_{,} = 10$,	$n_{,}hl_{,} = hl_{,} = n_{,}h = 10$,
$mkl_{,} = 0$,	$nkl_{,} = 0$,	$m_{,}kl_{,} = kl_{,} = m_{,}k = 12$,	$n_{,}kl_{,} = kl_{,} = 12$,
$mh_{,}l_{,}a = 0$,	$nh_{,}l_{,}a = 0$,	$m_{,}h_{,}l_{,}a = h_{,}l_{,}a = 28$,	$n_{,}h_{,}l_{,}a = h_{,}l_{,}a = 28$,
$mk_{,}l_{,}a = 0$,	$nk_{,}l_{,}a = 0$,	$m_{,}k_{,}l_{,}a = k_{,}l_{,}a = 23$,	$n_{,}k_{,}l_{,}a = k_{,}l_{,}a = 23$,
$mhk_{,}l_{,} = 0$,	$nhk_{,}l_{,} = 0$,	$m_{,}hk_{,}l_{,} = hk_{,}l_{,} = 4$,	$n_{,}hk_{,}l_{,} = hk_{,}l_{,} = 4$,
$mh_{,}kl_{,} = 0$,	$nh_{,}kl_{,} = 0$,	$m_{,}h_{,}kl_{,} = h_{,}kl_{,} = 6$,	$n_{,}h_{,}kl_{,} = h_{,}kl_{,} = 6$,
$mh_{,}k_{,}la = 0$,	$nh_{,}k_{,}la = 0$,	$m_{,}h_{,}k_{,}la = h_{,}k_{,}la = 7$,	$n_{,}h_{,}k_{,}la = h_{,}k_{,}la = 7$,
$mh_{,}k_{,}l_{,}a = 0$,	$nh_{,}k_{,}l_{,}a = 0$,	$m_{,}h_{,}k_{,}l_{,}a = h_{,}k_{,}l_{,}a = 8$,	$n_{,}h_{,}k_{,}l_{,}a = h_{,}k_{,}l_{,}a = 8$.

Um auch die Produkte der 24 unter a fallenden (aus h, k, l und deren Negationen zusammensetzbaren multiplikativen Kombinationen oder) monomischen Unterfälle *in* mn, mn_1, m_1n und m_1n_1 übersichtlich anzugeben, schreiben wir diese letztern Faktoren als Überschrift, jene erstern als Vorschrift an und geben da, wo die von der einen und der andern beherrschte Kolonne und Zeile zusammenstossen, den Produktwert an durch seine Nummer aus Tafel XXII⁰, sofern derselbe nicht etwa $= 0$ ist.

XXV⁰. Hülfstafel.

	mn	mn_1	m_1n	m_1n_1
0	0	0	0	0
a	0	5	3	113
h	0	0	3	10
k	0	5	0	12
h_1a	0	5	0	64
k_1a	0	0	3	60
hk	0	0	0	2
hk_1	0	0	3	4
h_1k	0	5	0	6
h_1k_1a	0	0	0	29
la	0	5	3	7
l_1a	0	0	0	79
hl	0	0	3	0
kl	0	5	0	0
h_1la	0	5	0	7
k_1la	0	0	3	7
hl_1	0	0	0	10
kl_1	0	0	0	12
h_1l_1a	0	0	0	28
k_1l_1a	0	0	0	23
hk_1l_1	0	0	0	4
h_1kl_1	0	0	0	6
h_1k_1la	0	0	0	7
$h_1k_1l_1a$	0	0	0	8

XXVI⁰. Hülfstafel.

$h\alpha = 0$	$h\delta = 0$
$k\alpha = 0$	$k\delta = 0$
$h_1\alpha = \alpha$	$h_1\delta = \delta$
$k_1\alpha = \alpha$	$k_1\delta = \delta$
$l\alpha = l\alpha$	$l\delta = mn\delta$
$l_1\alpha = l_1\alpha$	$l_1\delta = m_1n_1\delta$
$m\alpha = 0$	$m\delta = mn\delta$
$n\alpha = 0$	$n\delta = mn\delta$
$m_1\alpha = \alpha$	$m_1\delta = m_1n_1\delta$
$n_1\alpha = \alpha$	$n_1\delta = m_1n_1\delta$
$h\beta = 0$	$h\gamma = 0$
$k\beta = 0$	$k\gamma = 0$
$h_1\beta = \beta$	$h_1\gamma = \gamma$
$k_1\beta = \beta$	$k_1\gamma = \gamma$
$l\beta = m\beta$	$l\gamma = n\gamma$
$l_1\beta = m_1\beta$	$l_1\gamma = n_1\gamma$
$m\beta = m\beta$	$m\gamma = 0$
$n\beta = 0$	$n\gamma = n\gamma$
$m_1\beta = m_1\beta$	$m_1\gamma = \gamma$
$n_1\beta = \beta$	$n_1\gamma = n_1\gamma$

Der Raumeinteilung halber haben wir neben die besprochene noch eine weitere (und letzte) Hülfstafel: XXVI⁰ gesetzt, welche die analogen

Erleichterungen (wie XXIV⁰ für die Unterfälle von a) gewähren soll für die Klassifikation aller möglichen Unterfälle von a_1 und seinen vier Elementarfällen α, β, γ, δ. Obwol die Angaben dieser Tafel äusserst leicht aus dem Anblick der Tafeln III⁰ und XIII⁰ zu entnehmen sind und sich auch unter den Hülfsrelationen XV⁰ bereits mit angeführt finden, wird ihre Zusammenstellung doch der Bequemlichkeit des Studirenden dienen.

Als von hohem Interesse kann man noch die Frage aufwerfen: wie viele (und welche) von den 32 767 Aussagen über A und B „zerfallen"?

Eine Aussage über ein gegebenes System von Begriffen (Klassen, Gebieten) wird eine „*zerfallende*" zu nennen sein, wenn es möglich ist, sie aussagenrechnerisch aus lauter solchen Aussagen aufzubauen, in deren jeder nur je von einem derselben die Rede ist — ohne jegliche Erwähnung der übrigen Begriffe des Systemes.

Es würde umständlich sein, alle obigen Aussagen auf diese Möglichkeit hin zu untersuchen, nämlich bei einer jeden zu entscheiden, ob sie zusammensetzbar ist aus lauter nur A, sowie nur B betreffenden Teilaussagen, oder nicht.

Dagegen ergibt sich leicht die Beantwortung der gestellten Frage, wenn man die über A allein, somit auch die über B allein, abgebbaren Aussagen systematisch aufsucht, sodann deren mögliche (multiplikative und additive) Kombinationen.

Eine zerfallende Aussage über A und B muss sich ausschliesslich aus den vieren:

$$h,\ k,\ m,\ n$$

als eine „Funktion" des Aussagenkalkuls $f(h, k, m, n)$ zusammensetzen. Diese nach ihren 4 Argumenten entwickelt gedacht, setzt sich ihrerseits aus $2^4 = 16$ Konstituenten zusammen, deren jeder entweder 0 oder 1 zum Koeffizienten haben muss. Diese Konstituenten sind:

$$\underline{hkmn},\ \underline{hkmn_1},\ \underline{hkm_1n},\ hkm_1n_1,\ \underline{hk_1mn},\ \underline{hk_1mn_1},\ hk_1m_1n,\ hk_1m_1n_1,$$

$$\underline{h_1kmn},\ h_1kmn_1,\ \underline{h_1km_1n},\ h_1km_1n_1,\ h_1k_1mn,\ h_1k_1mn_1,\ h_1k_1m_1n,\ h_1k_1m_1n_1.$$

Weil $hm = 0$ und $kn = 0$ gilt, verschwinden aber einzelne von diesen Konstituenten selbst und zwar die 7 vorstehend unterstrichenen. Und wegen

$$hm_1 = h,\ h_1m = m,\ kn_1 = k,\ k_1n = n$$

lassen die neun stehen gebliebenen bezüglich folgende Vereinfachung ihres Ausdruckes zu:

$$hk,\ hn,\ hk_1n_1,\ km,\ h_1km_1,\ mn,\ k_1mn_1,\ h_1m_1n,\ h_1k_1m_1n_1.$$

Diese 9 Aussagen können jeweils selbständig, es können beliebige Alternativen zwischen denselben statuirt werden. Dies gibt

$$2^9 = 512$$

mögliche verschiedene Aussagen. Von diesen verweist diejenige, bei welcher alle 9 Konstituenten mit dem Koeffizienten 0 behaftet auftreten, auf die „identische" Aussage $0 = 0$ als den einzigen *zulässigen* Fall unter den noch erdenklichen Aussagen, welche unsrer Definition gemäss den „zerfallenden" zugezählt werden müssen. Mithin *sind* 512 *zerfallende Aussagen über A und B zulässig.*

Diese von den 32 767 in Abzug gebracht, lassen 32 255 Aussagen übrig, in welche mindestens eine „nicht zerfallende", nämlich eine wirkliche Umfangsbeziehung zwischen A und B statuirende Aussage eingeht — zum wenigsten als ein Glied oder Faktor eines Gliedes, d. i. als ein Alternativfall oder als eine simultane Forderung oder Mitbedingung in einem solchen. — Die Zahl 512 nebst den beiden sogleich noch abzuleitenden 166 und 47 (jene ungenau als 511 und 168) hatte ich in [9] bekannt gegeben.

Noch eine andere wichtige Frage über die 32 767 Aussagen betrifft ihre Scheidung in universale und (mit-)partikulare. Diese soll jetzt (im Kontext) zur Entscheidung gebracht werden.

Beschränken wir die Logik wiederum auf ihre *„erste Etappe"*, wo sie nur über Subsumtions- und Gleichheitszeichen, nicht aber über deren Verneinung verfügt, sonach partikulare (oder affirmative Existenzial-)Urteile noch nicht auszudrücken vermag, so ist $16 - 1 = 15$ die Anzahl der jetzt über zwei Klassen A, B zulässigen „einfachen" oder monomischen Aussagen.

In der That können diesmal nur die vier primitiven Aussagen De Morgan's als da sind (in den dortigen Bezeichnungen):

$$a, c, b, l$$

nicht aber deren Verneinungen abgegeben werden. Hiermit dann lassen sich herstellen die sechs binären:

$$ac, ab, al, cb, cl, bl,$$

und die vier ternären Aussagen:

$$acb, acl, abl, cbl,$$

zu welchen bisherigen 14 Aussagen sich als 15te noch die nichtssagende $0 = 0$ gesellt die immer gilt, aussagenrechnerisch $= \dot{1}$ ist — wogegen die absurde Aussage durch die hier einzig denkbare quaternäre Aussage $acbl$ dargestellt würde, welche jedoch nie gelten kann, unzulässig, aussagenrechnerisch $= 0$ ist.

Wir haben also bei der eingeführten Beschränkung der Logik anstatt (und von) den früheren 75 „einfachen" oder „monomischen" Urteilen nur mehr 14 abgebbare.

Um jedoch völlig zu übersehen, wie weit der Bereich abgebbarer Aussagen durch die Einführung des Ungleichheitszeichens ausgedehnt wurde, wollen wir auch für die erste Etappe der Logik die Anzahl aller nur erdenklichen Aussagen über zwei bestimmte Klassen A und B ermitteln, indem wir nunmehr auch *Alternativen* oder *additive* Kombinationen zwischen den gefundenen 15 „einfachen“ Aussagen mit zulassen.

Zu dem Ende haben wir eine ähnliche Untersuchung anzustellen, wie sie oben ausgeführt worden. Dieselbe gestaltet sich aber jetzt, obwol es sich um erheblich kleinere Zahlen handelt, nicht ganz so einfach.

Zunächst vergegenwärtige man sich, dass die obigen 14 belangreichen (nicht nichtssagenden) „einfachen“ Urteile die Bedeutungen haben und in die 5 Elementarfächer zerfallen, wie folgt:

$$a = a, \quad c = h + \gamma + \delta, \quad b = k + \beta + \delta, \quad l = la + l\alpha + m\beta + n\gamma + mn\delta,$$

$$ac = h, \quad ab = k, \quad al = la, \quad cb = d = hk + \delta,$$

$$cl = n = hn + n\gamma + mn\delta, \quad bl = m = km + m\beta + mn\delta,$$

$$acb = hk, \quad acl = hl = hn, \quad abl = kl = km, \quad cbl = mn\delta,$$

wobei in Erinnerung zu nehmen, dass h und k ganz unter a fallen.

Sammeln wir die verschiedenen Vorkommnisse, welche sich vorstehend unter den fünf Elementarfächern einregistrirt finden, so erhalten wir das Tableau:

Zu a	α	β	γ	δ
$0 \cdot a$	$0 \cdot \alpha$	$0 \cdot \beta$	$0 \cdot \gamma$	$0 \cdot \delta$
$h = 30$	$l\alpha$	$m\beta$	$n\gamma$	$mn\delta$
$k = 39$	α	β	γ	δ
$la = 50$				
$hk = 2$				
$hl = hn = 3$				
$kl = km = 5$				
$a = 128$				

worin die Nummern in der ersten Kolonne (gleichwie auch noch weiter folgende) auf die Tafel XXII⁰ verweisen sollen.

Die 8 Elemente der ersten Kolonne können durch multiplikative Verknüpfungen unter sich nicht weiter vermehrt werden; sie bilden bereits in Hinsicht der Multiplikation eine Gruppe.

Ein jedes von diesen Elementen findet sich unter den (oben aufgezählten) „einfachen“ Urteilen und kann somit abgegeben werden als eine selbständige Aussage.

An additiven Kombinationen oder denkbaren Alternativen zwischen diesen 8 Aussagen sind, ausser ihnen selbst, nur noch die 11 folgenden möglich:

$$h + k = 100$$
$$h + la = 101$$
$$h + km = 65$$
$$k + la = 106$$
$$k + hn = 69$$
$$hk + la = 70$$
$$h(k + n) = 9$$
$$k(h + m) = 11$$
$$(h + k)l = hn + km = 16$$
$$h + k + la = 121$$
$$hk + hn + km = 31$$

(die wir als Fortsetzung der ersten Kolonne obigen Tableaus ansetzen) — sodass die Gesamtzahl der unter a unterscheidbaren Aussagen 19 beträgt.

Dass das System dieser 19 Aussagen nun auch hinsichtlich der Addition eine Gruppe bildet, durch additive Verknüpfungen zwischen seinen Elementen also nicht weiter vermehrt werden kann, wäre unschwer durchzuprobiren nach der Methode der Vervollständigung einer Summenreihe, welche im Anhang 6, Bd. 1, S. 653 sqq. auseinandergesetzt worden. Als Kontrole (oder bequemer) kann man aber auch bemerken, dass die 19 Ausdrücke gerade (und vollzählig) diejenigen aus der Tafel XXII^0 sind, in welchen kein einziges Symbol mit Negationsstrich vorkommt.

Ebenso konnte auch unser Tableau schon aus demjenigen der S. 145 abgeschrieben werden, indem man die Ausdrücke fortliess, in welchen Negationen von h, k, l, m, n vorkommen.

Könnten nun auch in den folgenden vier Kolumnen unsres Tableau's je die dreierlei Aussagen ganz unabhängig von einander (und von den unter die erste Kolumne fallenden) statuirt werden, so wäre die Sache sehr einfach und müsste:

$$19 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 - 1 = 1538$$

die gesuchte Zahl der Aussagen sein.

Diese ist aber nur eine obere Grenze, welche von unsrer gesuchten Zahl keinenfalls überschritten, auch nicht erreicht werden kann.

Ausser $mn\delta$, welches in Gestalt von cbl selbständig zugelassen oder ausgeschlossen werden mag, sind nämlich die acht Aussagen in den zwei letzten Zeilen der vier letzten Kolonnen unsres Tableau's *nicht unabhängig von einander*, überhaupt *nicht einzeln* abgebbar.

Haben wir doch nach früherem:

$$l\alpha = a_1c_1b_1l, \quad m\beta = a_1c_1bl, \quad n\gamma = a_1cb_1l,$$
$$\alpha = a_1c_1b_1, \quad \beta = a_1c_1b, \quad \gamma = a_1cb_1, \quad \delta = a_1cb,$$

wo die Faktoren a_1, c_1 und b_1 ohne Ungleichheitszeichen nicht darstellbar sein würden. [Dass gleichwol $mn\delta = a_1cbl$ ohne solches darstellbar ist, beruht auf dem Zufall, dass wegen $acbl = 0$ auch $a_1cbl = cbl$ sein musste.]

Abgesehen also von der selbständigen Aussage $mn\delta$ können die unter die vier letzten Kolonnen fallenden Aussagen überhaupt nur abgegeben werden in den additiven Kombinationen, welche sich bei den sechs [resp. 7] von den (14) einfachen Urteilen:

$$c,\ b,\ l,\ cb,\ cl,\ bl,\ [cbl]$$

oben angegeben finden, und diese sieben nur steuern überhaupt zu den vier letzten Elementarfällen bei.

Es wird nichts übrig bleiben, als: die additiven Kombinationen dieser 7 Fälle nunmehr vollständig aufzusuchen nach dem Verfahren, welches in Bd. 1, Anhang 6, S. 655 sq. bei der Summenreihe auseinandergesetzt worden. Der siebente Fall bleibt beim Kombiniren ausser Betracht, weil er in allen vorhergehenden schon mitenthalten ist; nur für sich allein muss er einmal aufgeführt werden. Wir geben die Kombinationen sogleich auch immer entwickelt nach den 5 Elementarfällen an. Es sind ihrer (18 resp. einschliesslich der Nullaussage:) 19:

0		
$c = h$	$+ \gamma + \delta$	ac
$b = k$	$+ \beta + \delta$	ab
$l = la$	$+ l\alpha + m\beta + n\gamma + mn\delta$	al
$cb = hk$	$+ \delta$	acb
$cl = hn$	$+ n\gamma + mn\delta$	acl
$bl = km$	$+ m\beta + mn\delta$	abl
$cbl =$	$mn\delta$	$acbl = a \cdot 0 = 0$
$c + b = (h + k)$	$+ \beta + \gamma + \delta$	$a(c + b)$
$c + l = (h + la)$	$+ l\alpha + m\beta + \gamma + \delta$	$a(c + l)$
$b + l = (k + la)$	$+ l\alpha + \beta + n\gamma + \delta$	$a(b + l)$
$cb + l = (hk + la)$	$+ l\alpha + m\beta + n\gamma + \delta$	$a(cb + l)$
$cl + b = (hn + k)$	$+ \beta + n\gamma + \delta$	$a(cl + b)$
$c + bl = (h + km)$	$+ m\beta + \gamma + \delta$	$a(c + bl)$
$c(b + l) = h(k + n)$	$+ n\gamma + \delta$	$ac(b + l)$
$(c + l)b = (h + m)k$	$+ m\beta + \delta$	$ab(c + l)$
$(c + b)l = (hn + km)$	$+ m\beta + n\gamma + mn\delta$	$al(c + b)$
$c + b + l = (h + k + la)$	$+ l\alpha + \beta + \gamma + \delta$	$a(c + b + l)$
$cb + cl + bl = (hk + hn + km)$	$+ m\beta + n\gamma + \delta$	$a(cb + cl + bl)$
		a

Die ersten Glieder rechterhand sind die in das Fach a fallenden Alternativen. Man erhält dieselben durch die vier primitiven Propositionen ausgedrückt, indem man der linken Seite der Gleichung den Faktor a beisetzt. Wir haben diese Ausdrücke den andern (in einer neuen Kolonne) gegenübergestellt, und darunter noch die Proposition a geschrieben, weil es dann gerade die 19 Aussagen des vorhergehenden Systemes sind, die auch selbständig (und als unter a einzig mögliche) abgegeben werden konnten, und deren additive Kombinationen mit denen der andern Kolonne nun allein noch zu ermitteln sein werden.

Wären letztere von jenen unabhängig, so wäre die gesuchte Zahl der Aussagen jetzt wieder ganz einfach gefunden in Gestalt von

$$19 \times 19 - 1 = 360.$$

Das sind sie aber (in ihren ersten Gliedern) augenscheinlich nicht, und darum ist auch diese Zahl wieder nur als eine „obere Grenze" für die gesuchte zu betrachten, diesmal aber als eine der Wahrheit näher kommende „schärfere" oder „bessere" Grenze.

Es scheint abermals nichts übrig zu bleiben, als dass man wirklich die 19 Fälle rechts je mit den 19 Fällen links in der Kolonne additiv durchkombinire und diejenigen Aussagen herausschreibe, welche auf eine frühere nicht zurückkommen.

Sofern es auf eine Ermittelung der fraglichen Aussagen selbst mitankommt, dürfte dies in der That das beste sein. Sofern es aber blos auf die Ermittelung ihrer Anzahl ankäme, kann man noch fast zwei Drittel der Arbeit sparen durch Rücksichtnahme auf die Symmetrie der Aufgabe.

Wenn nämlich z. B. ac mit den 19 Fällen der ersten Kolumne additiv kombinirt nur 13 neue Aussagen liefert, so muss dasselbe auch mit ab und mit al der Fall sein, und diese müssen alle durch ihr erstes Glied oder das System der darauf folgenden Glieder sich unterscheiden. Ebenso wegen der Symmetrie hinsichtlich c, b, l braucht man nur zu konstatiren, dass acb an neuen Aussagen*) 5, darnach

$$a(c+b)\,10, \quad a(cb+l)\,4, \quad al(c+b)\,2, \quad a(c+b+l)\,8$$

und $a(cb+cl+bl)$ 1 (eine) durch seine additive Kombination mit den Aussagen der ersten Kolumne liefert. Die Nullaussage der einen Kolumne gibt mit den Aussagen der andern verknüpft je 18 zulässige Aussagen; ebenso aber auch die Aussage a der letzten Kolumne mit denjenigen der erstern. Sonach ergibt sich die gesuchte Anzahl als:

$$3 \times (18 + 13 + 5 + 10 + 4 + 2) + 8 + 1 = 165,$$

wobei, wie sich dies gehört, die absurde Aussage nicht eingerechnet worden, indessen auch die nichtssagende oder leere Aussage nicht auftritt, mit welcher letztern zusammen wir *166 Aussagen* hätten.

So gross ist also die *Anzahl der Urteile, welche eine Logik, die sich*

*) Die also unter den Kombinationen aus den vorhergehenden Triaden gleichgebauter Ausdrücke nicht schon vertreten sein mussten.

nur in universalen Urteilen bewegen darf, über zwei Klassen oder Begriffe A, B zu fällen vermag.

Wurde hienach durch die Zulassung auch partikularer Urteilsformen die Menge der „einfachen“ Urteile von 14 auf 75 (res. von 15 auf 76) und die der Urteile überhaupt von 166 auf 32 767 erhöht, so erweiterte sich also durch den genannten Prozess, welcher die Logik von ihrer ersten Etappe auf die zweite erhob, der Bereich der abgebharen Aussagen jener Art auf mehr als das Fünffache, und der der abgebharen Aussagen überhaupt auf mehr als das 197-fache!

So schon, wenn nur *zwei* Klassen in Betracht gezogen werden. Mit Bezug auf Urteile über drei oder mehr Klassen würden natürlich diese Verhältnisszahlen sich noch rapide steigern.

Wir wollen indess die 165 in universalen Urteilen möglichen Aussagen selber im Überblick angeben und zwar (so elegant es uns möglich) ausgedrückt in den 4 primitiven Symbolen a, c, b, l und unter Zusammenstellung aller derer, die aussagenrechnerisch als vom selben Typus erscheinen. Zur Kontrole ist die Anzahl der Repräsentanten eines jeden Typus auch leicht vom Mathematiker a priori zu ermitteln.

Die einander dual entsprechenden „Typen“ sollen durch den Mittelstrich getrennt nebeneinander gestellt und als ein und derselbe *„Haupttypus“* angesehen werden.

Vier von den Typen sind als sich selber dual entsprechende zugleich Haupttypen und werden an der durchgehenden Schreibung (unter Fehlen des Mittelstriches) zu erkennen sein. Von einem der übrigen Haupttypen (an sich dem fünften) die sich demnach in zwei Typen spalten, wird nur der eine Typus in dem Tableau vertreten sein, indem sein duales Gegenstück auf die absurde Aussage hinausläuft.

Im ganzen sind es (27 resp.) 26 Typen, welche 16 Haupttypen konstituiren und entsprechend der unten gegebenen Zusammenstellung aus

$$4+2\times6+2\times4+2\times12+1+2\times4+2\times12+2\times6+2\times3+$$
$$+4+12+2\times12+2\times4+2\times6+4+2\times1=165$$

Ausdrücken bestehen.

XXVII⁰. Tafel der als universale möglichen Urteile.

a, c, b, l

$ac,\ ab,\ al,\ cb,\ cl,\ bl$	$a+c,\ a+b,\ a+l,\ c+b,\ c+l,\ b+l$
$acb,\ acl,\ abl,\ cbl$	$a+c+b,\ a+c+l,\ a+b+l,\ c+b+l$
$a+cb,\ a+cl,\ a+bl$	$a(c+b),\ a(c+l),\ a(b+l)$
$ac+b,\ ac+l,\ ab+c$	$(a+c)b,\ (a+c)l,\ (a+b)c$
$ab+l;\ al+c,\ al+b$	$(a+b)l,\ (a+l)c,\ (a+l)b$
$c+bl,\ b+cl,\ l+bc$	$c(b+l),\ b(c+l),\ l(b+c)$

$(acbl = 0)$	$a + c + b + l$
$a(c + b + l)$,	$a + cbl$,
$(a + c + b)l$,	$acb + l$,
$(a + c + l)b$,	$acl + b$,
$(a + b + l)c$	$abl + c$

$a(c + bl)$, $a(b + cl)$, $a(l + cb)$	$a + c(b + l)$, $a + b(c + l)$, $a + l(c + b)$,
$(a + cb)l$, $(a + cl)b$, $(a + bl)c$	$a(c + b) + l$, $a(c + l) + b$, $a(b + l) + c$,
$(ac + b)l$, $(ac + l)b$, $(ab + c)l$	$(a + c)b + l$, $(a + c)l + b$, $(a + b)c + l$,
$(ab + l)c$, $(al + c)b$, $(al + b)c$	$(a + b)l + c$, $(a + l)c + b$, $(a + l)b + c$

$ac(b + l)$, $ab(c + l)$, $al(c + b)$	$a + c + bl$, $a + b + cl$, $a + l + cb$
$(a + c)bl$, $(a + b)cl$, $(a + l)cb$	$ac + b + l$, $ac + c + l$, $al + c + b$

$(a+c)(b+l)$, $(a+b)(c+l)$, $(a+l)(c+b)$	$ac + bl$, $ab + cl$, $al + cb$

$$a(c + b) + cb, \quad a(c + l) + cl, \quad a(b + l) + bl, \quad cb + bl + lc$$

$$a(c+b)+cl, \; a(c+b)+bl, \; a(c+l)+cb, \; a(c+l)+bl, \; a(b+l)+cb, \; a(b+l)+cl$$
$$ac+cb+bl, \; ac+cl+lb, \; ab+bc+cl, \; ab+bl+lc, \; al+lc+cb, \; al+lb+bc$$

$a(c + b) + cbl$,	$a(c + b + l) + cb$,
$a(c + l) + cbl$,	$a(c + b + l) + cl$,
$a(b + l) + cbl$,	$a(c + b + l) + bl$,
$acb + (c + b)l$,	$(a + c + b)l + cb$,
$acl + (c + l)b$,	$(a + c + l)b + cl$,
$abl + (b + l)c$,	$(a + b + l)c + bl$,
$a(c + bl) + cb$,	$a(c + b) + (b + l)c$,
$a(c + bl) + cl$,	$a(c + l) + (b + l)c$,
$a(b + cl) + cb$,	$a(c + b) + (c + l)b$,
$a(b + cl) + bl$,	$a(b + l) + (c + l)b$,
$a(l + cb) + cl$,	$a(c + l) + (c + b)l$,
$a(l + cb) + bl$	$a(b + l) + (c + b)l$

$a(cb + bl + lc)$,	$a + cb + bl + lc$,
$ac(b + l) + cbl$,	$a(b + l) + c + bl$,
$ab(c + l) + cbl$,	$a(c + l) + b + cl$,
$al(c + b) + cbl$	$a(c + b) + l + cb$

$ac(b+l)+bl$	$a(b+l)+cb+bl+lc$
$ab(c+l)+cl$	$a(c+l)+cb+bl+lc$
$al(c+b)+cb$	$a(c+b)+cb+bl+lc$
$a(c+bl)+cbl$	$a(c+b+l)+(b+l)c$
$a(b+cl)+cbl$	$a(c+b+l)+(c+l)b$
$a(l+cb)+cbl$	$a(c+b+l)+(c+b)l$

$$a(c+b+l)+cbl,\quad a(c+bl)+(b+l)c,\quad a(b+cl)+(c+l)b,\quad a(l+cb)+(c+b)l$$

$a(cb+bl+lc)+cbl$	$a(c+b+l)+cb+bl+lc$

Dass die 165 Ausdrücke der vorstehenden Tafel „in Hinsicht der Multiplikation sowol als der Addition“ eine *Gruppe* bilden, nämlich dass mittelst der beiden direkten Operationen des identischen Kalkuls durch Verknüpfung irgendwelcher von ihnen kein Ausdruck gebildet werden kann, der nicht einem unter ihnen identisch gleich sein müsste, ist oben zwar keineswegs mühelos erkannt worden.

Ohne Vergleich mühevoller dürfte es aber sein, diesen Nachweis der erwähnten Gruppennatur unseres Systems von Ausdrücken direkt zu leisten, indem man die Ausdrücke auf jede erdenkliche Weise zu zweien multiplizirte, desgleichen addirte. Dies würde 13 530 Operationen einer jeden Sorte erfordern, von denen allerdings nach Konstatirung des im System vorliegenden Dualismus die eine Sorte unterbleiben könnte, und die Menge erforderlicher Operationen der andern Sorte durch Rücksichtnahme auf die Symmetrie sich noch weiter reduziren lassen würde. Nicht ganz so hoffnungslos dürfte allerdings ein systematisches Interaddiren sein, angewendet auf die 14 monomischen Produkte, S. 159, und, mit Rücksicht auf deren Symmetrie in drei Abteilungen, so geführt, dass jeder neu gewonnene Typus sogleich permutando mit allen seinen Repräsentanten angesetzt und nur (passiv) mit jenen zu dem Prozess des Interaddirens herangezogen würde.

Dass die Aussagen sämtlich verschieden sind wäre unter anderm leicht durch ihre Zerfällung in die 5 Elementarfächer zu erkennen. Diese liest sich jedesmal leicht aus der Tafel S. 162 heraus, indem man den a als Faktor enthaltenden Term des Ausdrucks in der zweiten Kolumne derselben aufsucht, den andern Term in der ersten Kolumne; dann hat man nur noch des letztern erstes Glied rechterhand additiv zu vermehren um das in der Zeile jenes erstern Terms darüber oder darunter stehende. —

„In Hinsicht der Negation“ bilden die 165 Ausdrücke keine Gruppe, indem ihre Negationen sich sämtlich nicht in der Tafel vertreten finden. Sie bilden also auch *nicht* eine „Gruppe“ *schlechtweg*, in dem Sinne, wie dieser Begriff eingangs des Anhangs 6 in Bd. 1 erklärt worden — das wäre: eine Gruppe „*in Hinsicht aller drei Spezies* des identischen Kalkuls“.

Schliesslich werde die Frage beantwortet, wie viele von den gefundenen 166 rein universalen Aussagen „zerfallen“, oder was auf dasselbe hinauskommt, wie viele (und welche) von den weiter oben gefundenen 512 zer-

fallenden Aussagen rein universaler Natur sind, nämlich behufs ihrer Statuirung mit dem Subsumtions- oder Gleichheitszeichen auskommen, ohne die Anwendung eines Ungleichheits- oder auch negirten Subsumtionszeichens zu erfordern, durch welche letztere ja sich uns stets partikulare Urteile charakterisirten.

Die fraglichen *„universalen zerfallenden"* Aussagen werden am besten wol wieder a priori aufgesucht.

Sie sind aus den Symbolen:

$$0,\ 1,\ h,\ k,\ m,\ n$$

lediglich durch Multiplikation und Addition — unter Ausschluss jedoch der Negation — aufzubauen, und kommt es also darauf an, die Symbole dieser Reihe zu einer „Gruppe" in Hinsicht blos jener beiden direkten Spezies zu ergänzen.

Dies mag kunstlos wie folgt geschehen.

Wegen $hm = 0$ und $kn = 0$ treten als multiplikative Kombinationen blos die vier binären (oder Binionen) hinzu:

$$hk,\ hn,\ km,\ mn$$

während Ternionen und höhere multiplikative Kombinationen nicht vorkommen. In Hinsicht der Multiplikation allein bilden also die bisherigen zehn Symbole bereits eine Gruppe, und sind zu einer solchen auch in Hinsicht der Addition nur mehr durch „Interaddiren" noch zu ergänzen, wobei die Elemente 0 und 1 beiseite gelassen werden mögen.

Nun sieht man unschwer, dass von den aus den 8 übrigen Elementen durch Addition zu bildenden

$$\frac{8\times 7}{1\times 2} = 28 \text{ Amben},\ \frac{8\times 7\times 6}{1\times 2\times 3} = 56 \text{ Ternen},\ \frac{8\times 7\times 6\times 5}{1\times 2\times 3\times 4} = 70 \text{ Quaternen}$$

bezüglich 8, 40 und 68 auf Grund der Tautologie und Absorptionsgesetze in Wegfall kommen, nämlich nichts Neues liefern, m. a. W. auf frühere additive Kombinationen hinauslaufen müssen, mithin in der That nur hinzukommen werden die

20 Amben:

$$h+k,\ h+m,\ h+n,\ k+m,\ k+n,\ m+n;\ h+km,\ h+mn,\ hn+k,\ k+mn,$$
$$hk+m,\ hn+m,\ hk+n,\ km+n;\ h(k+n),\ (h+m)k,\ hk+mn,\ hn+km,$$
$$(h+m)n,\ (k+n)m,$$

16 Ternen:

$$h+k+m,\ h+k+n,\ h+m+n,\ h+k+mn,\ h+km+n,\ h+(k+n)m,$$
$$k+m+n,\ hn+k+m,\ (h+m)n+k,\ hk+m+n,\ h(k+n)+m,\ (h+m)k+n;$$
$$hk+hn+km,\ hk+hn+mn,\ hk+km+mn,\ hn+km+mn,$$

2 Quaternen:

$$h+k+m+n,\ (h+m)(k+n),$$

während höhere additive Kombinationen zu fünf oder mehrern zwischen obigen acht monomischen Aussagen nicht in Betracht kommen können.

Bei Einrechnung der identischen und Ausschluss der absurden Aussage gibt also die Zahl:

$$1 + 8 + 20 + 16 + 2 = 47$$

die Antwort auf die gestellte Frage. —

Nachdem freilich Tafel XXVII^0 gewonnen ist, lässt sich die Frage am allerbequemsten erledigen, indem man diejenigen von den 165 Ausdrücken der Tafel aufsucht, welche *lediglich* (vergl. h, k, m, n in XVII^0) aus den acht Monomen ac, ab, cl, bl, acb, acl, abl, cbl additiv aufgebaut erscheinen. Man findet deren bezüglich 12, 29 und 5 auf den drei Seiten über die sich die Tafel erstreckt.

Nach diesem Exkurse wenden wir uns nunmehr dem allgemeineren Probleme zu.

Problem. Gesucht die *Anzahl der* inhaltlich verschiedenen *Urteile* (Aussagen), *welche die* formale *Logik zu fällen* (abzugeben) *vermag über n Begriffe* (Klassen).

Nach Herrn Peano[1] lautet die Lösung:

$$2^{2^{2^n}-1}-1.$$

Für*) $n = 1$ berechnet sich dies zu:

$$2^{2^2-1}-1 = 2^3 - 1 = 7,$$

und in der That sind folgende *sieben*:

$0 = 0$, $A = 0$, $A = 1$, $A \neq 0$, $A \neq 1$, $(A = 0) + (A = 1)$, $(A \neq 0)(A \neq 1)$

die über *eine* Klasse A ausschliesslich fällbaren Urteile, deren letzte sechs jedoch auch in den bezüglich äquivalenten Formen statuirt werden könnten:

$$A_1 = 1,\ A_1 = 0,\ A_1 \neq 1,\ A_1 \neq 0,\ (A_1 = 1) + (A_1 = 0),\ (A_1 \neq 1)(A_1 \neq 0),$$
$$(A = 0) + (A_1 = 0),\ (A \neq 0)(A_1 \neq 0),$$
$$(A_1 = 1) + (A = 1),\ (A_1 \neq 1)(A \neq 1).$$

Um jenes nachzuweisen, braucht man sich blos davon zu überzeugen, dass (in unsrer früheren Bezeichnung) die sieben Aussagen

$$\dot{1},\ h,\ m,\ h_1,\ m_1,\ h + m,\ h_1 m_1$$

zusammen mit der unzulässigen weil absurden Aussage 0 eine „Gruppe" bilden, und gelingt dieser Nachweis leicht bei Berücksichtigung der in Tafel XV^0 schon mit aufgeführten Hülfssätze:

$$hm = 0,\ hm_1 = h,\ h_1 m = m,\ h + m_1 = m_1,\ h_1 + m = h_1,\ h_1 + m_1 = \dot{1}$$

*) Will man nicht n verwenden, so ist von der frühern Bedeutung des n als einer Aussage zeitweilig abzusehen.

welche übrigens sämtlich nur als Umschreibungen der ersten unmittelbar einleuchtenden Inkonsistenz nämlich $(A = 0)(A = 1) = 0$ erscheinen.

Von vornherein, nämlich sofern Erwähnung jeder andern Klasse neben A ausgeschlossen, verboten ist, lassen sich als „primitive" Urteile über A offenbar nur solche Aussagen hinstellen, in welchen behauptet erscheint, dass A (oder A_1) gleich, oder ungleich, 0 oder 1 ist. Und aus diesen (scheinbar 8, wirklich 4) primitiven müssen alle erdenklichen Aussagen sich mittelst der drei Spezies des Aussagenkalkuls alsdann zusammensetzen. Damit treten aber, wie erkannt, zu ihnen nur noch zweie ausser der nichtssagenden oder identischen Aussage $\dot{1}$ hinzu, und ist die Peano'sche Zahl erwiesen.

Die vier primitiven Aussagen h, m, h_1, m_1 würden in Worten sich etwa wie folgt darstellen:

$h = (A = 0) =$ Es gibt keine A = Nichts ist A;

$m = (A = 1) =$ Es gibt nichts, was nicht A wäre = Alles ist A;

$h_1 = (A \neq 0) =$ Es gibt A = Etwas (Einiges) ist A;

$m_1 = (A \neq 1) =$ Es gibt Nicht-A's = Nicht alles ist A = Etwas ist nicht A.

Und darnach sind auch leicht die beiden abgeleiteten Urteile $h_1 m_1$ und $h + m$ in Worte zu kleiden.

Von jenen vier primitiven Aussagen sind aber zweie die Negation der beiden andern. Jede Aussage über A allein kann also nur eine Funktion im identischen Kalkul $f(h, m)$ dieser beiden Argumente sein, und lässt sich nach diesen entwickelt annehmen.

Die Gesamtheit $\dot{1}$ aller Möglichkeiten nach denselben Argumenten h, m entwickelt zerfällt aber nur in die drei Konstituenten:

$$\dot{1} = hm_1 + h_1 m + h_1 m_1$$

sintemal $hm = 0$ sein, der erste Konstituent des allgemeinen Entwickelungsschema's also verschwinden muss.

Von diesen drei Konstituenten (wo die 3 augenscheinlich entstand aus $2^2 - 1$) kann in unsrer Entwickelung von $f(h, m)$ ein jeder nur entweder mit dem Koeffizienten 0 oder aber mit dem $\dot{1}$ auftreten. Somit erhalten wir

$$2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$$

Möglichkeiten. Von diesen ist jedoch die eine auszuschliessen, bei welcher alle drei Konstituenten mit dem Koeffizienten 0 behaftet

wären, mithin die Behauptung: $f(h, m)$ gilt, also $f(h, m) = 1$, auf die Absurdität $0 = 1$ hinauslaufen würde. Die gesuchte Anzahl muss darnach gleich $8 - 1$ oder 7 sein.

Dies war ein zweiter und vielleicht der direkteste Weg, zu Peano's Anzahl zu gelangen — womit sich der erste Unterfall des allgemeinen Problems erledigte.

Für $n = 2$ erhalten wir nach Peano's Formel:

$$2^{2^{2^2}-1} - 1 = 2^{2^4-1} - 1 = 2^{15} - 1 = 32\,767$$

als die Anzahl der über *zwei* Begriffe A, B abgebbaren Aussagen — in Übereinstimmung mit dem schon oben von uns Gefundenen.

Um dieses Ergebniss nunmehr auch auf dem kürzesten Wege abzuleiten, will ich bei dem hohen Interesse, welches das Problem zu bieten scheint, über dasselbe gewissermassen einen selbständigen Vortrag halten (ohne auf früheres dabei Bezug zu nehmen).

Als Ausdrucksmittel, über welche wir Verfügung haben, setze ich die gewöhnlichen voraus, aus welchen die schulmässige Logik die Prämissen und Konklusionen ihrer (einfachen kategorischen) Syllogismen schmiedet. Diese Ausdrucksmittel erscheinen sämtlich in dem Satzfragmente vertreten:

„*Alle oder einige A sind nicht B, und* ...“

Wir verfügen über die Kopula „sind“ (oder „ist“), über die Bindewörter, Konjunktionen „und“ uud „oder“, und über die Verneinungspartikel „nicht“, endlich über die unbestimmten (adjektivischen) Zahlwörter oder numeralen Adjektive „alle“ sowie „einige“.

Bestimmte Zahlwörter hingegen sind natürlich auszuschliessen, ansonst wir ja in Gestalt von:

Nur *ein* A ist B, Gerade *zwei* A sind B, *Drei* A sind B, etc.

ersichtlich eine unbegrenzte Menge von Aussagen oder Urteilen abzugeben vermöchten.

Es sind mithin nur die obigen *sechs* Worte, auf deren Gebrauch wir bei den in Frage kommenden Urteilen sollen angewiesen sein.

Nach Bd. 1, S. 353 sq. könnte sogar von den beiden Konjunktionen irgend eine entbehrt werden, sodass wir zur Not schon mit *fünf* Worten auskämen.

Sicherlich, wenn ein Unbefangener veranlasst würde, eine Vermutung darüber niederzulegen, wie vielerlei Urteile sich mit diesem einfachen Wortvorrate über A und B wol fällen lassen möchten, so würde derselbe ungeachtet vorgängiger Warnung die Zahl noch immer viel zu niedrig greifen!

Gegenüber den Gepflogenheiten der Wortsprache gestatten wir uns allerdings die Freiheit, die Verneinungspartikel auch beim Subjekt des Urteils anzubringen, mithin auch Urteile zu bilden wie dieses: Alle Nicht-A sind B („Quali-fikation des Subjektes"! — der sogenannten „Quantifikation des Prädikates" dagegen mögen wir entraten).

Wir sind darnach im stande, über A und B zunächst die acht De Morgan'schen Urteile zu statuiren:

$$a = (AB = 0), \quad b = (A_1 B = 0), \quad c = (AB_1 = 0), \quad l = (A_1 B_1 = 0),$$
$$a_1 = (AB \neq 0), \quad b_1 = (A_1 B \neq 0), \quad c_1 = AB_1 \neq 0), \quad l_1 = (A_1 B_1 \neq 0),$$

und sei erinnert, dass in Worten lautet:

$$a = (\text{Alle } A \text{ sind nicht } B), \quad a_1 = (\text{Einige } A \text{ sind } B),$$

woraus nun aber die andern Urteile hervorgehen werden mittelst Ersetzung von A durch A_1, oder nicht-A, ev. von B durch B_1, d. h. nicht-B, und ersichtlich wird, dass wirklich durchaus mit unsern sechs Worten auszukommen ist.

Dabei bleiben schon Vereinfachungen unbenommen, wie man denn z. B. c sprechen wird $=$ (Alle A sind B) nämlich „nicht nicht-B", etc.

Sozusagen als ein verfügbarer Luxus steht uns übrigens alsbald eine viel grössere copia verborum und Fülle von Ausdrucksweisen zu Gebote.

So mag a auch $=$ (Kein A ist B) gesprochen werden, und neben „alle" und „einige" verfügen wir auch über das numerale Adjektiv „keine".

Ferner mag $c =$ (Jedes A ist B) lauten, etc.

Auch stehen uns schon bejahende sowol als verneinende Existenzialurteile zu Gebote. So wäre die Aussage: (Nichts ist A), $=$ (Es gibt keine A) äquivalent der als simultane zusammengesetzten Aussage: (Alle A sind B) *und* zugleich (Kein A ist B, sive: Alle A sind nicht B); wogegen die Aussage: (Es gibt A) $=$ (Etwas ist A) auf die Alternative von De Morgan'schen Urteilen hinausliefe: Entweder „einige A sind B" *oder* „einige A sind nicht B" — wobei das „zugleich" sowie das „entweder" blos rhetorische Verzierung. Wir verfügen somit auch schon über „nichts", etwas und „alles". „Alles ist A" käme hinaus auf „Nichts ist nicht-A". Etc. Wir verfügten, falls wir wollten, auch über das Relativpronomen, könnten reden von den A, *welche* B sind, z. B. a_1 übersetzen mit: Es gibt A, die B sind. Etc. Mit „und" zugleich wird uns „sowol als auch", mit „entweder . . oder" wird uns mittelst Verneinung auch „weder . . noch" gegeben erscheinen. Etc. Doch dies nur nebenbei.

Wir brauchen nun blos zu untersuchen, wie vielerlei Aussagen sich mittelst der Partikeln „und", „oder" (und „nicht", die aber schon entbehrt werden könnte) aus den acht De Morgan'schen Urteilen aufbauen lassen, so werden wir eine Zahl erhalten, die jedenfalls nicht grösser sein kann, als die gesuchte Anzahl der überhaupt erdenklichen

Aussagen über A und B. Dieselbe kann aber auch nicht kleiner sein, als diese gesuchte Anzahl, sofern sich zeigen lässt, dass jede erdenkliche Aussage über A oder B sich als eine Funktion

$$F(a, b, c, l)$$

des Aussagenkalkuls aus den vier primitiven De Morgan's muss zusammensetzen lassen.

In der That ist ein jedes kategorische Urteil über A und B entweder ein universales und dann durch eine Gleichung, oder es ist ein partikulares und dann durch eine Ungleichung mit der rechten Seite 0 darstellbar. Und andre als kategorische Urteile können wir mit unserm Wort-Kapitale zunächst nicht bilden; aus solchen erst, als Elementen, werden hernach auch mittelst der Bindewörter „oder" und „und" sich zusammengesetzte Aussagen ableiten lassen, die als disjunktive Urteile oder Alternativen resp. als simultane Aussagen, Aussagensysteme sich hinstellen lassen.

Die Negation *an* Aussagen kann ausser Betracht bleiben, indem sie an einer zusammengesetzten Aussage sich allemal „ausführen" lässt, wodurch Summen in Produkte, sowie umgekehrt, gemäss Th. 36) übergehen; indem sie ferner an den als Elemente einer solchen auftretenden kategorischen Urteilen ausgeführt, lediglich bewirkt, dass die universalen in partikulare, und diese in jene sich umwandeln.

Solche elementare Aussage nun, geschrieben als Gleichung oder Ungleichung mit der rechten Seite 0, wird als Polynom linkerhand einen Ausdruck aufweisen, der als eine Funktion (identischen Kalkuls) von den Argumenten A und B, somit als $f(A, B)$ zu bezeichnen ist, nämlich aus diesen Argumenten ganz und gar mittelst der Partikeln *„und, oder, nicht"* sich aufbaut*), m. a. W. aus A, B, A_1, B_1, blos mit den beiden ersten von diesen Partikeln.

Jenes Polynom $f(A, B)$ kann nach den Argumenten „entwickelt" werden, und setzt sich aus irgendwelchen von den Konstituenten der 1:

$$1 = AB + AB_1 + A_1B + A_1B_1$$

notwendig additiv zusammen — indess (bei Gleichung) nicht aus allen vieren, weil die Gleichung $f = 0$ dann auf $1 = 0$ hinausliefe (auch

*) Wird „einige A" mit A', „einige nicht-A" mit A_1', und analog in B, etc. dargestellt, so scheint bei Zulassung von Ausdrücken, wie $(A'B_1 + A_1'B)'$, sich allerdings noch ein weiteres Feld von erdenklichen Aussagen, als dasjenige, worauf unsre Untersuchung sich beschränkt, auf den ersten Blick zu ergeben.

bei Ungleichung im Grunde nicht, weil in solchem Falle die Aussage als $1 \neq 0$ eine nichtssagende würde und als simultan abgegebne zu unterdrücken wäre etc.). Nach den auch auf drei Terme α, β, γ zu verallgemeinernden Schemata (die irgend welche von unsern 4 Konstituenten rechts repräsentiren sollen):

$$(\alpha + \beta = 0) = (\alpha = 0)(\beta = 0), \quad (\alpha + \beta \neq 0) = (\alpha \neq 0) + (\beta \neq 0)$$

liefe also die Aussage $f = 0$ sowol wie die $f \neq 0$ auf lauter „primitive" oder De Morgan'sche Urteile hinaus. Und jede Funktion von solchen Produkten oder Summen De Morgan'scher Urteile muss wiederum eine Funktion auch von diesen Urteilen selbst sein, d. h. wir haben $F(a, b, c, l)$ als die allgemeinste Aussage, wie oben behauptet worden.

Diese Funktion F können wir uns ihrerseits wieder nach ihren vier Argumenten a, b, c, l entwickelt denken. Die Entwickelung präsentirt sich als irgend eine additive Kombination gebildet aus den Konstituenten der Entwickelung der 1 des Aussagenkalkuls, welche ja alle erdenklichen Gelegenheiten zu einer Aussage in eine Klasse zusammenfasste, sie vereinigte zu der Klasse der überhaupt möglichen Fälle. Von den $2^4 = 16$ Konstituenten dieser Entwickelung verschwindet aber der erste. Wir haben die Inkonsistenz:

$$abcl = 0$$

weil, wie schon S. 138 ausgeführt, die gleichzeitige Geltung der vier linkseitigen Faktoraussagen die Forderung $1 = 0$ involviren würde.

Und somit haben wir:

$$1 = abcl_1 + abc_1l + abc_1l_1 + ab_1cl + ab_1cl_1 + ab_1c_1l + ab_1c_1l_1 +$$
$$+ a_1bcl + a_1bcl_1 + a_1bc_1l + a_1bc_1l_1 + a_1b_1cl + a_1b_1cl_1 + a_1b_1c_1l + a_1b_1c_1l_1$$

Jeder von diesen $2^4 - 1 = 15$ Konstituenten ist in der Entwickelung unsrer Aussage $F(a, b, c, l) = 1$ entweder gar nicht oder ganz als Glied vertreten, nur können nicht sämtliche Konstituenten darin den Koeffizienten 0 haben, weil sonst die Aussage auf $0 = 1$ hinauskäme. Wir haben also an möglichen Bildungsweisen des F diese

$$\underset{\widehat{1}}{2} \times \underset{\widehat{2}}{2} \times \cdots \times \underset{\widehat{15}}{2} = 2^{15},$$

wovon die erwähnte letzte in Abzug zu bringen ist, und $2^{15} - 1$ als die hiermit gefundene Anzahl der über A und B abgebbaren Aussagen bleibt.

Unter Festhalten der Reihenfolge obiger 15 Konstituenten könnte man

die Koeffizienten 0 und 1, mit denen behaftet sie in der Entwickelung unsres Aussagenpolynoms F auftreten, jeweils zu einer fünfzehnstelligen dyadischen Systemzahl zusammenstellen, und würden so alle $2^{15} = 32\,768$ überhaupt denkbaren Aussagen eine bestimmte Reihenfolge erhalten, wobei die erste derselben mit der Nummer $\overline{000 \cdots 00}$, als absurde, unzulässig, die letzte $\overline{111 \cdots 11}$, als identische, selbstverständlich zu nennen wäre — wie dies schon Herr Franklin[1] bemerkte.

Auf diese Weise würde ihre Mannigfaltigkeit sich aber doch bei weitem nicht so gut übersehen lassen, als bei unsrer früheren Anordnung derselben. —

Zum Schluss dieser Betrachtung noch ein paar Bemerkungen.

Von Interesse ist noch die Frage nach Zahl und Art der *Typen*, in welche unsre 32 767 Aussagen sich einordnen.

Vom Typus einer solchen kann man in zweierlei Hinsicht reden: „aussagenrechnerisch" indem man gleichen Typus allen den Aussagen zuschreibt, welche durch Vertauschungen unter den acht De Morgan'schen Urteilen $a, b, .. l_1$ in einander übergeführt werden können. [Diese Frage, die vom geringeren Interesse, dürfte unschwer im Anschluss an Clifford's Untersuchungsergebnisse in Bd. 1, Anhang 6 zu beantworten sein.] Zweitens „klassenrechnerisch", indem man zum selben Typus nur diejenigen Aussagen zählt, welche durch Vertauschungen unter den *Klassen*symbolen A, B, A_1, B_1 in einander überführbar sind. Hiernach müssten schon a_1, b_1, c_1, l_1 als partikulare Urteile unter einem ganz andern Typus rangiren als wie die universalen a, b, c, l.

Vor allem wäre hier in Rücksicht zu ziehen, dass die folgenden fünf Systeme von Vertauschungen „gestattet" erscheinen, nämlich die ganze Aussagengruppe nur in sich selbst transformiren:

1) $(A, A_1)\,(a, b)\,(c, l)$
$(a_1, b_1)\,(c_1, l_1)$

2) $(B, B_1)\,(a, c)\,(b, l)$
$(a_1, c_1)\,(b_1, l_1)$

3) $(A, A_1)\,(B, B_1)\,(a, l)\,(b, c)$
$(a_1, l_1)\,(b_1, c_1)$

4) $(A, B)\,(b, c)$
$(A_1, B_1)\,(b_1, c_1)$

5) $(A, B_1)\,(a, l)$
$(B, A_1)\,(a_1, l_1)$

Darnach wäre leicht darzuthun, dass z. B. bei *einer* „Aushebung" (die bei Clifford den *einen* Typus der monomischen Aussage lieferte) sich bereits fünferlei Typen mit $4 + (4 + 2) + 4 + 1 = 15$ Formen ergeben, die wir je in einer Zeile zusammenstellen:

1. Typ. a_1bcl, ab_1cl, abc_1l, $abcl_1$;
2. Typ. a_1b_1cl, a_1bc_1l, ab_1cl_1, abc_1l_1;
3. Typ. a_1bcl_1, ab_1c_1l;
4. Typ. $ab_1c_1l_1$, $a_1bc_1l_1$, $a_1b_1cl_1$, $a_1b_1c_1l$;
5. Typ. $a_1b_1c_1l_1$.

Wie viele Typen gibt es nun aber bei *zwei*, und mehr (bis zu 14) Aushebungen, und wie viele im Ganzen? Hier signalisirt sich wiederum ein Problem, bei dem die Lösung noch schwieriger sein dürfte als bei dem von Clifford behandelten und auf das auch schon Miss Ladd[1] p. 67 hinweist. —

Fasste man den Begriff des sog. „*einfachen* Syllogismus" so *weit*, wie erdenklich, so würde eine *vollständige* Syllogistik nunmehr die Aufgabe haben, aus einem jeden von den 32 767 Urteilen die über A und B gefällt werden können, in Verbindung mit einem jeden von den 32 767 Urteilen, die (ebenso) über B und C sich fällen lassen, den „Mittelbegriff" B zu eliminiren somit die Konklusion aufzusuchen, welche aus solchen zwei Prämissen in Bezug auf A und C eventuell fliesst, sofern nämlich diese Prämissen nur überhaupt eine gültige (von B unabhängige) Folgerung zu ziehen gestatten (yield).

Von diesen $32\,767^2 = 1\,073\,676\,289$ Untersuchungen würden aber nur $32\,767 \times 16\,384 = 536\,854\,528$ in der Hinsicht unter sich verschieden sein, dass sie nicht durch blosse Vertauschung von A und C auf andere von ihnen zurückkommen, und auch diese Zahl liesse sich noch wegen Vertauschbarkeit von B und B_1 auf etwas mehr als die Hälfte reduziren.

In dem Umstand, dass die Bewältigung einer solchen Menge von Aufgaben doch nicht mehr praktikabel sein würde, liegt für uns eine Mahnung, uns nicht in Einzeluntersuchungen zu verlieren, vielmehr bald darauf auszugehen, die *Methoden* des Schliessens ganz allgemein weiterzuentwickeln.

Um nunmehr allgemein Peano's Formel abzuleiten, die Anzahl der über n Begriffe $A, B, C \ldots$ abgebbaren Aussagen zu ermitteln, wollen wir die allgemeinsten Überlegungen gelegentlich durch den Hinblick auf den Fall $n = 3$ noch besonders illustriren, wo A, B, C die gegebenen Begriffsumfänge oder Klassen sein werden.

Jede erdenkliche Aussage, sofern sie sich aus einfacheren Aussagen zusammensetzt, kann ganz aus *Gleichungen* nebst Verneinungen solcher, als *Ungleichungen*, aussagenrechnerisch aufgebaut werden.

Eine Gleichung, in welche die Klassen $A, B, C, \ldots$ eingehen, hätte allgemein die Form:

$$\varphi(A, B, C, \ldots) = \psi(A, B, C, \ldots);$$

sie kann aber rechterhand auf Null gebracht werden, wonach sie lauten wird:

$$f(A, B, C, \ldots) = 0,$$

wo wie φ, ψ, so auch f irgend welche Funktion — nach dem im identischen Kalkul gültigen Funktionsbegriffe — sein wird. Und bei der Verneinung einer solchen Gleichung tritt nur das Ungleichheitszeichen $\neq$ an die Stelle ihres Gleichheitszeichens.

Das „Polynom" einer solchen Gleichung oder Ungleichung ist irgend ein Element der „Gruppe" $G(A, B, C, \ldots)$ als deren Elementezahl wir in Bd. 1, Anhang 6 die Zahl 2^n gefunden haben. Es kann daher auch nur 2^n solcher Gleichungen geben, von welchen jedoch die absurde $1 = 0$ in Abzug zu bringen wäre, desgleichen sind 2^n Ungleichungen denkbar, von welchen die Verneinung der absurden als nichtssagende zulässig bleibt. Indessen soll von diesen Ergebnissen hier gar kein Gebrauch gemacht werden.

Die linke Seite unsrer rechts auf 0 gebrachten Gleichung oder Ungleichung kann nach ihren n Argumenten $A, B, C, \ldots$ „entwickelt" gedacht werden. Da von andern Klassen als ebendiesen nicht gesprochen werden durfte, so können als Koeffizienten in gedachter Entwickelung nur mehr 0 und 1 auftreten. Das heisst: unser Polynom $f(A, B, C, \ldots)$, oder f, setzt sich additiv zusammen aus irgend welchen (nur bei der Gleichung nicht gerade sämtlichen) Konstituenten der Entwickelung der identischen Eins nach denselben Argumenten, welche lautet:

$$1 = ABC \cdots + \cdots + A_1 B_1 C_1 \cdots$$

und wie bekannt 2^n Glieder besitzt.

Sind $a, b, c, d, \ldots$ die zu f zusammentretenden Glieder, sodass $f = a + b + c + d + \cdots$, so lässt sich aber nach Th. 24_+) die Gleichung $f = 0$ zerspalten in das Produkt (System) einfacherer Gleichungen:

$$(f = 0) = (a = 0)(b = 0)(c = 0)(d = 0) \cdots$$

und demgemäss lässt auch nach Th. $\bar{32}$) und $\bar{36}$) die Ungleichung $f \neq 0$ sich zerlegen in die Summe (Alternative) von einfacheren Ungleichungen:

$$(f \neq 0) = (a \neq 0) + (b \neq 0) + (c \neq 0) + (d \neq 0) + \cdots$$

Jede Funktion von lauter irgendwie gebildet gewesenen Gleichungen und Ungleichungen wird also auch sein: eine Funktion von diesen einfacheren Gleichungen und Ungleichungen, und *nur* von diesen — die sich ergeben, indem man die 2^n Konstituenten obiger Entwickelung (der 1) einzeln $=$ resp. $\neq 0$ setzt.

Diese einfacheren Propositionen wollen wir die *„primitiven"* nennen und mit $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \alpha_1, \beta_1, \ldots$ bezeichnen. Sie kommen (höchstens) in der Anzahl zwei mal 2^n in Betracht, stellen sich dar als 2^n Aussagen nebst deren (ebensovielen) Verneinungen, sodass wir häufig auch nur von *den* 2^n primitiven Aussagen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ reden mögen — ihre Negationen als selbstverständlich dazu gehörige mit Stillschweigen übergehend.

Für $n = 3$, wo $2^3 = 8$, ist:

$\alpha = (ABC = 0)$, $\beta = (ABC_1 = 0)$, $\gamma = (AB_1C = 0)$, $\delta = (AB_1C_1 = 0)$,
$\varepsilon = (A_1BC = 0)$, $\zeta = (A_1BC_1 = 0)$, $\eta = (A_1B_1C = 0)$, $\vartheta = (A_1B_1C_1 = 0)$;
$\alpha_1 = (ABC \neq 0)$, $\beta_1 = (ABC_1 \neq 0)$, ...
. . . . $\vartheta_1 = (A_1B_1C_1 \neq 0)$

der vollständige Überblick derselben.

Unser Ergebniss war: *Jede über die n Klassen A, B, C, . . . abgebbare Aussage,* auch jedes erdenkliche System und jede Alternative von solchen Aussagen, *ist eine Funktion* (im identischen Kalkul, in seiner Anwendung als *Aussagen*kalkul) *von den 2^n primitiven Aussagen, und nur von diesen,* aus denen sie ausschliesslich aufgebaut erscheint. Die (Gesamt-)Aussage hat die Form:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \ldots).$$

Bei $n = 3$ ist sie mithin darstellbar durch

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \vartheta).$$

Diese Funktion kann nach ihren 2^n Argumenten „entwickelt" werden. Die Entwickelung setzt sich zusammen aus irgendwelchen Konstituenten, hervorgehoben aus der identischen Entwickelung der Aussagen-Eins:

$$\dot{1} = \alpha\beta\gamma\delta \cdots + \cdots + \alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1 \cdots$$

nach ebendiesen Argumenten. Solche Entwickelung hat a priori 2^m Glieder, wenn

$$m = 2^n$$

die Zahl der Argumente vorstellte. Von diesen Gliedern ist aber das erste aussagenrechnerisch gleich null, nämlich:

$$\alpha\beta\gamma\delta \cdots = 0$$

eine Inkonsistenz, indem das gleichzeitige Erfülltsein der linkseitigen Faktoraussagen stipuliren würde: das gleichzeitige Verschwinden sämtlicher 2^n Konstituenten jener Entwickelung der Klassen-Eins 1 nach den n Argumenten $A, B, C, \ldots$, mithin, da ihre Summe bekanntlich eben gleich 1 ist, auf die absurde Forderung $1 = 0$ hinausliefe.

Es wird also von unsern 2^m Gliedern das erste zu unterdrücken sein, und bleiben nur

$$r = 2^m - 1$$

Konstituenten zur Summe $\dot{1}$ vereinigt stehen.

Unsre Funktion (Aussage) F kann nur sein eine additive Kombination von irgend welchen dieser r Glieder. Nicht nur weil in F keine andern als die m primitiven Aussagen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ als Argumente

oder Parameter des Funktionsausdrucks vorkamen, sondern auch schon aus dem Grunde, weil im Aussagenkalkul bekanntlich *alle* Symbole lediglich der Werte 0 oder 1 fähig sind, können als Koeffizienten in der Entwickelung von F nur die beiden 0 und 1 auftreten. D. h. jeder unsrer r Konstituenten ist in dieser Entwickelung entweder gar *nicht*, oder *ganz*, als Summand vertreten; wir haben für jeden dieser Konstituenten *zwei* Möglichkeiten, und können daher im Ganzen auf:

$$\underset{1}{\overset{\frown}{2}} \times \underset{2}{\overset{\frown}{2}} \times \cdots \times \underset{r}{\overset{\frown}{2}} = 2^r$$

Arten die Funktion F zusammengesetzt denken.

Von diesen läuft aber *eine* auf die Aussagenabsurdität $1 = 0$ hinaus, diejenige nämlich bei welcher alle unsre r Konstituenten unvertreten blieben, zum Koeffizienten 0 erhielten. Dann müsste nämlich auch F als deren Summe den Wert 0 haben; soferne aber F ausgesagt, statuirt, als gültig hingestellt wird, hätten wir $F = 1$ anzuerkennen und gelangten so zu einem Widerspruche.

Die gesuchte Anzahl der *zulässigen* Aussagen ist hiermit:

$$2^r - 1$$

und dies geht in Peano's Ergebniss über*), wenn in den Ausdruck die obigen Werte von r und m rückwärts eingesetzt, restituirt werden; q. e. d.

Bei $n = 3$ ist $m = 2^3 = 8$ und:

$$1 = \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta_1 + \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta_1\vartheta + \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta_1\vartheta_1 + \cdots + \alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1\varepsilon_1\zeta_1\eta_1\vartheta_1$$

mit $r = 2^8 - 1 = 255$ Gliedern, und lassen sich

$$2^{255} - 1 = \text{(rund) } 57\,896 \times 10^{72}$$

zulässige Bildungsweisen von F denken. *Mithin gibt es über drei Begriffe A, B, C mehr als fünfzigsieben tausend Trillionen Quadrillionen* (inhaltlich verschiedene) *fällbare Urteile.*

Und über *vier* Klassen A, B, C, D lassen sich

$$2^{2^{2^4}-1} - 1 = 2^{2^{16}-1} - 1 = 2^{65\,535} - 1 = \text{(rund) } 10^{19\,728}$$

verschiedene Aussagen abgeben, das sind ihrer so viele als eine Zahl angibt, die sich mit 19 729 Ziffern schreibt — die drei ersten Ziffern sind 100 und folgt auf sie eine 2 oder 3. —

*) Herr Peano bringt auch die identische Aussage $1 = 1$, (oder $0 = 0$), bei welcher keiner von den r Konstituenten (als Glied der Alternative) fehlen würde, hiervon noch in Abzug; er findet: $2^r - 2$.

Neunzehnte Vorlesung.

§ 40. Umschau über die gelösten und noch zu lösende Probleme. Mitchell's allgemeine Form der gegebene Urteile zusammenfassenden Gesamtaussage.

Indem wir eine Rekapitulation gewisser früheren Sätze noch naheliegend ergänzen, — so, wie es durch den Hinzutritt, behufs Miteinbeziehung, der Ungleichheitszeichen geboten erscheint — wollen wir mit Miss Christine Ladd[1] (nunmehr Frau Franklin) zunächst folgende Theoreme des identischen Kalkuls hervorheben — wobei, Raummangels halber, der Mittelstrich zu brechen ist:

$$
\alpha) \begin{cases} (a = 1)(b = 1) = (ab = 1), & (a \neq 1) + (b \neq 1) = (ab \neq 1), \;\Big| \\ (a = 1) + (b = 1) \mathrel{\underline{\in}} (a + b = 1), & (a + b \neq 1) \mathrel{\underline{\in}} (a \neq 1)(b \neq 1), \;\Big| \\ \Big|\; (a = 0)(b = 0) = (a + b = 0), & (a \neq 0) + (b \neq 0) = (a + b \neq 0), \\ \Big|\; (a = 0) + (b = 0) \mathrel{\underline{\in}} (ab = 0), & (ab \neq 0) \mathrel{\underline{\in}} (a \neq 0)(b \neq 0). \end{cases}
$$

In diesen sollen a, b wieder *irgendwelche* Gebiete vorstellen, und fakultativ dürfen sie also selbst auch Aussagen bedeuten.

Die Theoreme links vom Strich, d. i. in den beiden ersten Zeilen sind denen rechts oder in den zwei letzten Zeilen *gebietsdual* (nicht aber aussagendual) entsprechend, und brauchen wir daher nur etwa auf die letztern näher einzugehen.

Die erste rechts ist das bekannte Th. 24_{+}); die zweite geht daraus durch beiderseitiges Negiren (Kontraposition) gemäss Th. $\overline{32}$) und $36_{\times}$) hervor.

Die dritte sagt weiter nichts aus, als dass — nach Th. $22_{\times}$) — ein Produkt verschwinden muss, wenn einer seiner Faktoren verschwindet; es drückt nämlich die linke Seite oder Prämisse der Aussagensubsumtion: $(a = 0) + (b = 0)$ die Annahme aus, dass entweder a oder b für sich verschwinde (oder auch beide zusammen), wo dann immer auch ab verschwinden muss, d. h. die Konklusion oder Behauptung der Aussagensubsumtion, ihre rechte Seite, notwendig gilt;

doch ist der Schluss nicht umkehrbar, indem, wie wir wissen, ein Produkt ab auch verschwinden kann, ohne dass einer seiner Faktoren 0 wird — welche vielmehr nur disjunkt zu sein brauchen. Aus der dritten Formel geht die vierte wiederum durch Kontraposition gemäss Th. $\overline{37}$) und $\overline{36}_+$) hervor.

Von zweien sind die sämtlichen Sätze α) leicht auf beliebig viele Operationsglieder auszudehnen, wofür sie lauten:

$$\beta)\begin{cases} \Pi(a=1)=(\Pi a=1), \quad \Sigma(a\neq 1)=(\Pi a\neq 1), \\ \Sigma(a=1)\mathrel{\underline{\in}}(\Sigma a=1), \quad (\Sigma a\neq 1)\mathrel{\underline{\in}}\Pi(a\neq 1) \\ \qquad \Pi(a=0)=(\Sigma a=0), \quad \Sigma(a\neq 0)=(\Sigma a\neq 0), \\ \qquad \Sigma(a=0)\mathrel{\underline{\in}}(\Pi a=0), \quad (\Pi a\neq 0)\mathrel{\underline{\in}}\Pi(a\neq 0), \end{cases}$$

und wo die Summen- und Produktenzeichen sich über eine *beliebige* Reihe von Gebietsymbolen $a, a', a'', \ldots$ erstrecken — nur: in einer jeden Formel *beiderseits über die nämliche Reihe.*

Eine Gleichung kann man sich jederzeit rechts auf 0 gebracht denken, oder auch, wenn man will, auf 1. Dasselbe gilt darnach auch von einer Ungleichung. Vergl. die Theoreme 39) und $\overline{32}$). Nach letzterem, wenn z. B. $(a=b)=(ab_1+a_1b=0)$ ist, muss ja auch: $(a\neq b)=(ab_1+a_1b\neq 0)$ sein, etc.

Mit Rücksicht hierauf können wir nun sagen, dass die Theoreme der ersten Zeile von α) oder β) lehren: Ein *Produkt von Gleichungen* und eine *Summe von Ungleichungen* kann *stets in eine einzige* Gleichung resp. Ungleichung (in *eine* Proposition *der nämlichen Art*) zusammengezogen und durch diese ausreichend vertreten werden. Wir könnten passend auch den Ausdruck wählen: eine „Konjunktion“ von Gleichungen und eine „Disjunktion“ von Ungleichungen.

Sind die Gleichungen resp. Ungleichungen etwa Voraussetzungen eines Theorems oder Problems, Data, Prämissen, so wird das *Produkt* (wie bekannt) ein *System von simultan geltenden,* koëxistirenden, gleichzeitig zu adoptirenden, die *Summe* aber ein *System von alternativ geltenden* Annahmen ausdrücken — das Wort „alternativ“ in dem schon wiederholt erläuterten Sinne genommen. [Und ähnlich auch, falls jene Behauptungen vorstellten.]

Also: *simultane Gleichungen* sowie *alternative Ungleichungen* lassen je zu einer einzigen Relation derselben Sorte sich zusammenziehen.

Das Umgekehrte dagegen scheint nicht möglich zu sein.

Eine Summe von Gleichungen (alternative Gleichungen) oder ein Produkt von Ungleichungen (simultane Ungleichungen) gestatten zwar nach den Formeln der zweiten Zeile von α) oder β) einen Schluss

von ihnen hin auf eine einzige Beziehung, resp. *zu ihnen hin von* einer einzigen Beziehung derselben Sorte, welcher Schluss jedoch nachweislich nicht umkehrbar ist, sodass keine Äquivalenz stattfindet.

Mit dieser Thatsache des Denkrechnens oder rechnenden Denkens haben wir uns abzufinden; sie drückt unsern ferneren Untersuchungen ein bestimmtes Gepräge auf.

Auf Grund derselben lässt sich nunmehr schon absehen, es lässt sich darnach ermessen, *welche Form* — in Gestalt einer einzigen Gleichung oder Ungleichung des Aussagenkalkuls — den *Daten eines Problemes* allgemein gegeben werden kann.

Immer mögen wir voraussetzen, dass die Data eines gedachten beliebigen Problems in Worten und Wortverknüpfungen oder Sätzen darstellbar und dargestellt seien, sich also in Gestalt einer Reihe oder Kette von Aussagen, Urteilen präsentiren — nennen wir sie das „Prämissensystem" oder das „System der Data"!

Diese Voraussetzung wird man kaum als eine wirkliche Beschränkung ansehen können. Sintemal die Wortsprache die ursprüngliche Form des Gedankenvollzuges ist, dürfte, was in ihr überhaupt nicht ausdrückbar sein sollte, geradezu als undenkbar zu bezeichnen sein. Wenigstens könnte solches nicht zum Gegenstand einer gemeinsamen Betrachtung gemacht werden — vergl. Bd. 1, S. 126. Die Ersetzbarkeit selbst einer Anschauung eines Bildes, oder einer Abbildung, ja eines symphonischen Musikstücks mit allen Feinheiten seiner Klangwirkung, durch eine blos verbale Beschreibung, erscheint allerdings als ein sehr gewagtes Postulat. Sie ist aber wenigstens ein Ideal, welches wir beliebig nahe erreichen können — wenn auch freilich nur mit einem ganz unverhältnissmässigen Aufwand von Mühen. Vermöchten wir doch Figuren in der Fläche sowol als Gestalten im Raume nötigenfalles mittelst Koordinaten zu fixiren, die Bestandteile von Mischfarben durch Angabe ihrer Wellenlänge oder Stelle im Spektrum zu beschreiben, desgleichen die Intensitäten von Licht und Schatten, Temperatur, Dichte und Zusammensetzung der Materie, ihre Bewegung in Zahl und Maass für jede Stelle im Raume auszudrücken, nicht minder, wie wir die Fähigkeit besitzen Tonhöhen, Dauer und Intensität etc. genauer noch als durch die gedruckten Noten mittelst Worten zu bestimmen. Weniger weit ist die Sprache noch in der Hinsicht entwickelt, dass sie auch die Eindrücke des Geruchs- oder Geschmacksinnes, Schmerzgefühle und Anderes, ausreichend darzustellen vermöchte.

In letzter Instanz sollen nun die Aussagen unsres Prämissensystems lediglich Relationen zwischen Klassen einer (gewöhnlichen) Mannigfaltigkeit, z. B. also Beziehungen zwischen Begriffsumfängen (und damit, wenn man will auch zwischen Begriffen nach ihrem Inhalte betrachtet) konstatiren.

Diese hier zu machende Voraussetzung enthält formell eine wirk-

liche und sehr bedeutende *Einschränkung* der Klasse von Problemen, auf welche unsere Methoden zunächst nur anwendbar sein werden.

Wie bedeutend diese Einschränkung ist wird in § 50 völlig deutlich werden.

Einstweilen sei blos angeführt, dass wenn wir z. B. auch nur sprechen wollen von der „Farbe eines (gewissen) Salzes", wir genötigt sind, eine Beziehung herzustellen und in's Auge zu fassen zwischen dem Begriff der Farbe und dem des Salzes (überhaupt, oder auch dieses bestimmten, gedachten Salzes insbesondere), welche *nicht* aufgefasst werden kann als eine *Relation* im Sinne der Paragraphen 32 bis 36 *zwischen den Umfängen* der genannten Begriffe — eine Beziehung nämlich, allerdings wie gesagt zwischen diesen Begriffen, welche eben aber keine Umfangsbeziehung ist, welche durchaus nicht erscheint als eine Beziehung zwischen der *Klasse* der Farben und der *Klasse* der (eventuell der erwähnten) Salze.

Dergleichen Beziehungen, wie sie namentlich durch den Genitivus, sowie auch vermittelst der *Kasus* überhaupt und der *Präpositionen* sprachlich ausgedrückt zu werden pflegen, fallen nicht ohne weiteres in das Ressort des bisherigen identischen Kalkuls, und werden wir uns hier der Notwendigkeit bewusst, auf die Logik der *Umfangs*beziehungen (die „logic of absolute terms" nach De Morgan und Peirce's Ausdrucksweise) folgen zu lassen eine Logik der *Beziehungen überhaupt* („logic of relatives").

Es sind in der That nur die alleräusserlichsten, sozusagen rohesten Beziehungen — jene Relationen der citirten Paragraphen, die Relationen zwischen Klassen — mit denen wir uns hier noch abgeben.

Aber sie erscheinen auch als die *elementarsten* Beziehungen; sie bilden wenigstens den *äussern Rahmen*, in welchen sich das ganze Bild der Denkprozesse notwendig einordnet. Denn ist es auch behufs Aufbaues des Subjekt- und Prädikatbegriffes selbst aus andern gegebenen Begriffen zumeist erforderlich noch ganz andre Beziehungen, als wie blosse Umfangsbeziehungen, zwischen den letzteren beizuziehen — wie beispielsweise die Beziehung zwischen einem handelnden „Subjekte", seiner Handlung, Thätigkeit, und dem *„Objekte"* dieser letztern — so läuft doch das primäre Urteilen selbst (wie in § 1 und 2 schon erläutert) logisch immer auf die Konstatirung einer *Umfangs*beziehung zwischen dem (wie gesagt *irgendwie* zustande gekommnen, konstruirten) Subjekt- und Prädikatbegriffe unfehlbar hinaus. Und wie die Geometrie voraufgehen muss der Kinematik und Mechanik, diese wieder der Elasticitätslehre, so muss auch unser elementarer Teil der Logik erst gründlich abgehandelt und wissenschaftlich ausgestaltet sein, bevor man hoffen kann, eine exakte Behandlung auch der feineren und feinsten Untersuchungen auf logischem Gebiete zu verwirklichen, bevor man überhaupt erfolgreich an diese wird herantreten können. (Bd. 1.)

In der zeitweiligen Beschränkung auf scharf umgrenzte Klassen von Aufgaben liegt die einzige Möglichkeit des Fortschritts in den Wissenschaften, und kann man den Himmel der Erkenntniss nicht auf einmal herunterholen — vergleiche Goethe's „In der Beschränkung zeigt sich der Meister", auf das wir schon einmal (Bd. 1, S. 521) anspielten.

Ein kategorisch abgegebenes Urteil A wird eben dadurch hingestellt, als stets oder zeitweilig gültig, was durch eine Formel

$$\gamma) \qquad A = 1 \quad \text{resp.} \quad A \neq 0$$

ausdrückbar ist.

Nach § 32, ϑ) kann dafür auch

$$\delta) \qquad A_1 = 0 \quad \text{resp.} \quad A_1 \neq 1$$

genommen werden. Die Fassung γ) werden wir bei der resultirenden Gesamtaussage vorziehen und sie erscheint ja als die natürlichste, weil sie die zu statuirende Behauptung selbst zum „Polynome", zur linken Seite hat; bei den letzten Teilaussagen dieser Gesamtaussage dagegen werden wir gleichwol häufig — einer rechnerischen Gepflogenheit zuliebe — auch Ausdrucksformen δ) benutzen, uns nämlich zumeist Gleichungen sowol wie Ungleichungen rechterhand auf 0 gebracht denken.

Bei bestimmtem und konstant festgehaltenem Sinne des Urteils A sind — wie wir gesehen haben — die beiden Propositionen γ) einander äquivalent, bedingen sich gegenseitig [und ebenso also auch die beiden Propositionen δ)].

Wir wollen sie trotzdem zunächst jeweils *gesondert* als zwei verschiedene Fälle aufführen in der vaguen, vielleicht trügerischen Hoffnung, es möchten gewisse Momente der zu entwickelnden Theorie sich später einmal auch auf solche Urteile mit übertragen lassen, deren Sinn in der im § 29 geschilderten Weise veränderlich oder wie bei den Gelegenheitsurteilen unbestimmt ist, wo ja, wie erkannt worden, die Fälle $A = 1$ und $A \neq 0$ dann wirklich zu unterscheiden wären.

Ohnehin müssen auch diese beiden Fälle von Aussagen wohl unterschieden werden, sobald die Aussagen $A = 1$ oder $A \neq 0$ primäre sind, in ihnen nämlich A ein Gebiet oder eine Klasse vorstellt, was bei den letzten Teilaussagen die in Betracht kommen können, vorauszusetzen sein wird.

Wird eine Aussage A kategorisch *verneint*, so setze man A_1 an, schreibe eventuell:

$$\varepsilon) \qquad A_1 = 1 \quad \text{resp.} \quad A_1 \neq 0$$

oder auch

$$\zeta) \qquad A = 0 \quad \text{resp.} \quad A \neq 1$$

vergl. § 32, ι). Überall natürlich ist, wenn A selbst eine Gleichung sein sollte, dessen Negation A_1 als die entsprechende Ungleichung — und umgekehrt — anzusetzen.

Einzelaussagen $A, B, C, \ldots$ aus welchen unser „Prämissensystem" sich zusammensetzt, werden nun entweder (als bejahte oder verneinte) *kategorisch* hingestellt oder sie erscheinen durch Konjunktionen miteinander verbunden, vermittelst Bindewörtern in Abhängigkeit von einander gesetzt.

Im erstern Falle sind sie selbst (resp. ihre Negationen) zu schlechtweg anzunehmenden, zu „Voraussetzungen" des Problemes gestempelt; man bringe dann eine jede derselben, wie vorstehend angegeben, in Formeln, und setze, wenn es ihrer mehrere sein sollten, das Produkt derselben:

η) $$ABC\ldots$$

an. Ebenso verfahre man aber auch, wenn solche Einzelaussagen etwa mittelst der Konjunktion „und" („sowie", etc. resp. mit „sowol .. als auch", „nicht nur .., sondern auch" und dergleichen) zu einem zusammengesetzten sogenannten *„kopulativen"* Urteil verknüpft erscheinen sollten, wodurch sie ja ebenfalls als gleichzeitig anzuerkennende, *simultan* zu adoptirende gekennzeichnet werden.

Sind die Einzelaussagen $A, B, C, \ldots$ mittelst der Konjunktionen

„(Entweder), ... oder, ... oder, ..."

verknüpft zu einem zusammengesetzten sog. *„disjunktiven* Urteile" so werden sie damit als *alternativ* geltende hingestellt. In diesem Falle setze man ihre identische Summe

ϑ) $$A + B \text{ resp. } A + B + C, \text{ etc.}$$

an, wobei, wenn etwa jenes „oder" als das ausschliessende, exklusive gemeint sein sollte [vergl. § 8, η)] diese Ausdrücke durch

ι) $$AB_1 + A_1B, \text{ resp. } AB_1C_1 + A_1BC_1 + A_1B_1C, \text{ etc.}$$

zu ersetzen wären.

Verbindungen von Einzelaussagen $A, B, C\ldots$ mittelst

„Weder ..., noch ..., noch ..."

zu einem sog. *„remotiven* Urteile" sind einfach durch das Produkt ihrer Negationen:

$\varkappa$) $$A_1B_1C_1\ldots$$

darzustellen — sie werden damit in der That als gleichzeitig nichtgeltende erklärt.

[Da $A_1B_1C_1$ die Negation von $A + B + C$ nach Th. 36_+) ist, so erscheint das „remotive" Urteil als die Verneinung des „disjunktiven" — bei dem von uns hier festgehaltenen Sinne des letzteren, wo in

ihm das Bindewort „oder" als das miteinschliessende, inklusive gemäss § 8, ϑ) ausgelegt wird — sonach genauer als verneinte „Alternative".]

Von den Einzelaussagen unsres „Prämissensystems" können endlich irgend welche mittelst der Konjunktionen

„Wenn ..., so ..."

verknüpft erscheinen zu sog. „*hypothetischen* Urteilen" und wird damit die Annahme oder Verwerfung der einen abhängig gemacht von derjenigen der andern.

Sooft solches bei zwei Aussagen A, B zu erblicken ist, so kann das hypothetische Urteil (bekanntlich) nach einem der folgenden (acht) Schemata in eine Relation (und zwar entweder Gleichung oder Ungleichung) des Aussagenkalkuls umgeschrieben werden:

Wenn A gilt, so gilt (stets) B, gibt:

λ) $$A \Subset B \quad \text{oder} \quad AB_1 = 0.$$

Wenn A gilt, so gilt (stets) B nicht, gibt:

μ) $$A \Subset B_1 \quad \text{oder} \quad AB = 0.$$

Wenn A gilt, so gilt manchmal B, gäbe:

ν) $$AB \neq 0.$$

Wenn A gilt, so gilt B manchmal nicht, gäbe:

ξ) $$AB_1 \neq 0.$$

o) Heisst aber der Vordersatz: „Wenn A nicht gilt", so ist in diesen Formeln nur A durch A_1 zu ersetzen.

„A gilt, *ausser* wenn B gilt" gibt z. B. hienach: $B_1 \Subset A$. Etc.

So wenigstens, wenn das Urteil „Wenn A gilt, so gilt B" in dem in § 28 schärfer als im gewöhnlichen Leben präzisirten Sinne genommen wird, wobei auch der Fall, wo A überhaupt nicht gilt, mit seine Berücksichtigung findet.

Soll über letzteren Fall, in welchem A die Nullaussage vorstellt, *nicht* mit ausgesagt werden — wie dies bei den meisten Urteilen im gewöhnlichen Leben vorkommen mag — so schadet es wenigstens nicht, diese Nullaussage in den Bedingungssatz A noch mit einzubeziehen als einen wesentlich irrelevanten, nämlich „nichtssagenden" Fall, in welchem wir nur eben durch die Konsequenz gezwungen sind, das hypothetische Urteil $A \Subset B$ als erfüllt anzuerkennen.

Sollte dieses Urteil auch eine Voraussetzung bilden, an welche der Folgesatz B ausdrücklich nur dann zu knüpfen ist, wenn die Voraussetzung A wirklich zutrifft, so hindert allerdings nichts, dieser Voraussetzung den Faktor $A \neq 0$ beizufügen, also mit $A(A \neq 0) \Subset B$ das hypothetische Urteil zu übersetzen. Bei konstantem Sinn der Aussagen wird jedoch

$$(A \neq 0) = (A = 1) = A$$

nach § 32 ζ) und ε) sein, und sieht man sogleich, dass der Minor der Subsumtion auf $A \cdot A_1 = A$, das Urteil selbst also doch nur auf das frühere $A \Subset B$ hinausläuft.

Anders wenn — ein häufig vorkommender Fall — der Konditionalsatz stillschweigend mit ausdrückt, dass die Voraussetzung A wirklich eintreffe (? z. B. wenn wir sagen: „Wenn der Herbst kommt, etc." — und er kommt ja in der That zuweilen). Hier ist dann $A \neq 0$, beziehungsweise $A = 1$ oder A, als Faktor dem ganzen Urteile ausdrücklich beizufügen, dieses also nicht blos mit $A \Subset B$, sondern mit $(A \neq 0)$ $(AB_1 = 0)$, etc. darzustellen.

Dem hypothetischen Urteile äquivalent zu erachten ist die (grammatikalisch lockrere) Verbindung von Teilsätzen mittelst „Sei (Es möge sein, Gesetzt, dass ..)..., dann ist, soll sein ...". Dieselbe bietet den Vorteil, dass man nicht so sehr, wie bei der vorigen Ausdrucksweise zum Abschluss des Satzes gedrängt wird, dass man vielmehr, wenn etwa die Darlegung des Bedingungs- oder Vordersatzes längere Auseinandersetzungen erfordert, Zwischenbemerkungen nötig macht, dieselben samt dem Nachsatze oder Folgesatze auf mehrere grammatikalisch getrennte, scheinbar unabhängig dastehende Sätze bequemer und in aller Gemütsruhe verteilen kann.

Diese Urteilsform: „Gesetzt, es sei..., dann soll gefunden werden..." und dergleichen ist gerade in der Wissenschaft, bei Angabe der Daten eines Problemes beliebt.

Urteile, die durch die Konjunktion „weil", „denn", etc. oder durch „folglich" („daher", „also", etc.) miteinander verknüpft wären würden eine *Folgerung* darstellen (mit Erwähnung der Konklusion *vor* oder *nach* den — mehr oder weniger vollständig angeführten — Prämissen), und sind wir berechtigt, solche aus unserm „Prämissensysteme" oder „System der Data" *auszuschliessen,* indem es erst der Resolution oder Auflösung des Problemes obliegen wird, die Folgerungen zu ziehen.

Was noch andere Konjunktionen, wie

„zwar, aber, sondern, vielmehr, dennoch, obgleich, trotzdem, nichtsdestoweniger, geradeumsomehr, sogar, ja", etc.

betrifft, so haben dieselben zumeist *keinen logischen,* vielmehr nur einen *psychologischen* Gehalt: sie heben Kontraste hervor, machen auf das Verhältniss der durch sie verknüpften Teilaussagen (welches auch ohne sie besteht) — als ein gegensätzliches z. B. — nebenher aufmerksam; *sie dirigiren die Erwartung* des Hörers oder Lesers, welche durch den Vordersatz (ersten Teilsatz) in einem bestimmten Sinne angeregt wird, dieselbe zügelnd, hemmend, einschränkend, auf eine Enttäuschung vorbereitend, eventuell auch steigernd.

Die logische Tragweite der Gesamtaussage müsste dabei (aber) dieselbe bleiben, wenn die so verknüpften Einzelaussagen auch ohne die genannten Bindewörter mit dürren Worten nebeneinander gestellt würden — sozusagen steif und hölzern, mit Verzicht auf rhetorische Schönheit.

Es ist darum gerechtfertigt, wenn wir solche — man könnte sagen „(blos) rethorische“ — Konjunktionen hier nicht weiter berücksichtigen — unbeschadet dessen, dass ein eingehendes Studium derselben allerdings verdienstlich sein würde. — Des weitern vergleiche man noch § 50 und 54. —

Die vorstehend aufgezählten Urteilsformen der

kategorischen (sei es vereinzelt abgegebenen, sei es zu „kopulativen“ verknüpften) Urteile, der

disjunktiven (und ihrer Verneinung, der „remotiven“) Urteile, endlich der

hypothetischen Urteile —

sind nun die einzigen Urteilsformen der Sprache, welche die alte Logik anerkannte und als solche in Betracht zog.*)

Wird, dass mit ihnen alle Formen erschöpft seien, auch von Neueren bestritten, so können sie doch jedenfalls als *ausreichend* dafür angesehen werden, dass innerhalb ihres Rahmens alle möglichen Data von Problemen ihren Ausdruck zu finden vermögen.

Lassen auch wir sie als die einzigen Urteilsformen gelten, so ist durch das Vorstehende erkannt, dass sich das Prämissensystem eines Problems stets in Form einer einzigen Relation und zwar einer Gleichung oder Ungleichung:

$$\pi) \qquad A\begin{cases} = \dot{1} \\ \neq 0 \end{cases}$$

wird darstellen lassen, wo die linke Seite A, wenn sie nicht selbst eine Funktion des Gebiete- oder Klassenkalkuls im Sinne des § 19, sonach also π) schon eine primäre Aussage ist, immer einen aus andern Aussagen, den *„Teilaussagen“* der Data zusammengesetzten (eventuell sehr komplizirten) *Ausdruck des Aussagenkalkuls* vorstellt.

Wir werden diese Relation kurz *„die vereinigte Aussage“* oder *„Gesamtaussage“* der Data unsres Problemes nennen, und ihre linke Seite A wird als das *„Polynom“* dieser vereinigten Anssage zu bezeichnen sein.

Wäre die als Gesamtaussage π) sich darstellende Proposition keine „Relation“, sondern eine „Formel“, so wäre das Prämissensystem ein „nichtssagendes“; unser Problem würde alsdann jeglicher Data ermangeln, es beruhte auf keinerlei Voraussetzungen (ausser den ohnehin überall als denknotwendig anzuerkennenden), dann käme π) auf die Identität $\dot{1} = \dot{1}$ oder $\neq 0$ zurück.

Als ein Ausdruck des Aussagenkalkuls ist unser Polynom A aufgebaut aus andern und diese vielleicht abermals aus andern etc. Teilaussagen nicht blos vermittelst der drei Operationszeichen, als da sind

*) Die Unterscheidung dieser Formen ist für die rechnende von noch geringerem Belange als für die verbale Logik, da sie in mannigfaltigster Weise aufeinander zurückgeführt werden können. Vergl. den Schluss des § 31, z. B. —

des Negationstriches und der beiden Knüpfungszeichen + und ·, sondern auch unter Beihülfe der beiden Beziehungs- oder „*Vergleichungs*"-zeichen = und $\neq$.

Wir nehmen die Anzahl der hierdurch dargestellten Operationen und ausgeführten Vergleichungen als eine *endliche* an.

In einem gewissen Sinne allerdings kann diese Anzahl auch als eine unbegrenzte gelten oder zugelassen werden, nämlich insofern einzelne Prämissen auch als allgemeingültige, für *jeden* denkbaren Wert gewisser Symbole, x, y, ... zum Beispiel, zu adoptirende hingestellt werden mögen; dies vermögen wir ja durch Voransetzen der Symbole $\prod_x$, $\prod_y$, ... vor dieselben in geschlossener Form auszudrücken, während analog ihr Zutreffen nur für gewisse x, y, .. mittelst $\sum_x$, $\sum_y$, ... bekanntlich darzustellen war. Das Auftreten solcher Symbole mag vorerst noch ausser Betracht bleiben, da wir es dabei wesentlich doch nur mit Produkten und Summen zu thun haben werden, dieser Fall also unter die demnächst ohnehin zu erledigenden Kategorieen fallen wird.

Eine *regellos unbegrenzte* Menge von operativen und vergleichenden Aussagenverknüpfungen als Prämissen eines Problems hinzustellen ist hingegen noch keiner bisherigen Logik beigefallen und dürfte sich auch einer systematischen Behandlung entziehen.

Wenn nun also die im Ausdruck A unsrer Gesamtaussage (sei es als Neganden, Faktoren, Summanden, sei es als „allgemeine Terme" von Produkten Π und Summen Σ, sei es endlich als linke oder rechte Seite von „Vergleichungen" vorkommenden Teilaussagen nur in endlich begrenzter Menge vorhanden sind, so werden wir bei der Inspektion dieses unsres Ausdruckes A als auf dessen Elemente zuletzt auf Aussagen stossen, die entweder schlechtweg durch Buchstaben symbolisirt sind, oder nach ihrem wirklichen Inhalte, als von Gebieten oder Klassen handelnde, „spezifizirt" angegeben sind. Diese nennen wir die „*letzten* Teilaussagen" (ultimate partial statements) oder „*primären* Unteraussagen" unsrer Gesamtaussage.

Dagegen diejenigen (eventuell selbst noch sehr zusammengesetzten) Teilaussagen, aus welchen unser Polynom A lediglich mittelst der Operationen der drei Spezies des identischen Kalkuls aufgebaut ist (also ohne dass solche selbst noch durch Gleichheits- oder Ungleichheitszeichen unter sich *verbunden* erscheinen) mögen die der vereinigten Aussage *zunächst unterstehenden* Teilaussagen genannt werden, oder kürzer: die „*unmittelbaren Unteraussagen*".

Für die Art, wie die Gesamtaussage A aus ihren unmittelbaren Unteraussagen zusammengesetzt sein kann (resp. muss), lässt sich ein *allgemeines Schema* aufstellen.

Nach seiner oben geschilderten Zusammensetzung ist nämlich das Polynom A weiter nichts, als eine *„Funktion“* (im identischen Kalkul, im Sinne des § 19) von diesen unmittelbaren Unteraussagen.

Nach § 13 und § 19 kann diese Funktion immer in ihre *„letzten Aggreganten“* zerlegt werden, d. h. wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit sie in Form eines Aggregates (einer Summe) von Monomen gegeben annehmen.

Die Faktoren dieser Monome sollen ja selbst Aussagen sein, und sind darum in letzter Instanz entweder Gleichungen oder Ungleichungen. In beiden Fällen können wir sie uns rechts auf 0 gebracht denken. Stellen wir dabei diejenigen, welche Gleichungen sind, nebeneinander, und fassen ebenso die Ungleichungen unter ihnen in eine Gruppe zusammen, so erhalten wir:

$$\varrho) \qquad \mathsf{A} = \Sigma\, \Pi(A = 0)\Pi(B \neq 0)$$

als die denkbar allgemeinste Form der Gesamtaussage A.

Nach Th. 24) oder β) des gegenwärtigen Paragraphen lässt aber (in jedem Glied der vorstehenden Summe) das Produkt der Gleichungen

$$\sigma) \qquad \Pi(A = 0) = (\Sigma A = 0)$$

sich immer in eine einzige Gleichung zusammenziehen. Und wenn wir nun, einen Wechsel der Bezeichnung vornehmend, den Ausdruck ΣA kürzer durch das Symbol A selbst vertreten lassen, so ist hiemit erkannt, dass

$$\tau) \qquad \mathsf{A}, = \Sigma(A = 0)\Pi(B \neq 0)\begin{cases} = 1 \\ \neq 0 \end{cases}$$

die allgemeine Form der Gesamtaussage ist.

Schreiben wir das allgemeine Glied rechterhand ausführlicher, indem wir unter Verzicht auf das zusammenfassende Zeichen Π ein wirkliches Produkt von Ungleichungen ansetzen, so ist also unser Ergebniss dieses:

Die Aussage, welche alle Data eines beliebigen Problems zusammenfassend darstellt, sie *zu einer Gesamtaussage in sich vereinigt, kann stets ausgedrückt werden in der Form:*

$$\upsilon) \qquad \Sigma(A = 0)(B \neq 0)(C \neq 0)(D \neq 0)\cdots\begin{cases} = 1 \\ \neq 0 \end{cases}$$

wo die Symbole $A, B, C, D, \ldots$ *sowie deren Anzahl* von Glied zu Glied wechseln mögen.

Es dürfen sogar die Faktoren der einen oder andern Sorte, nämlich die *eine* Gleichung, oder die ganze Gruppe von Ungleichungen in einzelnen Gliedern (der Summen linkerhand) auch ausfallen, fehlen. Doch kann man,

wenn etwa in einem Gliede die Gleichung $(A = 0)$ fehlen sollte, dieselbe dennoch als vorhanden hinstellen, indem es freisteht, und man zu dem Ende nur nötig hat, sich unter A die 0 zu denken, wo dann der Faktor $(A = 0)$ den Wert $\dot{1}$ annimmt, nämlich als die Aussage:

$$(0 = 0), = \dot{1}$$

und als eine stets gültige anzuerkennen ist, weshalb jener Faktor nach Belieben weggelassen oder auch zugefügt werden kann, cf. Th. $\overline{21}_\times$). Ebenso braucht man, wo zu einer Gleichung keine Ungleichungen weiter hinzutreten sollten, sich in unserm Schema blos $B = C = D = \cdots = \dot{1}$ resp. 1 zu denken, wo dann ebenso diese Ungleichungsfaktoren sämtlich den Wert

$$(1 \neq 0) = \dot{1}$$

erhalten werden und ihre Zufügung ohne Einfluss ist. Man kann so auch für die erwähnten beiden Vorkommnisse das Schema unsres allgemeinen Gliedes in v) als das allgemein zutreffende aufrecht erhalten.

Von der Annahme aus, dass für unser Prämissensystem ein verbaler Ausdruck vorliege, dass die Prämissen eines zu lösenden Problems ursprünglich in der Wortsprache niedergelegt gewesen seien, sind wir vorstehend zu der Einsicht in den notwendigen Bau τ) oder v) der vereinigten Aussage dieser Prämissen gelangt. Auf Grund der Ergebnisse des § 36 hätten wir augenscheinlich zu derselben Einsicht auch gelangen müssen, wofern wir etwa die Annahme zum Ausgangspunkte nehmen wollten, dass unsre Prämissen *in der Zeichensprache des Kalkuls* gegeben gewesen wären in Gestalt von irgendwelchen Umfangsbeziehungen und Funktionen von solche statuirenden Aussagen.

Dual entsprechend liesse sich auch beweisen, dass ebensogut der Gesamtaussage auch die Form gegeben werden kann, zunächst nur mittelst Zerlegung in ihre letzten Faktoren:

$$\varphi) \qquad \mathsf{A} = \Pi\{\Sigma(A \neq 0) + \Sigma(B = 0)\}$$

worin jetzt aber den A und B andere Bedeutungen, als wie in ϱ), zukommen möchten, die Zeichen Π und Σ auch neue Erstreckung haben werden. Und dann mittelst der zu σ) analogen Vereinfachung:

$$\chi) \qquad \Sigma(A \neq 0) = (\Sigma A \neq 0),$$

wenn wieder ΣA durch ein einziges Buchstabensymbol vertreten wird:

$$\psi) \qquad \Pi\{(A \neq 0) + \Sigma(B = 0)\}\begin{cases} = \dot{1} \\ \neq 0. \end{cases}$$

Doch wird man praktisch vor der vorstehenden jener ersten Form v) in der Regel den Vorzug geben, weil man nach der aus der Arithmetik überkommenen Gewöhnung bequemer mit Summen von Monomen

(Produkten) als mit Produkten von Polynomen (Summen) rechnet, namentlich auch lieber die Multiplikationsregel für Polynome sowie das (erste) Distributionsgesetz, als wie deren duales Gegenstück anwendet.

Anstatt des Symbols $\dot{1}$ rechterhand in v) und ψ) könnte man, falls es beliebt (und für gewisse Fälle werden wir vielleicht es vorziehen) auch 0 schreiben, desgleichen für die 0 rechts $\dot{1}$, in Anbetracht, dass statt $A = \dot{1}$ auch $A_1 = 0$ als damit gleichbedeutend gesagt werden kann, imgleichen wie auch $(A \neq 0) = (A_1 \neq \dot{1})$ gilt. Der Negation A_1 von A würde sich aber, kraft der Allgemeinheit der vorausgeschickten Erwägungen, ebenfalls die Form der linken Seite von v), oder nach Belieben ψ), erteilen lassen. Auf diese Weise könnte man also hinbringen, dass in unsern Formeln *durchweg nur* 0 als rechte Seite sämtlicher Vergleichungen erschiene, oder auch wenn man will, *durchweg nur* $\dot{1}$.

Die vorstehenden Sätze v) und ψ) hat schon Herr Mitchell[1] gegeben. Beispiele zu denselben werden wir in Bälde bringen.

Die Faktoren $(A = 0)$, $(B \neq 0)$, $(C \neq 0), \ldots$ in v) waren die *unmittelbaren* Unteraussagen der Gesamtaussage A.

Es kann sein, dass sie zugleich deren *letzte* Unteraussagen sind. *Der Fall, wo dies nicht zutrifft, lässt sich* aber *auf den Fall, wo es zutrifft*, wie wir sehen werden, *stets zurückführen, wofern wir nur mit Aussagen von bestimmtem Sinne operiren und diesen konstant festhalten.*

Zunächst beachte man, dass, falls es zutrifft, jene Faktoren *primäre* Urteile sein werden, d. h. Urteile nicht wieder über *Urteile*, sondern solche, welche von den *Dingen* selbst handeln, Urteile über gewisse *Klassen von Dingen*. Es werden dann also die linken Seiten $A, B, C, \ldots$ jener Faktoraussagen nicht wieder Aussagen repräsentiren, sondern *Klassen*symbole sein, oder — können wir im Hinblick auf § 3 auch sagen — *Gebiets*symbole.

Die Gesamtaussage A ist in diesem Falle eine *sekundäre* zu nennen.

Eine weitere Vereinfachung ihrer Form scheint alsdann sich allgemein nicht erzielen zu lassen. Namentlich wird es *nicht* gestattet sein, die Ungleichungen $B \neq 0$, $C \neq 0$, etc. in die Gleichungen $B = 1$, $C = 1$, etc. umzuschreiben, welche (die 1 durch die mit Tupfen $\dot{1}$ ersetzt) mit jenen nur dann sicher äquivalent sein müssten, wenn B, C etc. selbst wieder Aussagen von konstant festzuhaltendem Sinne vorstellten.

Betrachten wir jetzt aber auch den Fall, wo die Gesamtaussage eine höhere als sekundäre ist, und nehmen zunächst einmal an, dass *alle* unsre Symbole $A, B, C, D, \ldots$ selbst wieder *Aussagensymbole* seien.

Sofern wir dann nur mit Aussagen konstanten Sinnes zu thun hatten, d. h. die Data unsres Problems in lauter Aussagen von absolut bestimmtem Sinne eingekleidet wurden und dieser Sinn jeweils unverändert festgehalten wird, können die Sätze des § 32, ζ und η) nunmehr angewendet werden. Weil nach diesen

$$(A = 0) = (A_1 = 1) = A_1, \quad (B \neq 0) = (B = 1) = B, \text{ etc.}$$

ist, wird also der Ausdruck v) sich dann vereinfachen zu

$$\omega) \qquad \Sigma A_1 BCD \cdots \begin{cases} = 1 \\ \neq 0 \end{cases}$$

worin nunmehr linkerhand alle sichtbar gewesenen („expliziten") Vergleichungszeichen verschwunden sind.

Das Urteil hat nunmehr die Form $\mathsf{B} = 1$ (wofür auch $\mathsf{B}_1 = 0$ genommen werden kann) oder $\mathsf{B} \neq 0$ angenommen, wobei die erwähnten Vergleichungszeichen in B nicht mehr vorkommen.

In derselben Weise kann man diese Aussagen-Vergleichungszeichen beseitigen, falls etwa einzelne Faktoren im Polynom von v) schon primäre Urteile sein sollten, nur andere nicht. Man wird in jedem Gliede der Summe die Gruppe der *nicht primären* (also sekundären oder höheren) Faktoren zusammennehmen und aus ihr — nach dem soeben schon an dem Schema der allgemeinsten Aussage dargelegten Vorbilde — alle äussersten Vergleichungszeichen beseitigen können und dann successive auch die inneren, falls noch gewisse Symbole $A, B, \ldots$ abermals Aussagen über Aussagen, somit selbst Gleichungen oder Ungleichungen zwischen Aussagen sein sollten.

Auf diese Weise lassen links in v) *alle auf Aussagen bezüglichen* Vergleichungszeichen (welche also Aussagen $=$ oder $\neq 0$ oder 1, d. h. für gültig oder ungültig erklären) sich unfehlbar beseitigen. Mit andern Worten: *es können successive ... die quartären Aussagen in tertiäre, und diese in sekundäre umgeschrieben werden.*

Der obige Prozess der Ausmerzung der Vergleichungszeichen kann solange fortgesetzt werden, bis man auf solche Zeichen $=$ oder $\neq$ stösst, welche nicht mehr auf Aussagen sondern auf Klassen von Dingen resp. Gebiete sich beziehen, solche der 0 oder 1 vergleichend.

Sobald also A ein *Gebiet* vorstellt (und erst dann) wird der fortschreitenden Vereinfachung unsrer Gesamtaussage mittelst des Schema's

$$(A \neq 0) = (A = 1) = A$$

Einhalt geboten sein, aus dem Grunde, weil eben dieses Schema nur im Aussagenkalkul gilt.

Und die „letzten" Unteraussagen unsres Problems werden in der That als von dieser Beschaffenheit vorauszusetzen sein.

Andernfalles würde das ganze Problem ein „reines" Problem des Aussagenkalkuls zu nennen sein, indem es sich auf lauter nicht spezifizirte Aussagen, Aussagen von unbestimmtem Inhalte oder allgemeine Aussagen A, B, C, … in letzter Instanz bezöge. Wir erhielten dann eine Gesamtaussage $\mathsf{A} = 1$ oder $\mathsf{A}_1 = 0$, in welcher A_1 eine Funktion von jenen Elementaraussagen im identischen Kalkul — ohne Vergleichungszeichen nur mittelst der drei Spezies aufgebaut — vorstellte.

Alle Aufgaben aber, welche sich in Bezug auf eine solche Gleichung erdenken lassen, sind als durch die vorhergegangene schon wesentlich von Boole aufgestellte Theorie (bis etwa § 22 oder 27) bereits gelöst zu betrachten — so namentlich die Entscheidung der Frage, ob die Gleichung analytisch erfüllt, oder aber eine synthetische, eine Relation ist, und im letzteren Falle die Probleme der Elimination von gewissen Symbolen und Berechnung von andern, sogenannte „Auflösung" der Gleichung. Diesen Fall haben wir demnach nicht weiter zu betrachten nötig.

Wir sind freilich bei der vorstehenden mit „Andernfalles" beendigten Enumeration, Aufzählung der denkbaren Fälle scheinbar nicht vollständig gewesen. Aus liessen wir den Fall, wo in unserm Prämissensystem *neben spezifizirten auch unbestimmte* Aussagen vorkämen. Obwol dies logisch denkbar, kann der Fall doch praktisch nicht in Betracht kommen. Abgesehen davon, dass im natürlichen Entwickelungsgange der Wissenschaft dergleichen Probleme sich niemals ungesucht darbieten möchten, wäre der Fall auch jeweils sofort in der Weise zu erledigen, dass man die auf blos unbestimmte Aussagen bezüglichen Aussagenfaktoren daraufhin prüfte, ob sie als analytische Formeln identisch erfüllt sind oder nicht, im ersteren Fall sie dann durch 1, im letzteren durch 0 ersetzte.

Hienach ist erkannt, dass der Fall, wo die vereinigte Aussage v) eine *sekundäre* ist, also in ihr A, B, C, D, … schon Gebietssymbole vorstellen, *das allgemeinste Problem umfasst.* Mit diesem werden wir uns demnach allein noch abzugeben haben.

Die von Herrn Mitchell[1] pag. 95 sq. ausgesprochene Ansicht, dass es in unsrer Disziplin auch „Probleme von drei und mehr *Dimensionen*" gebe, erscheint hiernach nicht haltbar — abgesehen davon, dass auch der Ausdruck „Dimension" hier wol besser durch den „Probleme von der dritten oder einer höheren Ordnung" zu ersetzen wäre.

Das allgemeinste Problem des Schliessens lässt schon in eine sekundäre Gesamtaussage seiner Data sich einkleiden — ist, wenn man will, ein Problem der zweiten Ordnung.

Die vorstehenden Betrachtungen, durch welche nachgewiesen ist, dass unbeschadet der Allgemeinheit des Problems die Faktoraussagen in v) immer als primäre angesehen werden dürfen, besitzen anscheinend eine noch über den identischen Kalkul hinausreichende Allgemeingültigkeit. Ganz in die

genannte Disziplin hinein werden sie erst gebannt durch die oben erwähnte das Problem formell einschränkende Voraussetzung, dass durch die letzten Unteraussagen *nur Umfangsrelationen*, nur Beziehungen zwischen Klassen, konstatirt sein sollten. Diese Voraussetzung hatte zur Folge, dass die Gebietsymbole oder Klassen $A, B, C, D, \ldots$ in v) nur als *Funktionen im Gebietekalkul* zu denken waren, welche aus andern Gebietsymbolen oder Klassen $a, b, c, \ldots x, y, \ldots$ lediglich mittelst der drei Spezies des identischen Kalkuls sich zusammensetzen.

Wogegen ohne die genannte Voraussetzung neben diesen auch andere Knüpfungsarten und Beziehungszeichen (irgendwie z. B. Begriffe verbindend) in ihrem Ausdruck zugelassen sein würden, welche als dem bisherigen Kalkul fremde erst in der „Logik der Beziehungen überhaupt" einzuführen sind oder eingeführt werden.

Da aber, wie schon S. 182 ausgeführt, auch für die Logik der Beziehungen der identische Kalkul wiederum den äussern Rahmen bildet, wie denn unser gesamtes Denken sich auch immer nur in Subsumtionen bewegt (vergl. § 2), so kann jenes Hinausgreifen über das bisherige Gültigkeitsbereich doch nur ein scheinbares sein. Eine andre Frage ist, ob nicht die Hinzuziehung von *Zahl*bestimmungen ein solches wirklich in sich schlösse.

Ehe wir uns dem Probleme weiter zuwenden, wollen wir mit Miss Ladd noch eine Gruppe von speziellen Folgerungen aus den eingangs dieses Paragraphen unter α) und β) zusammengestellten Theoremen hervorheben, und zwar die folgende:

$$\alpha') \left\{ \begin{array}{r|r} (ab = 1) \Subset (a = 1), & (a + b = 0) \Subset (a = 0), \\ (a \neq 1) \Subset (ab \neq 1) & (a \neq 0) \Subset (a + b \neq 0) \\ (a = 1) \Subset (a + b = 1), & (a = 0) \Subset (ab = 0), \\ (a + b \neq 1) \Subset (a \neq 1) & (ab \neq 0) \Subset (a \neq 0), \end{array} \right.$$

— wo die Summen und Produkte von zweien auch über beliebig viele (ausser dem beiderseits vorkommenden a noch ganz beliebig anzunehmende) Terme ausgedehnt werden könnten.

Die vorstehenden Formeln α') ergeben sich in der That aus denen α) gemäss den Theoremen $\overline{6}$).

Beispielsweise haben wir (rechts vom Mittelstriche) nach dem Schema $AB \Subset A$ auch: $(a = 0)(b = 0) \Subset (a = 0)$ und hieraus, in Verbindung mit dem ersten Theorem rechts unter α): $(a = 0)(b = 0) = (a + b = 0)$ folgt gemäss Th. $\overline{3}$): $(a + b = 0) \Subset (a = 0)$, d. i. das erste Theorem rechts in α').

Ebenso ist nach dem Schema $A \Subset A + B$ auch:

$$(a \neq 0) \Subset (a \neq 0) + (b \neq 0),$$

und hieraus in Verbindung mit dem zweiten Theoreme rechts unter α)

folgt gemäss Th. 2): $(a \neq 0) \Subset (a + b \neq 0)$, das ist das zweite Theorem rechts unter α'). Man könnte dieses aber auch durch beiderseitiges Negiren gemäss Th. 37) aus dem ersteren ableiten. Etc.

Die Sätze drücken Thatsachen aus, die uns eigentlich mit den Theoremen 22) und 24) bereits gegeben waren, nämlich: *Verschwindet eine Summe, so muss irgend ein Term derselben ebenfalls verschwinden. Ist ein Term von 0 verschieden, so kann auch die Summe nicht 0 sein. Verschwindet ein Faktor, so auch das Produkt. Und verschwindet ein Produkt nicht, so muss ein beliebiger Faktor auch von 0 verschieden sein, kann nicht verschwinden.*

Worauf wir nun aber besonders hinweisen möchten, ist dieses.

Vier von den Theoremen α') — die vier durch Unterwellen hervorgehobenen — zeigen linkerhand im Minor oder der Voraussetzung der Subsumtion ein Gebietsymbol b, welches rechterhand, im Major oder der behaupteten Folgerung derselben, nicht vorkommt: sie leisten die *Elimination* dieses Symbols b aus jenen Voraussetzungen, lehren, einen von dem Werte des b ganz unabhängigen Schluss aus denselben (in Bezug auf a allein) ziehen. [Ebenso bei der schon angedeuteten Verallgemeinerung des Theorems α') würde die Elimination aller übrigen Terme ausser a durch dasselbe geleistet erscheinen.]

Interessant ist es wiederum, die Art wahrzunehmen auf welche die Elimination hier geleistet wird. Der Anblick der Resultante (rechts in der Subsumtion) gegenübergehalten der gegebenen Relation oder Eliminationsbasis (zur Linken) zeigt, dass die Elimination auf die denkbar einfachste Weise zu vollziehen ist: durch Tilgung des Eliminanden. In Worten: *Soll ein Symbol, welches als Faktor auftritt in einem $= 1$ oder $\neq 0$ gesetzten Produkte, desgleichen eines, welches als Summand steht in einer $\neq 1$ oder aber $= 0$ gesetzten Summe, aus dieser Relation eliminirt werden, so braucht man dasselbe blos darin zu unterdrücken.*

Die vier *nicht* unterwellten von unsern Theoremen α') enthalten im Folgesatz einen Term b (von willkürlich anzunehmendem Werte), der im Bedingungssatz der Subsumtion nicht erwähnt wird; sie lehren, solchen Term *neu einzuführen*, leisten die *„Introduktion“* desselben — das ist das Gegenstück zur Elimination!

Diese beiden Probleme werden nun in Bezug auf b als „Eliminanden“ oder „Introduzenden“ durch die Sätze α') allerdings nur gelöst für Bedingungssätze oder Prämissen von einem gewissen Baue, von sehr speziellem Charakter — eben dem in α') angegebenen, wobei nämlich jenes b nur als Faktor oder Summand eines mit der 0 oder 1 verglichenen Produkts resp. Summenausdrucks auftritt oder auftreten soll.

Man kann aber in Bezug auf ein beliebiges Symbol x oder ein

System von mehreren solchen $x, y, z, \ldots$ die Idee dieser beiden Probleme auch allgemein erfassen, dieselbe für ein ganz beliebiges Prämissensystem konzipiren. Während wir für das Eliminationsproblem dies bereits früher gethan haben, ist die Idee des Introduktionsproblems hier neu aufgetaucht, und müssen wir diesem noch einige Worte widmen.

Gleichwie die *Data* eines gedachten beliebigen Problemes sich mit dem Kapital oder Vorrat an Zeichen, über welche der Kalkul verfügt, stets zu einer Gesamtaussage vereinigt denken und auch wirklich vereinigen liessen, so muss dies auch der Fall sein mit den verlangten *Lösungen* des Problemes, mit dessen „Solution", welche zu bezeichnen ist als eine Konklusion, die sich entreissen lässt den zu Prämissen genommenen Daten. Auch sie wird mittelst der Wortsprache darstellbar sein durch eine Verkettung, ein System von Urteilen. Auch für die Solution gibt es eine *Gesamtaussage.*

Vergleichen wir nun die vereinigte Aussage der Lösung mit derjenigen der Data des Problemes in Hinsicht auf die Buchstabensymbole, die in der einen und in der andern vorkommen, so ist eine Mannigfaltigkeit von Fällen denkbar und können die denkbaren auch wirklich vorkommen:

Die Lösung kann *genau dieselben Symbole* enthalten, wie das Prämissensystem — keine mehr und keine weniger. Wir haben dann weder ein Eliminations- noch ein Introduktionsproblem vor uns, sondern ein *„reines" Problem des Folgerns.* Dasselbe kann noch *umkehrbar* sein oder auch nicht. Im erstern Falle, wo aus dem Lösungensystem auch wieder das System der Data, aus der vereinigten Aussage der Lösung die Gesamtaussage der Daten folgt, mag man es als ein blosses *Transformationsproblem* bezeichnen.

Einfachste Exempel zu diesem und dem andern Falle stellen vor: der Schluss von $a = b$ auf $b = a$, sowie der von $a = b$ auf $a ⋹ b$. Es steht nichts im Wege, dass man, diese Schlüsse oder Folgerungen zu ziehen, als ein Problem hinstelle — das eine als die Aufgabe: wenn $a = b$ ist, die Frage zu beantworten, wem b gleich sein müsse?, das andre als die Aufgabe: unter derselben Voraussetzung eine Subsumtion anzugeben, welche zwischen a und b besteht.

So ist auch noch der Schluss von $a = b$ auf $ab_1 + a_1b = 0$ ein Transformationsproblem zu nennen, sobald man, denselben zu ziehen, formulirt als die Aufgabe: die rechte Seite der gegebenen Gleichung auf 0 zu bringen. Und dergleichen mehr.

Die Lösung kann ferner zu enthalten haben: nur einen Teil der im Prämissensystem auftretenden Symbole und keine demselben fremden

im Ganzen also *weniger* Symbole; dann haben wir ein reines *Eliminationsproblem* vor uns.

Sie kann auch enthalten: die sämtlichen im Prämissensystem vorkommenden Symbole und dazu noch einige *mehr* (welche dann, weil im Prämissensystem unerwähnt gelassen, vollkommen unbestimmt oder willkürlich bleiben werden). In diesem Falle lag ein reines *Introduktionsproblem* vor.

Beispiele wurden unter α') soeben angeführt. Auch diese beiden Probleme können zugleich reine Transformationsprobleme sein, wie z. B. die Gleichung des Th. 40) oder Zusatz in § 29 zeigt, und andere mehr. Liest man diese Gleichung als Subsumtion von links nach rechts, so leistet sie die Elimination des c, liest man sie als Subsumtion von rechts nach links, so introduzirt sie das beliebige c. Und da die durch beide Subsumtionen ausgedrückten Folgerungen umkehrbar sind, trifft das Kennzeichen des Transformationsproblemes zu.

Endlich kann die Solution enthalten: nur einen Teil der im Prämissensystem erscheinenden Symbole, dafür aber auch einige demselben fremde. Alsdann ist das Problem von gemischtem Charakter: ein Eliminationsproblem in Hinsicht auf die fehlenden und ein Introduktionsproblem in Hinsicht auf die überzähligen Symbole.

Als einer der einfachsten Fälle von Elimination und Introduktion stellt sich nach Peirce die Anwendung der Theoreme $6_\times$) resp. 6_+) im Aussagenkalkul dar: $AB \subset\!\!\!= A$ und $A \subset\!\!\!= A + B$, indem diese lehren, dass man bei gültigen Aussagen einen Faktor stets unterdrücken, einen Summanden nach Belieben zufügen, anreihen darf.

Man wird hier die Lösung der Aufgabe wol in zwei Anläufe zerlegen können, indem man durch einen besonderen Prozess die auszumerzenden Symbole eliminirt, durch einen zweiten die neu einzuführenden introduzirt. —

Unter einem der ersten Klasse angehörigen Probleme, bei welchem also der Bestand an Symbolen unverändert zu bleiben hätte, kann man sich, wofern dasselbe nicht als ein völlig unbestimmtes erscheinen soll, nur*) ein Problem vorstellen, bei welchem über die *Form* der

*) Wir dachten uns unser Problem so gefasst, dass aus einer die Data zusammenfassenden Gesamtaussage abzuleiten ist eine von ihr bedingte als die Lösung hinzustellende Gesamtaussage. Probleme, deren Lösung einfach durch die Antwort „Ja", oder „Nein", zu geben ist, würden als bestimmte „Fragen" zu bezeichnen sein, und könnten als Probleme der formalen Logik sich nur darum drehen, ob aus einer gegebenen Aussagengruppe A eine andere gegebene B denknotwendig folgt, oder nicht.

Die Antwort würde hier dadurch herbeizuführen sein, dass man die Subsumtion A $\subset\!\!\!=$ B zwischen den beiden Gesamtaussagen daraufhin untersuchte, ob sie

Lösung (oder der als Konklusion zu deduzirenden Gesamtaussage) bestimmte Vorschriften gegeben sind. In Bezug auf solche Probleme ist einfach zu verweisen auf die Gesetze des identischen Kalkuls (mit Gebieten und spezieller auch mit Aussagen), welche uns ja mit den Bedingungen für die Äquivalenz und Unterordnung von Aussagen schon bekannt gemacht haben und uns die Regeln zur Umformung solcher an die Hand geben. In Bezug auf alle uns erdenklich gewesenen Anforderungen, die man an eine Lösung stellen könnte haben wir ohnehin in dieser Disziplin bereits dargethan, ob und wie dieselben erfüllbar. Allein nur das Auflösungsproblem harrt noch seiner Erledigung auch für die zweite Logikstufe.

Von den beiden übrig bleibenden Problemen, dem Eliminations- und dem Introduktionsprobleme hat das erstere einen völlig bestimmten Charakter.

Das Eliminationsproblem gipfelt in der Forderung: alles Dasjenige, was *ohne Rücksicht auf die Eliminanden* — „unabhängig" von denselben — auf Grund des Prämissensystems ausgesagt werden kann, erschöpfend anzugeben. Eliminationen zu vollziehen erscheint geradezu als das *Hauptproblem* der Lehre vom Schliessen, und zwar liegt dieses im Wesen der Deduktion begründet. Fast immer kommt es ja beim Folgern darauf an, blos einen Teil der in den Daten aufgespeicherten Kenntnisse zu verwerten, dasjenige zu formuliren und schliessend auszusondern, was dieselben in gewissen Hinsichten, was sie abgesehen von gewissen Dingen oder Klassen (oder auch Kenntnissen) über die andern lehren. Mit diesem Problem werden wir uns darum auch vorwiegend zu befassen haben.

Das andere, das Introduktionsproblem dagegen erscheint als ein vagues, unbestimmtes. Es verlangt das „Inseriren" von neuen Termen, fordert die Herstellung einer richtigen Aussage, welche sich zugleich mit über Dinge, Klassen erstrecke, über welche die Prämissen gar keine Information enthalten. Die in Bezug auf solche Dinge von der gesuchten Lösung zu gebende Information kann doch nur eine „nichtssagende", nur eine scheinbare werden. Wir dürfen ja doch nicht hoffen, aus den Dimensionen eines Schiffes z. B., und der Anzahl und Höhe der Maste, das Alter seines Kapitäns berechnen zu lernen!

Die Unbestimmtheit bleibt auch bestehen, wenn man das Introduktionsproblem etwa mit Peirce dahin formulirt: *zu ermitteln, welche*

als eine „analytische" identisch gilt oder nicht, wofür — soweit nur Umfangs- und Aussagenbeziehungen in Betracht kommen — in § 21 und 33 die Methoden bereits auseinandergesetzt sind. Vergl. auch § 46, 1. Studie.

Prämissen eine gegebene Konklusion liefern („which premises *yield* a given conclusion"). Denn solcher Prämissen gibt es sicherlich eine unbegrenzte Fülle.

Unerachtet der zwischen beiden Problemen oben zutage getretenen (von Miss Ladd an's Licht gezogenen) Analogie sind sie also doch für die Wissenschaft von äusserst ungleichem Werte.

Die Unbestimmtheit des Introduktionsproblemes in seiner letzten von Peirce gegebenen Fassung wird erst schwinden, wenn den Prämissen eine bestimmte Form zugemutet, vorgeschrieben wird. Dann aber läuft das Problem auf die Fragestellung hinaus, ob es, falls die Konklusion erfüllt ist, ein gewisses x (eben den Introduzenden) *geben* wird, welcher die fragliche Prämisse erfüllt.

Z. B.: falls $ab = 0$, gibt es dann ein (oder irgendwelche) x derart, dass $ax + bx_1 = 0$ ist, *kann* dann überhaupt diese Gleichung erfüllt sein?

Diese Frage musste aber bei dem Eliminationsprobleme schon ohnehin erledigt werden, als wir darauf ausgingen uns zu vergewissern, ob die Eliminationsresultante für x, welche die Theorie aufstellen lehrt, auch die *vollständige* Resultante gewesen.

Soweit also das Introduktionsproblem wissenschaftlichen Wert haben kann, deckt es sich mit den Untersuchungen über die Vollständigkeit der Eliminationsresultanten und kommt bei dem Eliminationsprobleme schon von selbst zur Erledigung.

§ 41. Das Eliminationsproblem gelöst für ein paar typische Spezialfälle, dann allgemein (aus dem Rohen). Bemerkung, das Auflösungsproblem betreffend.

Vermögen wir nur aus der vereinigten Aussage der Data *irgend ein* Klassensymbol x zu eliminiren, so sind wir auch im stande, aus der Eliminationsresultante ebenso noch ein zweites Symbol y, aus der neuen Resultante noch ein drittes z, und so weiter zu eliminiren. Kurz: wir vermögen dann auch eine *beliebige* Gruppe oder *Menge von Symbolen* $x, y, z, \ldots$ aus jener zu eliminiren.

Es erscheint darum die Elimination eines einzigen Symboles x als dasjenige Problem, mit welchem wir uns vorwiegend zu beschäftigen haben.

Nach den Endergebnissen des vorigen Paragraphen stellt die Relation v):

$$\Sigma (A = 0)(B \neq 0)(C \neq 0)(D \neq 0) \cdots \begin{cases} = \mathrm{i} \\ \neq 0 \end{cases}$$

das Prämissensystem des allgemeinsten Problemes vor, welches im

identischen Kalkul überhaupt in Betracht kommen kann — wofern in ihr $A, B, C, D, \ldots$ als Gebietsymbole und zwar als „Funktionen“ von irgendwelchen andern Gebietsymbolen $a, b, c \cdots, x, y, \cdots$ gegeben gedacht werden.

Diese Funktionen lassen aber nach § 19 — einerlei ob sie x alle wirklich enthalten oder nicht — sich sämtlich nach x linear und homogen „entwickeln“, sodass unsre Gesamtaussage der Daten die Form haben muss:

$$\alpha) \qquad \Sigma(ax + bx_1 = 0)(px + qx_1 \neq 0)(rx + sx_1 \neq 0) \cdots \begin{cases} = 1 \\ \neq 0 \end{cases},$$

wo die Koeffizienten $a, b, p, q, r, s, \cdots$ unabhängig sind von x.

Die uns noch zur Lösung verbleibende Hauptaufgabe besteht nun darin, aus dieser Aussage α) das Symbol x zu eliminiren, d. h. aus ihr eine andere Aussage abzuleiten, welche nicht nur mit Notwendigkeit aus ihr folgt, sondern auch *jede* in α) über die übrigen Symbole $a, b, p, q, r \ldots$ enthaltene Information, jede aus α) zu schöpfende das x unerwähnt lassende Belehrung unter sich begreift, in sich zum Ausdruck bringt. Kurz: es ist die *volle* Resultante der Elimination des x zu finden.

Herr Mitchell betrachtet die Form α) nicht. Er gibt aber einen Teil der nachher an sie von uns zu knüpfenden Folgerungen wenigstens implicite, nämlich eingekleidet in eine ihm eigentümliche Symbolik, deren Verewigung, wenn sie auch mitunter eine kleine Raumersparniss ermöglicht, mir nicht wünschenswert erscheint. Zur eigentlichen Lösung des allgemeinen Problems hat seine Symbolik Herrn Mitchell doch nicht geführt, und selbst wenn sie zu einer auch dazu geeigneten sich ummodeln, modifiziren liesse (was mir nicht der Fall zu sein scheint), müsste ich doch auf die hier zu verwirklichen gesuchte *Befolgung einheitlicher Grundsätze im ganzen Bezeichnungssystem unsrer Disziplin* nach wie vor das grösste Gewicht legen. Ich werde auf das Verhältniss der Mitchell'schen Resultate zu den hier vorzutragenden erst bei der allgemeinen Lösung zurückkommen.

Wir lösen die Aufgabe zunächst für ein paar Spezialfälle.

Aus einer *Gleichung* $ax + bx_1 = 0$ können wir schon längst das Symbol x eliminiren, indem wir nach Th. 50_+) haben:

$$\beta) \qquad (ax + bx_1 = 0) \mathrel{\overset{=}{\in}} (ab = 0);$$

und zwar ist die Aussage rechterhand als die volle Resultante der Elimination des x aus der Gleichung linkerhand nachgewiesen.

Wie nun gestaltet sich die Resultante der Elimination des x für eine *Ungleichung* $px + qx_1 \neq 0$?

Die Antwort auf diese Frage wird durch die Behauptung gegeben, dass

$$p + q \neq 0$$

die Eliminationsresultante sein muss.

Behufs Beweises ist zunächst zu zeigen, dass die letztere in der That aus der Prämisse folgt, d. h. dass wirklich ist:

$$\gamma) \qquad (px + qx_1 \neq 0) \Subset (p + q \neq 0).$$

Diesen Satz erhalten wir aber in der That, wenn wir die — nach der letzten Formel des Tableau's § 40, α') S. 194 gültigen beiden Propositionen:

$$(px \neq 0) \Subset (p \neq 0) \quad \text{und} \quad (qx_1 \neq 0) \Subset (q \neq 0)$$

gemäss Th. $\overline{17}_+$) überschiebend addiren, und das Ergebniss dieser Verknüpfung:

$$(px \neq 0) + (qx_1 \neq 0) \Subset (p \neq 0) + (q \neq 0)$$

in die damit äquivalente Behauptung γ) — gemäss dem Schema $(a \neq 0) + (b \neq 0) = (a + b \neq 0)$ des Tableau's α) zu Anfang des § 40 — umschreiben.

Es ist nun ferner auch die Vollständigkeit der gefundenen Resultante $B = (p + q \neq 0)$ darzuthun. Zu dem Ende ist zu zeigen, dass wenn diese Resultante B erfüllt ist, es immer ein die Prämisse

$$A = (px + qx_1 \neq 0)$$

erfüllendes x geben wird.

Dies lässt sich auf zwei Arten verwirklichen.

Da $(p + q \neq 0) = (p \neq 0) + (q \neq 0)$ ist, so wird, wenn B erfüllt ist, entweder $p \neq 0$ sein — in diesem Falle genügt die Annahme $x = p$ — oder es wird $q \neq 0$ sein — alsdann genügt es $x_1 = q$, somit $x = q_1$ anzunehmen — um hinzubringen, dass die Relation A sich denknotwendig erfülle.

Noch kürzer ist es, mit einem Schlage zu bemerken, dass unter der Voraussetzung B in Gestalt von

$$x = p + q_1, \quad \text{wofür} \quad x_1 = p_1 q,$$

auf alle Fälle ein Gebiet x angebbar ist, welches die Relation A erfüllt, indem dann eben $px + qx_1 = p + q$ selbst wird, mithin $\neq 0$ ist.

Es sei an dem vorstehenden Beispiel nochmals zum Bewusstsein gebracht, was wir in § 21 bereits allgemein darlegten: was denn durch solche Vollständigkeit der Resultante garantirt wird?

Nachdem soeben gezeigt ist, dass es unter der Annahme B immer ein die Relation A erfüllendes x gibt, während $A \Subset B$ war, ist klar, dass ausser B keine weitere (unabhängige) Relation zwischen p und q (oder auch nur Bedingung für eines dieser beiden Gebiete) mehr aus A folgen

kann. Denn folgte noch aus A eine solche Relation C, die möglicherweise auch *nicht* erfüllt sein könnte, während doch B erfüllt ist, so gäbe es unter jener Voraussetzung B doch schon ein A erfüllendes x; d. h. verständen wir ebendieses unter dem Buchstaben x, so wäre A erfüllt, woraus dann B *nebst* C als erfüllt folgen würde, entgegen der Unterstellung, dass B *ohne* C erfüllbar sei. Wir kämen damit zu dem Widerspruch, das gedachte C zugleich als erfüllt und nicht erfüllt annehmen zu müssen; folglich kann es ein solches C nicht geben, und unsre Resultante B muss schon *jede* aus A fliessende Information über p und q enthalten, muss eben die *volle* Resultante sein.

Streng genommen wird bei den obigen Schlüssen der Satz angewendet, dass wenn $a = b$ und $b \neq 0$ ist, dann auch $a \neq 0$ sein muss, wonach es also *auch in einer Ungleichung gestattet ist, Gleiches für identisch Gleiches zu substituiren;* in Formeln:

$$\delta) \qquad (a = b)(a \neq 0) \Subset (b \neq 0).$$

Der Beweis ist leicht zu führen durch folgende Überlegung. Wegen $1 = (b = 0) + (b \neq 0)$ ist nach Th. $\overline{21}_\times$), $27_\times$), 21_+) und $\bar{6}_\times$):

$$(a = b)(a \neq 0) = (a = b)(a \neq 0)(b = 0) + (a = b)(a \neq 0)(b \neq 0) =$$
$$= \quad 0 \quad + \quad \text{„} \quad \Subset (b \neq 0),$$

indem $\qquad (a = b)(b = 0)(a \neq 0) \Subset (a = 0)(a \neq 0) = 0$

nach Th. 4), $\overline{15}_\times$), $\overline{30}_\times$) und $\bar{5}_\times$) ist.

Als einen ferneren kleinen Hülfssatz möchte ich hier noch das folgende Theorem einschalten, welchem ebenfalls die „weitere Geltung“ zukommt:

$$\varepsilon) \qquad (a \Subset b)(a \neq 0) \Subset (b \neq 0).$$

Dasselbe stellt fest, *dass ein Gebiet, welchem ein von* 0 *verschiedenes eingeordnet ist,* das also ein nicht verschwindendes Gebiet in sich enthält, *auch von* 0 *verschieden sein muss*, unmöglich selbst verschwinden kann.

Um den Satz zu beweisen, brauchen wir blos zu bedenken, dass nach Th. 38) nebst $21_\times$), 30_+) und $27_\times$) sodann nach 21_+) und $\bar{6}_\times$) endlich dem oben citirten Satze § 40, α') ist:

$$(a \Subset b)(a \neq 0) = (ab_1 = 0)(ab + ab_1 \neq 0) = (ab_1 = 0)(ab \neq 0) \Subset$$

$\Subset (ab \neq 0) \Subset (b \neq 0)$; indem wieder $a \neq 0$ in $(ab \neq 0) + (ab_1 \neq 0)$ zerfällt; oder auch: nachdem δ) bereits bewiesen, ist es gestattet, in $ab + ab_1 \neq 0$ die linke Seite durch das ihr gleiche $ab + 0 = ab$ zu ersetzen. —

Man kann übrigens auch den Beweis des Satzes analog wie bei δ) von diesem unabhängig führen:

$$(a \Subset b)(a \neq 0) = (a \Subset b)(b = 0)(a \neq 0) + (a \Subset b)(b \neq 0)(a \neq 0) =$$
$$\Subset \quad (a = 0)(a \neq 0) + \quad \text{"} \quad =$$
$$= \quad 0 \quad + \quad \text{"} \quad =$$
$$= \quad \text{"} \quad \Subset (b \neq 0).$$

Darnach aber könnte man auch den Beweis von δ) mittelst

$$(a = b) = (a \Subset b)(b \Subset a) \Subset (a \Subset b),$$

also $$(a = b)(a \neq 0) \Subset (a \Subset b)(a \neq 0) \Subset (b \neq 0)$$

auf den von ε) zurückführen.

Nachdem wir unter β) nnd γ) aus einer Gleichung, sowie aus einer Ungleichung ein Gebiet x eliminiren gelernt haben, können wir den Ergebnissen der Untersuchung noch eine etwas grössere Tragweite beilegen. In der gleichen Weise wird dies auch am Schlnsse jeder noch weiterhin gelösten Eliminationsaufgabe dann ausgeführt zu denken sein.

Bezeichnen wir die linke Seite unsres Ergebnisses β) oder γ) mit A, die rechte Seite desselben mit B, sodass

$$A \Subset B$$

dies Ergebniss darstellt, so können wir nun sagen: *Sooft*

ζ) $$A \begin{cases} = 1 \\ \neq 0 \end{cases} \textit{ ist, muss auch bezüglich sein } B \begin{cases} = 1 \\ \neq 0 \end{cases}.$$

Für den Fall der oberen Beziehung, der Gleichheit mit 1, ergibt sich dies in Anbetracht, dass der Satz:

$$(A \Subset B)(A = 1) \Subset (B = 1)$$

nur als eine umständlichere Fassung des Th. $\bar{5}_+$) erscheint, die sich mittelst Th. 3) aus demselben ergibt, indem darnach sein muss:

$$(1 = A)(A \Subset B) \Subset (1 \Subset B) = (1 = B).$$

Für den Fall der unteren Beziehung, Ungleichheit mit 0, ergibt es sich anf Grund des Hülfssatzes ε), indem wir diesen für A, B statt a, b in Anspruch nehmen.

Bei konstantem Sinn der Aussagen A und B ist nun allerdings die untere Beziehung nach § 32, ζ) äquivalent der oberen, sodass die eine der soeben ausgeführten beiden Überlegungen überflüssig erscheint, die zweite durch die erste entbehrlich gemacht wird.

Allein die Betrachtung thut zugleich dar, dass man von der Auflage, unter A und B Aussagen von *festem* Sinne zu denken, sich *hier* wenigstens auch befreien könnte, dass unter A und B in unsern Ergebnissen sogar Aussagen von mit der Zeit veränderlichem *„fliessendem"* Sinne (in der in

§ 28 dargelegten Weise) verstanden werden dürften. Auch dann noch würde ζ) zu der daselbst links angegebenen Prämisse rechts wiederum die Eliminationsresultante zur Konklusion geben; oder: *Auch wenn die Prämisse A nur manchmal gilt, muss die Resultante B auch manchmal gelten* — allermindestens nämlich eben dann, wann A zutrifft.

Nehmen wir jetzt auch in Angriff die Aufgabe. Aus zwei oder mehr simultanen Ungleichungen:

$$(px + qx_1 \neq 0)\,(rx + sx_1 \neq 0) \cdots$$

ein Gebietsymbol x zu eliminiren.

Auflösung. Multiplizirt man die nach dem vorigen Untersuchungsergebnisse γ) geltenden Subsumtionen:

$$(px + qx_1 \neq 0) \Subset (p + q \neq 0), \quad (rx + sx_1 \neq 0) \Subset (r + s \neq 0), \ldots$$

nach Th. $\overline{17}_\times$) überschiebend miteinander, so erhält man den Satz:

$$\eta) \quad (px + qx_1 \neq 0)\,(rx + sx_1 \neq 0) \cdots \Subset (p + q \neq 0)\,(r + s \neq 0) \cdots$$

und erkennt man hieraus — wenn man will, auch unter Inanspruchnahme der soeben unter ζ) ausgeführten Überlegung, für A und B gedeutet als linke und rechte Seite von η) — dass in diesem Satze die Aussage rechterhand *eine richtige Resultante* der Elimination des x aus der linkseitigen Annahme vorstellen muss.

Diese Resultante ist auffallenderweise dieselbe, als ob wir ein System voneinander unabhängig beliebiger Klassen x, y, ... aus den Prämissen

$$(px + qx_1 \neq 0)\,(ry + sy_1 \neq 0) \ldots$$

zu eliminiren gehabt hätten. Und dieser Umstand wird von vornherein die Vollständigkeit der in η) gegebenen Eliminationsresultante fraglich, ja unwahrscheinlich erscheinen lassen. Es muss ja doch etwas zu bedeuten haben, dass es das nämliche Gebiet x ist, welches zugleich mit der ersten auch die noch folgenden Ungleichungen simultan erfüllt!

Die Frage nach dieser Vollständigkeit der angeführten Resultante ist in der That hier, ganz strenge genommen, nicht zu bejahen, überhaupt aber im obigen Probleme entfernt nicht so einfach zu beantworten, wie in den vorhergehenden Fällen. Ich habe diese Frage bei dem allgemeinsten Eliminationsprobleme ohnehin eingehend zu besprechen, und will dieselbe bis dahin zurückstellen.

Von den drei bis jetzt behandelten Spezialproblemen, deren Lösungen durch β), γ) und η) gegeben werden, begreift unser drittes η) das

zweite γ) als besondern Fall unter sich, und brauchen wir deshalb blos von den beiden β) und η) noch weiter zu sprechen.

Wie schon in § 21 — Bd. 1, S. 456 — gezeigt, lässt sich durch eine leichte Umschreibung dem erstern durch β) gelösten Probleme eine solche Gestalt geben, dass für beide Probleme die Elimination ganz in der gleichen Weise vollziehbar, das Eliminationsverfahren für sie ein einheitliches wird.

Dies wird nämlich dadurch erreicht, dass man die Gleichung, aus welcher x zu eliminiren war (und darnach ebenso die Resultante der Elimination), anstatt auf 0, rechts stets auf 1 gebracht ansetzt. Alsdann ist bekanntlich das Untersuchungsergebniss β) zu ersetzen durch:

$$\vartheta) \qquad (ax + bx_1 = 1) \Subset (a + b = 1)$$

und lehrt der Anblick von ϑ) sowol als von η) folgendes: *Man kann die Elimination des x aus den Prämissen links einfach dadurch vollziehen, dass man den Eliminanden x und seine Negation x_1 ohne weiteres unterdrückt*, diese beiden Symbole sozusagen aus den Prämissen *ausradirt* („erase").

Jedoch mit einem Vorbehalte; man merke etwa: *Nur darf hiebei kein Summenglied zerstört werden*, („provided no aggregant term is destroyed"). Weil nämlich x und x_1 nur *als Faktoren* wegfallen, und deren Koeffizienten stehn zu bleiben haben, so sind die letztern, wo sie etwa, weil $= 1$, unerwähnt geblieben, ausdrücklich anzufügen, bevor man an das Radiren gebt. M. a. W.: Ähnlich, wie in der Arithmetik beim „Heben", „Streichen" von Nennerfaktoren in einem Bruche gegen ihnen gleiche des Zählers bekanntlich im letzteren die 1 als übrig bleibender Faktor angesetzt werden muss, sobald alle Zählerfaktoren sich wegheben, so muss natürlich auch hier der möglicherweise nicht angeschrieben gewesene Faktor 1 als Koeffizient hinzugedacht und wirklich angesetzt werden, wenn bei der Ausradirung des x (oder x_1) kein Faktor mehr stehen bleiben würde. So ist z. B. nur:

$$(x + qx_1 \neq 0) \Subset (1 + q \neq 0) = (1 \neq 0) = \dot{1};$$

die Elimination des x gibt also hier eine nichtssagende Resultante, nicht aber dürfte $(q \neq 0)$ als Resultante hingestellt werden; und analog wird sein:

$$(px + x_1 \neq 0) = (px + 1 \cdot x_1 \neq 0) \Subset (p + 1 \neq 0) = (1 \neq 0) = \dot{1}$$

wobei abermals die Resultante von selbst erfüllt, keine Relation mehr ist. Desgl.

$$(x + b_1x_1 = 1) \Subset (1 = 1) = \dot{1}, \quad (a_1x + x_1 = 1) \Subset (1 = 1) = \dot{1}.$$

Als ein letztes Spezialproblem behandle ich die fundamentale

Aufgabe. *Aus einer simultan mit einer Gleichung geltenden Ungleichung:*

$$(ax + bx_1 = 0)\,(px + qx_1 \neq 0)$$

das Gebietsymbol x zu eliminiren.

Auflösung. Die volle Resultante lautet:

$$(ab = 0)\,(pa_1 + qb_1 \neq 0)$$

und gilt sonach auch der Satz:

$$\iota)\qquad (ax + bx_1 = 0)\,(px + qx_1 \neq 0) \subseteq (ab = 0)\,(pa_1 + qb_1 \neq 0).$$

Beweis. Derselbe besteht aus zwei Teilen. Der erste hat die Richtigkeit von ι), der zweite die Vollständigkeit der Resultante darzuthun.

Erster Teil. Gilt die Prämisse, so gilt nach Th. $6_\times$) des Aussagenkalkuls auch $ax + bx_1 = 0$, welches nach Th. 24) in

$$(ax = 0)\,(bx_1 = 0)$$

zerfällt; es gelten also auch — abermals kraft Th. $\overline{6}_\times$) — diese beiden Faktorenaussagen für sich. Dieselben können aber nach Th. $38_\times$) in Subsumtionen umgeschrieben werden, d. h. es gelten, wegen:

$$(ax = 0) = (x \subseteq a_1), \qquad\qquad (bx_1 = 0) = (x_1 \subseteq b_1)$$

die beiden Subsumtionen rechterhand. Aus diesen folgt aber durch beiderseitiges Multipliziren nach Th. $15_\times$):

$$px \subseteq pa_1, \qquad\qquad qx_1 \subseteq qb_1$$

und hieraus durch überschiebendes Addiren gemäss Th. 17_+):

$$px + qx_1 \subseteq pa_1 + qb_1.$$

Wenn in dieser Subsumtion die linke Seite $\neq 0$ ist (und sie soll es ja laut Voraussetzung sein), so muss auch nach dem Hülfstheorem ε) die rechte Seite $\neq 0$ sein, d. h. wir haben:

$$\varkappa)\qquad (px + qx_1 \neq 0) \subseteq (pa_1 + qb_1 \neq 0).$$

Und überschiebendes Multipliziren dieser Subsumtion mit der ohnehin schon geltenden β) liefert uns das Theorem ι), welches zu beweisen gewesen.

Man übersieht hier leicht, wie wir den ganzen Beweis auch ohne jeden verbalen Text blos in Formeln des Aussagenkalkuls hätten führen können.

Zweiter Teil. Dass die angeführte Resultante auch das *volle* Ergebniss der Elimination des x sein muss, geht daraus hervor, dass wenn sie erfüllt ist, wenn also $ab = 0$ und $pa_1 + qb_1 \neq 0$ ist, sich immer in Gestalt von

$$\lambda)\qquad x = b + a_1pq_1, \qquad\qquad x_1 = b_1(a + p_1 + q)$$

ein x angeben lässt, welches die Prämisse erfüllt, wie man dies leicht nachrechnet. Hiefür wird nämlich $ax + bx_1 = ab$ also in der That $= 0$ und

$$px+qx_1=p(a_1q_1+b)+qb_1=^{*)}pa_1+qb_1+pab=pa_1+qb_1+0=pa_1+qb_1$$

also in der That $\neq 0$.

Noch allgemeiner könnte man auch:

$$\mu) \qquad x = b + a_1pq_1 + a_1(pq + p_1q_1)u$$

nehmen, wo u beliebig.

Ich will dies auch heuristisch noch begründen. Um es zu finden stellte ich mir die Aufgabe, während $ab = 0$ angenommen wird, ein solches x zu ermitteln, dass zugleich $ax + bx_1 = 0$ und

$$pa_1 + qb_1 \subseteq px + qx_1$$

ist, sodass, wenn etwa die linke Seite dieser Subsumtion $\neq 0$ ist, es um so mehr auch die rechte sein muss. Nach Th. $38_\times$) ist aber letztere Subsumtion einerlei mit der Gleichung:

$$(pa_1 + qb_1)(p_1x + q_1x_1) = 0 \quad \text{oder} \quad b_1p_1qx + a_1pq_1x_1 = 0$$

und somit ist die vereinigte Gleichung der beiden zu erfüllenden:

$$(a + b_1p_1q)\,x + (b + a_1pq_1)\,x_1 = 0\,.$$

Es folgt nach den Methoden des § 21 eliminando nur die laut Voraussetzung ohnehin erfüllte Relation $ab = 0$, und endlich solvendo der angegebene allgemeine Ausdruck μ) für x, welcher für $u = 0$ in den zuerst angeführten λ) übergeht, für $u = 1$ aber uns $x = b + a_1(p + q_1)$ als einen andern geeigneten Wert für x von bemerkenswerter Einfachheit des Ausdrucks liefern würde.

Anmerkung zu ι).

Analog wie γ) ist auch leicht der noch etwas allgemeinere Satz zu beweisen:

$$\nu) \qquad (px + qy \neq 0) \subseteq (p + q \neq 0),$$

indem dies in der That durch überschiebendes Addiren aus den nach § 40, α') S. 194 geltenden Subsumtionen:

$$(px \neq 0) \subseteq (p \neq 0), \qquad\qquad (qy \neq 0) \subseteq (q \neq 0)$$

gemäss § 40, α) S. 179 erhalten wird.

Der Satz lässt sich in derselben Weise, wie für binomische, so auch für beliebig vielgliedrige polynomische Summen unmittelbar beweisen, des-

*) Die Zwischenrechnnng kann so geführt werden:

$$= p\,(a_1b_1q_1 + b) + qb_1 = pb + qb_1 + pa_1b_1q_1 + pa_1b_1q = p\,(a_1b_1 + b) + qb_1 =$$
$$= p\,(a_1 + b) + qb_1 = p(a_1 + ab) + qb_1 = \text{etc.}$$

gleichen auch mittelbar, successive, von jenen auf diese ausdehnen. Es gilt z. B. auch:

$$\text{ξ)} \qquad (px + qy + rz \neq 0) \in (p + q + r \neq 0)$$

Etc. und können wir sagen: *Wenn eine lineare* (und zunächst homogene) *Funktion beliebig vieler Variabeln ungleich* 0 *ist, so muss auch die Summe ihrer Koeffizienten ungleich* 0 *sein.*

Gilt der Satz aber für eine *homogene* lineare Funktion bei einer bestimmten Anzahl von Gliedern oder Variabeln, so muss er auch für die allgemeine, *nicht homogene*, lineare Funktion von ebensoviel Gliedern (mithin von einer Variabeln weniger) gelten, indem man, um ihn für diese zu erhalten, nur die letzte von den erwähnten Variabeln gleich 1 zu denken braucht. So erhalten wir z. B. aus dem letzten Satze für drei Variabeln durch die Annahme $z = 1$ auch den Satz:

$$\text{o)} \qquad (px + qy + r \neq 0) \in (p + q + r \neq 0),$$

durch welchen für die allgemeine lineare Funktion von zwei Variabeln das Theorem dargestellt wird.

Die Formeln ν), ξ), o) geben rechterhand die volle Resultante der Elimination von x, y und eventuell z aus der Proposition linkerhand an, wie man durch die Annahmen $x = p$, $y = q$ und ev. $z = r$ mit Leichtigkeit beweist. Und ähnlich für noch mehr Summanden. Auch hier entsteht die Resultante durch Tilgung der Eliminanden. —

Nach ν) haben wir nun insbesondere:

$$\pi) \qquad (pa_1 + qb_1 \neq 0) \in (p + q \neq 0).$$

Multiplizirt man dies „*beiderseits*“ (nicht „überschiebend“!) mit $(ab = 0)$, so folgt aus dem Ergebnisse:

$$(ab = 0)\,(pa_1 + qb_1 \neq 0) \in (ab = 0)\,(p + q \neq 0)$$

in Verbindung mit ι) a fortiori auch:

$$(ax + bx_1 = 0)\,(px + qx_1 \neq 0) \in (ab = 0)\,(p + q \neq 0),$$

oder:

$$\varrho) \quad (a_1x + b_1x_1 = 1)\,(px + qx_1 \neq 0) \in (a_1 + b_1 = 1)\,(p + q \neq 0).$$

Auch bei diesem Problem erhält man also, wofern man nur eine bestimmte Form des Ansatzes — nämlich die linkerhand in ϱ) — wählt, als richtige Folgerung *eine Resultante* der Elimination, indem man die Eliminanden x, x_1 aus der Prämisse herausradirt.

Diese Resultante wird aber im allgemeinen durchaus *nicht* die *volle* Resultante sein; vielmehr wird dieselbe entschieden weniger aussagen, als wirklich in Bezug auf a, b, p, q aus der Prämisse gefolgert werden kann.

Es ist nämlich leicht zu sehen, dass die Subsumtion π) nicht umkehr-

bar ist. Zu dem Ende braucht man z. B. nur a_1 mit p und b_1 mit q disjunkt zu denken, so wird der Major der Subsumtion π), das ist $p + q \neq 0$ erfüllt sein können, während der Minor derselben: $0 + 0 \neq 0$ dies nicht ist.

Die Subsumtion π) wird also zumeist als eine wirkliche Unterordnung gelten; es wird die in ϱ) gegebene Resultante wirklich weniger sagen, als die in ι), und unser erstes Ergebniss ist weitergehend, ist das umfassendere. D. h. die eigentliche Lösung der Eliminationsaufgabe liefert jene allerdings wunderbar einfache Radirmethode des Eliminirens schon bei dem vorliegenden Spezialproblem nicht mehr!

Wir können nunmehr ohne weiteres zur Lösung des allgemeinen zu Anfang dieses Paragraphen charakterisirten Eliminationsproblemes übergehen.

Die Resultante der Elimination des x aus der vereinigten Aussage α) ist:

$$\sigma)\qquad \Sigma(ab = 0)(pa_1 + qb_1 \neq 0)(ra_1 + sb_1 \neq 0)\cdots \begin{cases} = 1 \\ \neq 0 \end{cases}$$

und dies beruht auf dem Satze*):

$$\tau)\qquad \begin{cases} \Sigma(ax + bx_1 = 0)(px + qx_1 \neq 0)(rx + sx_1 \neq 0)\cdots \Subset \\ \Subset \Sigma(ab = 0)(pa_1 + qb_1 \neq 0)(ra_1 + sb_1 \neq 0)\cdots, \end{cases}$$

in welchem die Glieder und deren Faktoren in den beiderseitigen Summen einander genau entsprechen.

Der Satz wird leicht erhalten, indem man zunächst nach Th. $\overline{17}_\times$), überschiebend multiplizirt die folgenden kraft des Theorems ι) geltenden Subsumtionen:

$$(ax + bx_1 = 0)(px + qx_1 \neq 0) \Subset (ab = 0)(pa_1 + qb_1 \neq 0),$$
$$(ax + bx_1 = 0)(rx + sx_1 \neq 0) \Subset (ab = 0)(ra_1 + sb_1 \neq 0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

wobei man links wie rechts den wiederholt auftretenden ersten Faktor dem Tautologiegesetze $\overline{14}_\times$) entsprechend nur *ein*mal schreiben wird.

Das Ergebniss:

$$\upsilon)\qquad \begin{matrix} (ax + bx_1 = 0)(px + qx_1 \neq 0)(rx + sx_1 \neq 0)\cdots \Subset \\ \Subset (ab = 0)(pa_1 + qb_1 \neq 0)(ra_1 + sb_1 \neq 0)\cdots \end{matrix}$$

---

*) Ich habe denselben in der mathematischen Sektion der deutschen Naturforscherversammlung in Strassburg i. E. 1885 mitgeteilt[6] — zuvor auch schon in dem von Clebsch gegründeten Karlsruher Mathematischen Kränzchen.

Einen merkwürdigen Beweis für diesen ohne die Herleitung publizirt gewesenen Satz hat Herr Voigt[1] gegeben, der, wenn er auch dem meinigen an Einfachheit nachsteht, doch durch die ausserordentliche Verschiedenheit und Originalität des Gedankengangs beachtenswert ist.

drückt als ein allgemeiner Satz aus, dass *irgend ein* Glied der Summe links in τ) eingeordnet ist dem entsprechenden Gliede rechts, dieses involvirt.

Denkt man sich solches nun für *jedes* Glied jener Summe hingeschrieben, so braucht man blos die Subsumtionen der entstehenden Reihe nach Th. 17_+) überschiebend zu addiren, und wird das Theorem τ) — noch ohne die Summenzeichen, ausführlichst, angeschrieben — gewinnen. Der Prozess läuft aber darauf hinaus, die vorstehende Subsumtion „beiderseits" zu „summiren", d. h. der linken und rechten Seite derselben das Summenzeichen voranzuschreiben.

Herrn Peirce's Schüler O. H. Mitchell gibt als Resultante der Elimination des x aus α) — wie gesagt in seine ihm eigentümliche Symbolik verhüllt — blos die Folgerung:

$$\Sigma(a_1 + b_1 = 1)(p + q \neq 0)(r + s \neq 0)\cdots \begin{cases} = 1 \\ \neq 0 \end{cases}$$

welche, wie wir unter ι) bis ϱ) ausgeführt haben, nur einen Teil von dem darstellt, was wirklich gefolgert werden kann. Er wirft die Frage nach der Vollständigkeit der Eliminationsergebnisse (gleichwie auch die übrigen Schriftsteller über rechnende Logik) überhaupt nicht auf, lässt diese ununtersucht und haftet an der Regel des Eliminirens mittelst Tilgung der Eliminanden, die — für die einfachsten Fälle schon von Miss Ladd bemerkt — von ihm auch auf die andern Probleme mit ausgedehnt wird.

Dass diese Methode zwar zu richtigen Schlüssen führt, aber im allgemeinen *zu wenig sagende*, nicht weit genug gehende Ergebnisse liefern muss, haben wir bereits dargethan.

Leicht sieht man, dass unsre Lösung auf Grund des Satzes τ) auch die früheren β) und η) — sowie ι) — mit unter sich begreift. Lässt man die Ungleichungen fort und beschränkt die Summe auf ein einziges Glied, so hat man das alte (schon von Boole gegebene) Theorem β) wieder. Und η) ergibt sich durch die Annahme $a = b = 0$, wofür dann $a_1 = b_1 = 1$ wird, also unser Ausdruck $pa_1 + qb_1$ in $p + q$, etc. übergeht.

Die Frage aber, ob nun auch die angegebene notwendig geltende und unbedingt richtige Resultante σ) das *volle* Ergebniss der Elimination des x aus der vereinigten Aussage α) der Data unsres allgemeinsten Problemes darstelle, ist strenge genommen *zu verneinen*. Es wird uns diese Frage noch zu schwierigen aber instruktiven Untersuchungen veranlassen, bei denen ein näheres Eingehen auf den *Begriff des „Individuums"* nötig wird, für die eine exakte Definition dieses Begriffes voranzuschicken ist.

Ich will diese Untersuchungen lieber auf einen späteren Zeitpunkt

verschieben, um zunächst erst einmal von den bisherigen Ergebnissen einige Anwendungen zu bringen.

Durch die gedachten Untersuchungen wird sich herausstellen, dass unsrer obigen Resultante σ), damit sie vollständig werde, noch eine gewisse weitere Forderung hinzugefügt werden muss, die ich die „*Klausel*" nennen will. Deren Ausdruck K in Form einer Aussage wird also, da sie simultan mit unsrer bisherigen Resultante erfüllt sein muss, der letzteren noch als ein Faktor beizuschreiben sein.

Der Inhalt der Klausel K erweist sich als von einer eigentümlichen Natur: dieselbe drückt die *Forderung* aus, *dass gewisse Arten oder Gruppen, von speziellen Individuenverteilungen unter die Klassen* $a, b, p, q, r, s \ldots$ *auszuschliessen sind.* Wenn bestimmte Individuen die erwähnten Klassen gerade auf eine solche Art zusammensetzen, welche von der Klausel für unzulässig erklärt werden muss, so erscheint dies gegenüber der unendlichen Mannigfaltigkeit der denkbaren Möglichkeiten, auf welche jene Klassen überhaupt aus Individuen zusammengesetzt sein können, gewissermassen als ein grosser *Zufall.*

Bis auf den Ausschluss gewisser von ihr unberücksichtigt gelassenen „Zufälligkeiten" — werden wir also sagen können — ist unsre Resultante σ) wirklich die vollständige; sie löst das Eliminationsproblem wenigstens im allgemeinen, genauer gesagt „*aus dem Rohen*", und gibt das Gros, die Hauptmasse von dem an, was in Bezug auf die Parameter der Data gefolgert werden kann. —

Ist in der Prämisse oder vereinigten Aussage der Daten α) die Summe auf ein einziges Glied beschränkt, so wird auch die Konklusion oder Resultante nur aus *einem* Gliede bestehen und unsre allgemeinste Formel τ) wird in v) als in einen speziellen Fall ihrerselbst übergehen: *die Gesamtresultante ist somit die Summe der Einzelresultanten, welche sich durch die Elimination des Eliminanden aus den einzelnen Gliedern der* [in der Form α) dargestellten] *Prämissenaussage ergeben.*

Man braucht sich also beim Eliminationsgeschäfte immer nur mit einem einzigen Gliede dieser Prämissenaussage abzugeben und um deren übrige Glieder gar nicht dabei zu bekümmern — sonach blos das einfachere Schema v) statt des komplizirteren τ) in's Auge fassend.

Dies ist auch a priori einleuchtend, in Anbetracht, dass die Summe der Prämissenglieder auf eine Alternative zwischen diesen verschiedenen Annahmen hinausläuft, die, ob sie zwar einander nicht notwendig ausschliessen, doch je für sich adoptirt werden können — das Zutreffen oder Nichtzutreffen der übrigen dabei offen gelassen.

Der gleiche Sachverhalt muss sich darum auch forterhalten, wenn

wir etwa später anstatt der nach dem Schema φ), τ) gebildeten vielmehr die durch Zuzug der „Klausel" vervollständigten Resultanten in's Auge fassen werden.

Die Glieder der resultirenden und die der Prämissenaussage entsprechen nach dem Gesagten einander gegenseitig eindeutig und sollen die zugeordneten *„korrespondirende"* Glieder heissen. Jedes Glied der Konklusion ist die Resultante (der Elimination von x aus) zu seinem korrespondirenden Glied der Prämissenaussage.

In einem solchen Glied der Resultante, mithin bei dem Major von v), möge derjenige Faktor — hier $(ab = 0)$ — welcher eine Gleichung ist, der „Boole'sche Faktor" genannt werden (und analog auch bei der Prämissenaussage). Derselbe kann natürlich auch, anstatt mechanisch nach dem gegebenen Schema, gewünschtenfalles unter Anwendung irgend welcher andern Methoden — wie solche in der 14ten Vorlesung auseinandergesetzt — sowie der raffinirtesten zur Vereinfachung der Arbeit ersinnbaren Kunstgriffe hergestellt werden.

Anscheinend verdient es im allgemeinen den Vorzug, den Boole-schen Faktor schon in den Prämissen rechts auf 1 — statt wie oben auf 0 — gebracht anzusetzen, für $ax + bx_1 = 0$, also $a_1x + b_1x_1 = 1$ zu nehmen, aus dem Grunde, weil man alsdann die Faktoren a_1, b_1 mit welchen die p, q, r, s, ... bei der Elimination des x zu multipliziren sein werden, schon als Koeffizienten vorgebildet findet, mithin sie nicht erst negando auszurechnen braucht.

Ersetzen wir die Bezeichnungen a_1, b_1 hernach durch die a, b, so erhält unser Theorem in der That die folgende eleganteste und zuweilen auch bequemst anzuwendende Gestalt:

$$\varphi)\qquad \begin{aligned} &\Sigma(ax + bx_1 = 1)\,(px + qx_1 \neq 0)\,(rx + sx_1 \neq 0)\cdots \subseteq \\ &\subseteq \Sigma(a + b = 1)\,(pa + qb \neq 0)\,(ra + sb \neq 0)\cdots \end{aligned}$$

worin es auch erlaubt, sich die Summen eingliedrig zu denken, mithin die Summenzeichen wegzulassen.

Beim Operiren nach diesem Schema wird man jedoch behufs Herstellung der „vereinigten" Boole'schen Gleichungen, anstatt des bisher gewohnten Theorems 24_+), das Th. $24_\times$) nämlich $(a = 1)(b = 1) = (ab = 1)$ zum Vorbild nehmen, d. h. man wird die Polynome der zu vereinigenden Gleichungen jeweils miteinander *multipliziren* müssen, wo wir bisher summirten. Und da das Multipliziren nun, mit den oft noch unentwickelten Aggregaten, welche als Polynome der Boole'schen Faktoren auftreten, so sehr viel unbequemer auszuführen ist, als wie das Addiren derselben, und diesem Unterschied gegenüber die Arbeit des Ne-

girens der Koeffizienten oft kaum in Betracht kommt, m. a. W. da die *Vorarbeiten* des Eliminationsgeschäftes viel mehr in's Gewicht zu fallen pflegen als dieses selber, so muss ich ungeachtet der hervorgehobenen theoretischen Vorzüge der Formel φ) vor dem Schema τ) in der Praxis doch häufig vorziehn mich des letztern zu bedienen. —

Was noch das Eliminationsproblem bei *mehreren* Eliminanden x, y, z, ... betrifft, so kann man sich überzeugen, dass unsre Resultante aus dem Rohen die nämliche wird, wenn man erst x, dann y, wie wenn man umgekehrt erst y, dann x aus der vereinigten Aussage der Data eliminirt. Letztere, nach x und y entwickelt, hat die Form:

χ) $$\Sigma(A_{x,y} = 1)\Pi(B_{x,y} \neq 0),$$

wo
$$A_{x,y} = axy + bxy_1 + cx_1y + dx_1y_1$$
und
$$B_{x,y} = pxy + qxy_1 + rx_1y + sx_1y_1$$

bedeuten wird, und in den folgenden Faktoraussagen des Produktes Π (die bei jedem einzelnen Gliede der Summe Σ in unabhängig beliebiger Anzahl gegeben sein mögen) nur die Koeffizienten p, q, r, s andere und andere Werte haben mögen, deshalb auch mit Accenten (oder zweiten oberen Indices) behaftet zu denken sind (gleichwie in den verschiedenen Gliedern der irgendwievielgliedrigen Summe Σ die sämtlichen Koeffizienten a, b bis s durch erste obere Indices unterscheidbar gemacht sein sollten).

Wollen wir x eliminiren, so sind nach x zu ordnen die
$$A_{x,y} = (ay + by_1)x + (cy + dy_1)x_1$$
und die
$$B_{x,y} = (py + qy_1)x + (ry + sy_1)x_1.$$

Die Resultante lautet nach der Regel φ):
$$\Sigma(A_y = 1)\Pi(B_y \neq 0),$$
wo
$$A_y = (ay + by_1) + (cy + dy_1) = (a + c)y + (b + d)y_1,$$
$$B_y = (py + qy_1)(ay + by_1) + (ry + sy_1)(cy + dy_1) = (pa + rc)y + (qb + sd)y_1$$
bedeuten muss.

Hieraus nach derselben Regel nun auch y eliminirt gibt die Resultante:

ψ) $$\Sigma(A = 1)\Pi(B \neq 0),$$

wo

$$A = (a + c) + (b + d) = a + b + c + d,$$

und

$$B = (pa + rc)(a + c) + (qb + sd)(b + d) = pa + qb + rc + sd$$

ist.

Wollen wir dagegen erst y eliminiren, so sind auch nach y zu ordnen:

$$A_{x,y} = (ax + cx_1)\,y + (bx + dx_1)\,y_1,$$

$$B_{x,y} = (px + rx_1)\,y + (qx + sx_1)\,y_1$$

und ergibt sich als Resultante:

$$\Sigma(A_x = 1)\,\Pi(B_x \neq 0),$$

wo

$$A_x = (ax + cx_1) + (bx + dx_1) = (a + b)\,x + (c + d)\,x_1,$$

$$B_x = (px + rx_1)(ax + cx_1) + (qx + sx_1)(bx + dx_1) = (pa + qb)\,x + (rc + sd)\,x_1$$

bedeutet. Wird hieraus nun x regelrecht eliminirt, so ergibt sich dieselbe Resultante ψ) wie vorhin, nur dass die A und B zuerst in den Formen erscheinen:

$$A = (a + b) + (c + d), \quad B = (pa + qb)(a + b) + (rc + sd)(c + d)$$

was aber reduzirt auf das Obige hinausläuft.

Wir wollen ψ) die rohe Resultante der simultanen Elimination von x und y aus der Prämisse χ) nennen.

Weiter folgt dann, dass simultane Elimination des Paares x, y von Symbolen und darauf folgende von z dasselbe Ergebniss liefern muss, wie Einzelelimination von x und darauf folgende Simultanelimination des Paares y, z, und zwar weil beide Prozesse auf die successive Elimination von x, dann y, dann z hinauskommen müssen. Man sieht hienach:

Auch die rohe Elimination ist bei beliebig vielen Eliminanden eine kommutative und assoziative Operation.

Den gleichen Nachweis auch für die volle Elimination zu leisten, ist ein noch offenes Problem, weil wir die vollen Resultanten noch nicht anzugeben vermögen. Vorher schon gelänge er wol a priori.

Das bei ψ) ersichtliche Bildungsgesetz für die rohe Resultante der simultanen Elimination ist von zweien leicht auf beliebig viele Eliminanden in gleicher Weise auszudehnen, und lässt sich, *nachdem die Aussagenfaktoren der Data nach dem System der Eliminanden „entwickelt" sind,* diese rohe Resultante der simultanen Ausmerzung des ganzen Eliminandensystems augenblicklich hinschreiben, ohne dass man nötig hätte zum Verfahren des successiven Eliminirens erst seine Zuflucht zu nehmen. Die Regel dazu lautet:

*Behufs Herstellung der Resultante unterdrücke man erstens in den Boole'schen Faktor*aussagen, welche rechts auf 1 gebrachte *Gleichungen* sind, *die sämtlichen Konstituenten* (nachdem diejenigen Koeffizienten, welche etwa gleich 1 waren, ausdrücklich als solche angeschrieben worden), *und zweitens ersetze man in den*jenigen *Faktor*aussagen, welche rechts auf 0 gebrachte *Ungleichungen* sind, *jeden Konstituenten durch denjenigen Koeffizienten, welchen das mit dem vorliegenden gleichnamige Glied der zugehörigen Boole'schen Faktoraussage besass.*

Die also gewonnene *rohe* Resultante ist wieder eine berechtigte Konklusion aus der Prämissenaussage; sie muss sicher gelten, wenn für irgendwelche Wertsysteme — auch nur für ein gewisses Wertsystem — der Eliminanden die Prämissen Gültigkeit haben. Dagegen gewährt ihr Erfülltsein noch nicht die Garantie, dass es unter allen (sonst dabei noch zulässigen) Umständen auch ein Wertsystem der Eliminanden geben müsse, welches die Prämissen wahr macht. —

Wir konnten in der Entwickelung unsrer Disziplin des identischen Kalkuls zwei Etappen unterscheiden. Auf der ersten Etappe mit § 27 angelangt, ist sie nur erst im stande solche Probleme zu lösen, in deren Daten und Solutionen lediglich *universale* Urteile in Betracht kommen. Bis dahin operirt die Disziplin immer nur mit Subsumtions- und *Gleichheits*zeichen, und das allgemeinste bei dieser Einschränkung erdenkliche Problem löst unsre Theorie vermittelst des Theoremes 49_+) oder 50_+), welches als das Haupttheorem der ersten Etappe zu bezeichnen ist — im Wesentlichen schon von Boole gegeben.

Um auch die Behandlung von Problemen in ihr Bereich zu ziehen, sich zugänglich zu machen, bei denen *partikulare* Urteile mit in Betracht kommen, und sich damit zur zweiten Etappe zu erheben, war die Disziplin genötigt, den früheren Beziehungszeichen noch das *Ungleichheits*zeichen (oder auch das verneinte Subsumtionszeichen) zuzugesellen. Als das Haupttheorem auf dieser Etappe erscheint uns dann die Folgerung von σ) aus α), oder das Theorem τ) resp. φ).

Freilich löst dasselbe nur mehr die eine von den beiden auf der vorigen Etappe durch Th. 49_+) resp. 50_+) gelösten Aufgaben; es leistet nur die Elimination des x aus α) — lässt dagegen die Frage nach der „Berechnung" des x oder die Aufgabe, „die Aussage α) nach der Unbekannten x *aufzulösen*" beiseite. Unter solcher „Auflösung" würde strictissime zu verstehen sein: die Angabe aller derjenigen Gebiete oder Klassen x (ausgedrückt in Form einer Gleichung die links x *iso-*

lirt, rechts x gar nicht enthält durch die „Parameter“ $a, b, p, q, r, s, \ldots$) welche für x in die Aussage α) eingesetzt, dieselbe erfüllen, sie zu einer wahren oder richtigen Aussage machen — und zwar bei beliebig gegebenen Parameterwerten, wofern dieselben nur die *volle* Resultante der Elimination des x in gleicher Weise bewahrheiten oder erfüllen. Das Erfülltsein ebendieser Resultante ist ja, wie leicht zu sehen, die unerlässliche aber auch hinreichende Bedingung für die Auflösbarkeit von diesem Prämissensysteme α) — vergl. § 21.

Ich enthalte mich, dieses Auflösungsproblem hier zu behandeln — nicht nur, weil mir dasselbe mehr nur theoretisches als praktisches Interesse zu besitzen scheint, sondern auch wegen der sich als sehr beträchtlich anlassenden Schwierigkeiten desselben. Jedenfalls wollte ich aber nicht unterlassen, arbeitsmutige Forscher hier auf dasselbe aufmerksam zu machen. Vergl. hiezu noch § 49.

An die Lösung könnte erst gegangen werden, nachdem unsre „Resultante aus dem Rohen“ durch gründliche Ermittelung der „Klausel“ zur vollen ergänzt worden.

Zwanzigste Vorlesung.

Untersuchen wir mit dem erworbenen Erkenntnisskapital nun vor allem die sogenannten *„Syllogismen“*. Man unterscheidet deren *„einfache“*, in welche nur zwei Prämissen (und drei Terme oder Glieder) eingehen und *„zusammengesetzte“*, bei denen die Zahl der Prämissen (und Terme) eine grössere sein wird.

Der Sorites, Kettenschluss, ist ein schon bekanntes Beispiel eines zusammengesetzten Syllogismus.

Nur die ersteren, die einfachen Syllogismen, verlohnt es, mit einer gewissen Vollständigkeit durchzugehen.

Ferner unterscheidet man *„kategorische“* Syllogismen und *„hypothetische“*. Bei erstern sind die vorkommenden Terme: Klassen (oder Begriffe) und die sie betreffenden Schlussglieder (Prämissen sowie Konklusion) demgemäss kategorische Urteile. Bei letzteren sind die Schlussglieder hypothetische Urteile, die Terme nämlich Aussagen.

Prinzip II des Klassenkalkuls ist der schon bekannte erste Hauptfall Barbara des kategorischen Syllogismus — vergl. § 4.

Dasselbe Prinzip II, im Aussagenkalkul gedeutet — vergl. § 32 — illustrirt den hypothetischen Syllogismus Barbara.

So gehen überhaupt aus den kategorischen die gleichnamigen hypothetischen Syllogismen hervor durch eine blosse Umdeutung, indem man nämlich die Klassenterme der erstern nun als Aussagen interpretirt. Mit der Theorie von jenen wird darum zugleich auch die von diesen wesentlich erledigt, und wird es genügen, am Schlusse nur einen Seitenblick auf sie zu werfen.

Aus diesen Gründen haben wir uns zunächst nur mit den *„einfachen kategorischen“* Syllogismen zu beschäftigen.

§ 42. Die Syllogismen der Alten. Traditionelle Übersicht derselben.

Gemeinsamer Charakter der einfachen (kategorischen) Syllogismen ist der: dass sie Schlüsse sind, die lehren, aus *zwei* Aussagen (kategorischen Urteilen), in welche irgendwie quantifizirt als Subjekt, oder

irgendwie qualifizirt als Prädikat *drei* Begriffe eingehen, deren einer — der sogenannte *Mittelbegriff* — demnach doppelt vorkommt, eine dritte Aussage zu folgern, welche diesen Mittelbegriff nicht mehr enthält, mit andern Worten: den Mittelbegriff zu *eliminiren.*

Die zwei Prämissen enthalten je ein Subjekt und ein Prädikat. Sollen daher im Ganzen nur drei Begriffe in sie eingehen, so muss in der That von diesen einer in jeder von den beiden Prämissen vorkommen. Diesen „Mittelbegriff" — seinem Umfange nach betrachtet, m. a. W. die demselben zugeordnete Klasse — nennen wir M, desgleichen S den sogenannten „*Unterbegriff*", d. i. denjenigen, welcher als Subjekt, und P den „*Oberbegriff*", d. i. denjenigen, welcher als Prädikat in die Konklusion eingeht, wobei wir, wie üblich, absehen von der allfälligen Quantifikation (durch Verbindung mit „alle" oder „einige", eventuell „kein"), sowie von allenfallsiger Qualifikation (mittelst vorgesetzter Verneinungspartikel „nicht"), durch welche in den drei als Prämissen und Konklusion in Betracht kommenden Urteilen diese Begriffe modifizirt erscheinen können.

Die eine der beiden Prämissen enthält neben M das Subjekt S der Konklusion und wird der *Untersatz* (die Assumtion, propositio minor) des Syllogismus genannt. Die andre, neben M das Prädikat P der Konklusion enthaltende Prämisse heisst der *Obersatz* (propositio major) desselben — ganz so, wie dies für den ersten Syllogismus „Barbara" bereits in § 4 dargelegt wurde.

Je nach der Art, wie die drei Begriffe S, M, P in den Prämissen als Subjekte oder Prädikate verteilt sind, werden die gültigen, *resp. von der Schullogik für gültig erklärten* Syllogismen in verschiedene „*Figuren*" (σχήματα bei Aristoteles) eingeteilt. Man wird bald erkennen, dass solcher Figuren *viere* denkbar sind, und dass alle denkbaren Figuren auch wirklich gültige Syllogismen unter sich begreifen.

Jenachdem ferner die einen oder andern von den drei beim Syllogismus in Betracht kommenden Sätzen („Schlussgliedern": Untersatz, Obersatz und Schlusssatz) als universale oder partikulare, bejahende oder verneinende Urteile sich darstellen, haben wir noch verschiedene „*Modi*" (bei Aristoteles τρόποι) von Syllogismen zu unterscheiden.

Die drei ersten Figuren mit ihren modi hat im wesentlichen Aristoteles gegeben. Die modi der vierten Figur wurden von seinen Schülern Theophrastos und Eudemos hinzugefügt und später von Galenos zu einer eigenen (der vierten) Figur zusammengefasst. Vergl. Ueberweg[1] p. 282..292.

Der Modi sind mehrere bei jeder von den vier Figuren — im Ganzen 19 — wozu aber noch 5 (durch „Subalternation") „*abge-*

schwächte" Formen kommen, während auch bei einem von den 19 Hauptmodi (dem „Bamalip") die Konklusion schon eine abgeschwächte ist, nämlich *nach der Meinung der Alten* nur einen Teil von dem aussagt, was geschlossen werden konnte.

Die Scholastik gab den Modi dreisilbige Namen, deren Vokale als *a*, *e*, *i*, *o* im Sinne des § 34 zu erkennen geben, zu welcher Art von Urteilen der Untersatz, der Obersatz und der Schlusssatz gehören.

Auch die Konsonanten sind nicht ganz willkürlich, indessen auch nicht konsequent gewählt, weshalb es nicht verlohnt, ihre Wahl hier zu motiviren, auch zahlreiche Verbesserungsvorschläge und Abweichungen vorkommen — vergl. z. B. den wenigstens konsequenten, dafür aber etwas eintönig ausgefallenen Vorschlag von Miss Ladd[1] p. 40. Im übrigen sind die scholastischen Benennungen nach unserm heutigen Empfinden als äusserst geschmacklos gewählte zu bezeichnen. Dieselben sind nach Ueberweg[1] p. 344 besonders durch Petrus Hispanus (gestorben 1277 als Pabst Johann XXI) in dessen „Summulae logicales" in allgemeine Aufnahme gekommen.

Sie werden in den „versus memoriales" aufgezählt:

Bārbără Cēlārēnt prīmāe*), Dărïī, Fĕrĭōquĕ.
Cēsărĕ, Cāmēstrēs, Fēstīnŏ, Bărōcŏ sĕcūndāe.
Tērtĭă**) grāndĕ sŏnāns rĕcĭtāt: Dārāptī, Fĕlāptōn,
Dīsāmīs, Dătīsī, Bōcārdŏ, Fĕrīsōn. Quārtāe
Sūnt Bămălīp, Călĕmēs, Dĭmătīs, Fĕsăpō, Frēsīsōn.

oder in etwas anderer Version (De Morgan[2] p. 131):

Barbara, Celarent, Darii, Ferioque prioris.
Cesare, Camestres, Festino, Baroko, secundae.
Tertia Darapti, Disamis, Datisi, Felapton,
Bokardo, Ferison habet. Quarta insuper addit
Bramantip, Camenes, Dimaris, Fesapo, Fresison.

— in Analogie zu welchen in der um 1250 verfassten Ἐπιτομή des Nikephoros Blemmides sich die Worte finden:

I. *γράμματα ἔγραψε γραφίδι τεχνικός.*
IV. *γράμμασιν ἔταξε Χάρισι πάρθενος ἱερόν.*
II. *ἔγραψε· κάτεχε μέτριον ἄχολον*
III. *ἅπασι σθεναρός, ἰσάκις ἀσπίδι ὁμαλός, φέριστος.*

— wobei die zweite Zeile die (früher der ersten Figur zugezählten) Modi der vierten Figur mit umgestellten Vordersätzen enthält und der Schrift wahrscheinlich erst später zugefügt wurde.

Die als „abgeschwächte" noch hinzutretenden Formen des Syllogismus hat (Basel 1560) Joh. Hospinianus, nach ihm auch Leibniz aufgestellt. (l. c.)

---

*) Scilicet: sunt modi figurae.
**) sc. figura.

Nach Lambert wird die *erste* Figur (wie schon teilweise erwähnt) auch genannt:

das „dictum de omni et de nullo“,
die *zweite* Figur das „dictum de diverso“,
„ *dritte* „ „ „ „ exemplo“,
„ *vierte* „ „ „ „ reciproco“ —

und begnügen wir uns, dies blos anzuführen, ohne auf die Motivirung der Benennungen einzugehen.

Vom Standpunkte unsrer Theorie müssen wir nun aber eine Anzahl von diesen Modi für *inkorrekt* erklären, darunter namentlich auch sämtliche „abgeschwächten“ Formen, überhaupt nämlich *alle* diejenigen *Schlüsse, vermittelst welcher aus lauter universalen Prämissen ein partikulares Urteil gefolgert wird.* Diese werden uns, genauer betrachtet, als *Enthymeme* erscheinen, die eine wesentliche Prämisse mit Stillschweigen übergehen — sobald diese aber ausdrücklich formulirt und den übrigen Prämissen ergänzend zugefügt wird, dann offenbar auf *drei* Prämissen beruhen und damit aufhören werden, „einfache“ Syllogismen, ja „Syllogismen“ überhaupt zu sein.

Wir werden dieses eingehend darzulegen haben. Um jedoch die unter die genannte Rubrik fallenden Formen angeblicher Syllogismen der traditionellen Liste von vornherein als solche charakterisiren zu können, sei uns gestattet, solches in kürzester Weise vermittelst des Zusatzes „*falsch*“ zu thun.

Ich gebe nun vor allem das Wesen der $19 + 5 = 24$ Modi oder traditionellen Formen der gemeinhin als gültig anerkannten Syllogismen samt dem Schema der zugehörigen Figuren möglichst übersichtlich an, wobei ich in den Schlüssen selbst die drei Termini S, M, P als Klassensymbole mit a, b, c zu bezeichnen vorziehe.

Die Übersichtlichkeit wird erhöht, wenn wir uns zur Darstellung der Schlüsse einer Formelsprache bedienen.

Ich wähle dazu zum Teil die legitime Formelsprache unsres Gebietekalkuls, insofern ich ein Subjekt „alle a“ einfach durch den Namen der Klasse, das Symbol a selbst, ein Prädikat „nicht-b“ mittelst Negationsstrichs durch $b_{,}$ darstelle ...

Weil aber bei den partikularen Urteilen die legitime Darstellung sich schon allzuweit von dem sprachlichen Ausdruck entfernt — vergl. § 33 — greife ich zum andern Teil für den Augenblick auch noch zu einer sonst in unserm Kalkul nicht zulässigen — wenn man will „illegitimen“ — hier nur einmal konventionell ad hoc zu adoptirenden Ausdrucksweise, indem ich „einige a“, „einige b“ durch a' resp. b' darstelle.

Wir wissen bereits aus § 2 und 4, dass diese Schreibweise sich allgemein nicht empfehlen kann, weil solches $a' =$ „einige a" in getrennten Aussagen ganz Verschiedenes bedeuten kann und es oberster Grundsatz aller Rechnungsmethoden ist, Verschiedenes, wo es in *einer* Rechnung zusammentrifft, auch durch die Bezeichnung zu unterscheiden — ein Grundsatz, durch dessen Befolgung wir uns erst die Berechtigung erkaufen, die Bedeutung der Zeichen beim Rechnen aus den Augen verlieren zu dürfen und mechanisch zu operiren nach den Gesetzen des Kalkuls, welche erst dann uns niemals in Fehler zu führen vermögen. Bei den vorliegenden Anwendungsbeispielen wird allerdings in je *einem* einzelnen Modus des Schliessens dem a' resp. b' auch durchweg dieselbe Bedeutung gewissermassen zufällig zukommen. Es musste aber überhaupt bei partikularen Urteilen zu andern Darstellungsmitteln Zuflucht genommen werden — § 33.

Die Kopula „sind" (oder „ist") stelle ich *durchweg* durch das Subsumtionszeichen $\Subset$ dar, was bei den universalen Urteilen die legitime Darstellung ist, bei den partikularen aber (wie oben angedeutet) eigentlich nicht angeht (nämlich insofern ausgeschlossen erscheint, als hier die Bezeichnung des partikularen Subjekts mittelst Accentes ein unzulänglicher Notbehelf bleibt).

Um unsre Syllogismen in Worte zu kleiden, übersetze man also:

$$\alpha)\begin{cases} a \Subset b & \text{mit: Alle } a \text{ sind } b \\ a' \Subset b & \text{„ Einige } a \text{ sind } b \\ a \Subset b_1 & \text{„ Alle } a \text{ sind nicht-}b\text{, oder: Kein } a \text{ ist } b \\ a' \Subset b_1 & \text{„ Einige } a \text{ sind nicht-}b. \end{cases}$$

Darnach wird denn der Leser leicht aus der nachstehenden Tafel die Syllogismen, auch in Worte gefasst, ablesen — wofern wir nur noch die Bemerkung hinzufügen, dass das Punktedreieck $\therefore$ mit „also" zu übersetzen ist, mithin die Konklusion einleiten soll. Dieses in mathematischen Schul- und Fachschriften englischer Sprache fast allgemein üblichen Schlüssels:

$\therefore$ für „folglich", ergo, therefore

— im Gegensatz zu welchem bekanntlich auch

$\because$ für „weil", quoniam, because.

gebraucht wird (resp. für „denn", nam, resp. enim, for) — bediene ich mich hier aus zwei Gründen.

Einmal, *um* behufs Vermehrung der Übersicht noch *die Klammern zu sparen*. Korrekt müsste ja z. B. der Syllogismus Barbara dargestellt werden durch:

$$(a \Subset b)(b \Subset c) \Subset (a \Subset c)$$

wofür wir jetzt zu schreiben vorziehen:

$$a \neq\!\!\in b, \quad b \neq\!\!\in c \quad .\cdot. \quad a \neq\!\!\in c$$

— womit ersichtlich wird, dass jener Schlüssel .·. im Grunde nur *das Subsumtionszeichen* $\neq\!\!\in$ *des Aussagenkalkuls* vertritt.

Sodann aber gebe ich diesem Schlüssel .·. auch darum vor $\neq\!\!\in$ den Vorzug, weil ich sonst — was mir widerstrebt — genötigt wäre, eine Reihe von geradezu *falschen* Subsumtionen des Aussagenkalkuls in unsrer Tafel aufzuführen, die man als „*enthymematische*“ mit .·. oder „folglich“ eingeleitete Schlüsse doch immerhin wird gelten lassen können; in einem verbalen Schlusse wird man das Verschweigen einer Prämisse noch unbeanstandet passiren lassen können; in einer Formel aber einen wesentlichen Faktor der einen Seite fortzulassen, bleibt unstatthaft. — Gemäss Th. $\overline{6})$: $AB \neq\!\!\in A \neq\!\!\in A + C$ darf man zwar in einer gültigen Aussage einen *beliebigen* Aussagen*faktor* (B) *weglassen*, und einen beliebigen *Summanden* (C) *zufügen* (S. 197). Gilt aber $AB \neq\!\!\in D$, so wird nicht schon $A \neq\!\!\in D$ zu gelten brauchen. —

Von den „abgeschwächten“ Formen, welche sich nur durch die Konklusion von den ungeschwächten Modi unterscheiden, fügen wir nur letztere und den Namen bei.

Wir haben darnach die

β) Übersicht der traditionellen Syllogismen.

Erste Figur. Schema: $\begin{array}{|c|}SM\\MP\\SP\end{array}$ propositio minor / „ major / conclusio.

Barbara. $a \neq\!\!\in b,\ b \neq\!\!\in c\ .\cdot.\ a \neq\!\!\in c.$ [Barbari .·. $a' \neq\!\!\in c$ falsch.]

Celarent. $a \neq\!\!\in b,\ b \neq\!\!\in c_1\ .\cdot.\ a \neq\!\!\in c_1.$ [Celaront .·. $a' \neq\!\!\in c_1$ falsch.]

Darii. $a' \neq\!\!\in b,\ b \neq\!\!\in c\ .\cdot.\ a' \neq\!\!\in c.$

Ferio. $a' \neq\!\!\in b,\ b \neq\!\!\in c_1\ .\cdot.\ a' \neq\!\!\in c_1.$

Zweite Figur. Schema: $\begin{array}{|c|}SM\\PM\\SP\end{array}$

Cesare. $a \neq\!\!\in b,\ c \neq\!\!\in b_1\ .\cdot.\ a \neq\!\!\in c_1.$ [Cesaro .·. $a' \neq\!\!\in c_1$ falsch.]

Camestres. $a \neq\!\!\in b_1,\ c \neq\!\!\in b\ .\cdot.\ a \neq\!\!\in c_1.$ [Camestros .·. $a' \neq\!\!\in c_1$ falsch.]

Festino. $a' \neq\!\!\in b,\ c \neq\!\!\in b_1\ .\cdot.\ a' \neq\!\!\in c_1.$

Baroco. $a' \neq\!\!\in b_1,\ c \neq\!\!\in b\ .\cdot.\ a' \neq\!\!\in c_1.$

Dritte Figur. Schema: $\begin{array}{l} MS \\ MP \\ SP \end{array}$

Darapti. $b \isinE a$, $b \isinE c$ $\therefore$ $a' \isinE c$ *falsch.*

Felapton. $b \isinE a$, $b \isinE c_1$ $\therefore$ $a' \isinE c_1$ *falsch.*

Disamis. $b \isinE a$, $b' \isinE c$ $\therefore$ $a' \isinE c$.

Datisi. $b' \isinE a$, $b \isinE c$ $\therefore$ $a' \isinE c$.

Bocardo. $b \isinE a$, $b' \isinE c_1$ $\therefore$ $a' \isinE c_1$.

Ferison. $b' \isinE a$, $b \isinE c_1$ $\therefore$ $a' \isinE c_1$.

Vierte Figur. Schema: $\begin{array}{l} MS \\ PM \\ SP \end{array}$

Bamalip. $b \isinE a$, $c \isinE b$ $\therefore$ $a' \isinE c$ *falsch.*

Calemes. $b \isinE a_1$, $c \isinE b$ $\therefore$ $a \isinE c_1$. [Calemos $\therefore$ $a' \isinE c_1$ falsch.]

Dimatis. $b \isinE a$, $c' \isinE b$ $\therefore$ $a' \isinE c$.

Fesapo. $b \isinE a$, $c \isinE b_1$ $\therefore$ $a' \isinE c_1$ *falsch.*

Fresison. $b' \isinE a$, $c \isinE b_1$ $\therefore$ $a' \isinE c_1$.

Vorstehende 19 Formen des Syllogismus gehen nun durch blosse Buchstabenvertauschung vielfach in einander über.

Setzt man c_1 für c, so geht hervor

Celarent aus Barbara
Ferio „ Darii
falsch Felapton „ falsch Darapti
Bocardo „ Disamis
Ferison „ Datisi,

desgleichen umgekehrt, wenn c für c_1 gesetzt wird.

Vertauschung von b und b_1 erzeugt:

Camestres aus Cesare
Baroco „ Festino.

Darnach bleibt also nur noch selbständig zu rechtfertigen von der

γ). { I. Figur: Barbara, Darii
II. „ : Cesare, Festino
III. „ : falsch Darapti, Disamis, Datisi
IV. „ : sämtliche Modi. —

Weiter kann man bemerken, dass a' für a gelesen gibt:

Darii aus Barbara
(Ferio „ Celarent)
Festino „ Cesare
(Baroco „ Camestres),

desgleichen b und b' vertauscht gibt:

Datisi aus Disamis
(Ferison „ Bocardo).

Die bejahenden partikularen Urteile kann man aber auch noch rückwärts lesen — ein Verfahren, das die alte Logik als „einfache Konversion" (conversio simplex) bezeichnet. Aus § 34 wissen wir, dass der hier mit $a' \not\in b$ wiedergegebene Satz „Einige a sind b" im identischen Kalkul in Gestalt von $ab \neq 0$ seinen exakten Ausdruck findet, was der Kommutativität der Multiplikation halber mit $ba \neq 0$ einerlei ist, und daher auch mit „Einige b sind a", hier also $b' \not\in a$ ausgedrückt werden mag.

Die erste (partikularbejahende) Prämisse $a' \not\in b$ in dieser Weise als $b' \not\in a$ rückwärts gelesen („konvertirt") führt nun:

Datisi in Darii
Ferison „ Ferio
Fresison „ Festino

und umgekehrt über.

Die zweite (partikularbejahende) Prämisse rückwärts gelesen erzeugt

Dimatis aus Disamis

und vice versā.

Will man dasselbe Konversionsverfahren auch auf die partikular bejahenden Konklusionen anwenden, so muss man zugleich damit auch die Buchstaben c und a vertauschen, damit nach vollzogener Konversion wiederum durch c das Prädikat, durch a das Subjekt der Konklusion bezeichnet erscheine. Es wird dabei der Schlusssatz $a' \not\in c$ zuerst in $c' \not\in a$ und hernach in $a' \not\in c$ übergehen, d. h. allemal ungeändert derselbe bleiben. Dagegen bedingt dieses Verfahren auch noch die gleichzeitige Umstellung der beiden Prämissen, indem durch die Vertauschung von a und c der Untersatz zum Obersatze, und umgekehrt, gestempelt wird. Auf diese Weise geht:

Dimatis aus Darii
falsch Darapti „ sich selber

Datisi aus Disamis
falsch Bamalip „ falsch Barbari

hervor, und umgekehrt.

Nach alledem blieben, genau genommen, als nur mehr selbständig zu behandelnde Modi von der

δ) {I. Figur: Barbara, II: Cesare, III: falsch Darapti, IV: falsch Bamalip, sowie Calemes — nebst den abgeschwächten Formen (ohne Barbari).

Endlich lassen durch Kontraposition auch die universal verneinenden Urteile sich rein umkehren (konvertiren), indem wegen:

$$(a \mathrel{\Subset\!\!\!\!\!=} b_1) = (b \mathrel{\Subset\!\!\!\!\!=} a_1) = (ab = 0)$$

die Redensarten: „Kein a ist b“, und „Kein b ist a“ äquivalent sein müssen. Auf diese Weise geht

Calemes aus Camestres, (desgleichen in b und c:)
Cesare aus Celarent, Festino aus Ferio,
falsch Fesapo aus falsch Felapton, Fresison aus Ferison

hervor. Der gleiche Prozess bei a und c, wie oben wieder mit einer Vertauschung dieser verbunden, führt überdies noch ineinander über:

Celarent und Calemes, Cesare und Camestres,

sodass, wie leicht zu sehen, sämtliche gültigen Modi *mittelbar* auf die der ersten Figur in γ), ja auf den *Barbara* schon zurückgeführt wären — zum Teil jedoch in verwickelter Weise.

Dieserhalb, sowie wegen rechnerischer Unterschiede in der Behandlung partikularer und universaler Aussagen, wollen wir doch nur die Buchstabenvertauschung (von c, c_1 resp. b, b_1) zur Reduktion der Anzahl gelten lassen, uns also mit den unter γ) zusammengestellten Modi demnächst beschäftigen.

Man ersieht bereits aus vorstehenden Betrachtungen: die Unterscheidung der Modi findet grossenteils nach *höchst unwesentlichen*, rein äusserlichen Gesichtspunkten statt. Jenachdem man z. B. einunddieselbe Beziehung $ab \neq 0$ mittelst „Einige a sind b“ oder mittelst „Einige b sind a“ in Worten auszudrücken beliebt, kann man einen (und wesentlich denselben) Syllogismus nicht blos unter einen andern Modus, sondern zuweilen selbst unter eine andere Figur bringen.

Die traditionelle Klassifikation der Syllogismen macht, im Lichte unsres Kalkuls betrachtet, einen ähnlichen Eindruck, wie wenn man etwa in der Arithmetik die Gleichungen des ersten Grades mit *einer* Unbekannten in vier Klassen einteilen wollte, je nachdem sie sich in der Form darbieten:

$$ax = b, \quad xa = b, \quad b = xa, \quad b = ax.$$

Was nun die Frage der *Vollständigkeit* der Aufzählung betrifft, so muss die letztere insofern zunächst der *Einseitigkeit* geziehen werden,

als der Sprachgebrauch eine Verneinung beim Subjekte und eine Partikularisirung ein Quantifiziren beim Prädikate willkürlich ausschliesst. Es würde uns gleichwol nicht verdienstlich erscheinen, diese Einseitigkeit zu ergänzen, und etwa noch durch die Berücksichtigung von Prämissen, wie: „Alle nicht-a sind ... einige b", die Menge der Schlussformen zu vermehren.

Innerhalb der durch die erwähnte Ausschliessung bedingten Schranken ist die Liste als eine *vollständige* zu bezeichnen. Dass alle hier *nicht* aufgeführten Syllogismen, welche aus Urteilen der üblichen vier Arten zusammengesetzt werden könnten, falsche Schlüsse sein müssen, würde sich in der That durch eine kombinatorische Untersuchung nachweisen lassen, die sich recht mühsam darstellt für Den, der an den Urteilsformen der *Wort*sprache klebt.

Mit a als Subjekt und b als Prädikat lässt die Wortsprache eben nur die vier Urteile α) zu; wird b mit a vertauscht, so gibt dies nochmals vier; im Ganzen also sind 8 Urteile möglich, in welche als Subjekt oder Prädikat zwei bestimmte Klassen a und b eingehen. Ebenso haben wir 8 zwischen b und c denkbare Urteile. Die Kombination von diesen als Obersätzen mit jenen als Untersätzen liefert 8×8 Paare von Urteilen die als Prämissen in's Auge zu fassen wären. Zu jedem von diesen 64 Prämissenpaaren sind nun wieder 4 Urteile zwischen a und c als Konklusion denkbar — und zwar nur 4, nicht aber 8, weil in der Konklusion a als Subjekt, c als Prädikat zu stehen hat und dieses Verhältniss nicht umgekehrt werden darf, beziehungsweise seine Umkehrung auf eine Vertauschung von Obersatz und Untersatz hinausliefe, somit [in Anbetracht, dass die Reihenfolge der Prämissen nach Prinzip I oder Th. $12_{\times}$) des Aussagenkalkuls gleichgültig sein muss] auf eine blosse Wiederholung bereits aufgezählter Schlussformen hinauskommen müsste.

Wir hätten darnach $8 \times 8 \times 4 = 256$ Sätzetripel durchzugehen, und würde nach Abzug der 24 in Tafel β) angeführten, bei den 232 übrigen darzuthun sein, dass dieselben ungültige Schlüsse liefern.

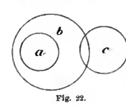


Fig. 22.

In jedem einzelnen Falle eines unstichhaltigen Syllogismus wird man solchen Nachweis immer *leicht* dadurch liefern, dass man denselben durch Gebiete (Kreise, Sphären) a, b, c exemplifizirt, bei welchen sich die Prämissen als erfüllt zeigen, die angebliche (oder fragliche, problematische, bestrittene) Konklusion aber als *nicht* erfüllt herausstellt — wie beispielsweise dies die Figur 22 uns leisten würde für den Schluss:

$$a \neq\!\!\!\in b, \qquad b' \neq\!\!\!\in c \;.\cdot.\; a' \neq\!\!\!\in c.$$

Im übrigen soll, gedachten Vollständigkeits-Nachweis in solcher Weise zu liefern, als eine gerechte Strafe denjenigen Lesern überlassen bleiben, die eine verbale Behandlung jeder rechnerischen vorziehen.

Übrigens vergleiche man dazu noch § 48, in welchem gezeigt wird,

dass die in Frage kommenden Prämissen bei Elimination des Mittelbegriffs gleichwol — in der grossen Mehrzahl der Fälle — noch eine gültige Konklusion zu ziehen gestatten oder „liefern", wenn solche auch nicht von dem oben in Frage gezogenen Gehalte ist; als Resultanten ergeben sich doch meistens gewisse Existenzialurteile! —

Sehr viel einfacher wird die Untersuchnng über die Vollständigkeit unsres Syllogismensystems sich gestalten, wenn man sich hinsichtlich der Urteilsformen ausschliesslich an die *Zeichen*sprache hält, worüber man weiter unten S. 234 nachsehen möge.

Weshalb wir aber in unsrer Theorie gezwungen sind, nur 15 von den 24 Schlussformen als korrekte Syllogismen anzuerkennen, die 9 übrigen (nämlich 4 von den Hauptmodi und die 5 abgeschwächten Formen) für Enthymeme, für *Schlüsse mit einer Prämisse mehr, als angegeben*, zu erklären, ja dieselben, wenn sie als vollständige Schlüsse oder als „Syllogismen" hingestellt werden sollten, geradezu ungültig, *falsch* zu nennen — dies wird die rechnerische Behandlung der traditionellen Formen unwiderleglich zeigen.

Einstweilen mag uns ein Textbeispiel das Wesen der Sache offenbaren. Ich wähle ein solches für den ersten, der für falsch erklärten Hauptmodi: Darapti.

Die folgeuden beiden Prämissen erscheinen uns unangreifbar:

Alle gleichseitigen rechtwinkligen Dreiecke (b) sind gleichseitige Dreiecke (a).

Alle gleichseitigen rechtwinkligen Dreiecke (b) sind rechtwinklig (c).

Die Konklusion sollte nun lauten:

ergo: *Einige gleichseitige Dreiecke* (a') *sind rechtwinklig* (c).

War von *sphärischen* Dreiecken die Rede, so ist die Konklusion auch noch (materiell) richtig. — War aber von ebenen Dreiecken die Rede, so ist die Konklusion augenscheinlich *unwahr* — ob zwar die Prämissen (vergl. § 9, ϱ) noch immer gültig bleiben; der Schluss musste daher formell unberechtigt sein. Erweist sich der Schlusssatz auch nur in *einem* Falle als unrichtig, während die Prämissen wahr sind, so ist der ganze Schluss nicht stichhaltig.

Um den Schluss zu einem gültigen zu machen, das Enthymem zu ergänzen, muss noch eine (wie anzunehmen, von den Alten stillschweigend gemachte) Voraussetzuug den Prämissen beigefügt werden. Es ist hier die, dass es b gebe, dass $b \neq 0$ sei. Mit dieser weiteren Prämisse werden wir den Schluss in § 44 noch systematisch in Angriff nehmen; derselbe ist dann freilich (wie gesagt) kein Syllogismus mehr.

Die Lostrennung der inkorrekten Syllogismen auf Grund der Bemerkung S. 220 ist wol zuerst von Miss Ladd[1] vollzogen.

§ 43. Miss Ladd's rechnerische Behandlung der 15 gültigen Modi. Beispiele.

Es ist das Verdienst einer „brilliant young lady-mathematician"*) — Miss Ladd, nunmehr Frau Professor Fabian Franklin, die 15 gültigen Syllogismen auf einen gemeinsamen Ausdruck gebracht zu haben, dieselben auf eine Weise, die wir jetzt darlegen wollen, mit einer einzigen Formel zu begründen.

Für die beiden ersten Modi der ersten und zweiten Figur — diese vier sind die einzigen, die kein partikulares Urteil enthalten — war dies allerdings im Wesentlichen schon durch Boole's Eliminationstheorem gegeben, welches sich in unsrer Vereinfachung als das Th. 50_+) darstellt, und auf eben dieses Theorem läuft auch die in Rede stehende einheitliche Behandlung wieder wesentlich hinaus. In der Art aber, wie diese Zurückführung nun ausgeführt wird (an der noch die Boole'sche Disziplin scheiterte) wird man nicht umhin können, einen ganz erheblichen Fortschritt zu erblicken.

Das Th. 50_+) lehrte unter anderm, die Elimination eines Gebietes aus einer (in Bezug auf dasselbe linearen homogenen) Gleichung (mit der rechten Seite 0) zu vollziehen, und mögen wir uns den auf diese Elimination bezüglichen Teil des Satzes durch die Formel dargestellt:

$$A_0) \qquad (\alpha\beta + \gamma\beta_1 = 0) \mathrel{\overline{\in}} (\alpha\gamma = 0)$$

in Erinnerung rufen.

Mit Rücksicht auf Th. 24_+) kann aber die Gleichung linkerhand zerfällt werden in das Produkt zweier Gleichungen, wonach die Formel äquivalent erscheint mit

$$A_1) \qquad (\alpha\beta = 0)\,(\beta_1\gamma = 0) \mathrel{\overline{\in}} (\alpha\gamma = 0)$$

und nach Th. $\overline{38}_\times$) also auch mit:

$$A) \qquad (\alpha\beta = 0)\,(\beta_1\gamma = 0)\,(\alpha\gamma \neq 0) = 0.$$

Diese „Inkonsistenz" ist nun *die Formel, welche alle gültigen Syllogismen in sich schliesst.*

Wirft man den dritten Faktor gemäss Th. $\overline{38}_\times$) nach rechts, so kommt man auf die schon angegebene Subsumtion A_1) zurück (die bei Vertauschung von α und γ nebst β und β_1 ungeändert bleibt).

*) So laut brieflicher Mitteilung seitens eines namhaften Gelehrten und Forschers an der Universität Cincinnati, auf Grund von dessen mir bekannter Zuverlässigkeit ich den Ausdruck gerne zu dem meinigen mache.

Ebenso kann man aber auch den zweiten oder ersten Faktor nach rechts werfen und darnach die Formel umschreiben in:

A_2) $$(\alpha\beta = 0)(\alpha\gamma \neq 0) \Subset (\beta_1\gamma \neq 0)$$

A_3) $$(\beta_1\gamma = 0)(\alpha\gamma \neq 0) \Subset (\alpha\beta \neq 0)$$

— vergleiche auch § 31. Die beiden Subsumtionen A_2) und A_3) würden sich übrigens durch gleichzeitige Vertauschung von α mit γ und β mit β_1 in einander überführen lassen und stellen dieselben wesentlich nur *einen* Satz vor.

Miss **Ladd** stellt die Formel A) hin als einen besondern Fall der allgemeineren Inkonsistenz:

B) $$(\alpha\beta = 0)(\gamma\delta = 0)\{\alpha\gamma(\beta + \delta) \neq 0\} = 0$$

welche ihrerseits nur eine Umschreibung ist der Subsumtion:

B_1) $$(\alpha\beta = 0)(\gamma\delta = 0) \Subset \{\alpha\gamma(\beta + \delta) = 0\},$$

die sich sozusagen von selbst versteht, in Anbetracht, dass unter den Voraussetzungen linkerhand die beiden Terme des Polynoms der rechten Seite beim Ausmultipliziren verschwinden, die Aussage rechterhand sich also bewahrheitet, in $(0 = 0) = \dot{1}$ übergeht.

Aus B) ergibt sich A) durch die Annahme $\delta = \beta_1$, für welche also $\beta + \delta = \beta + \beta_1 = 1$ wird und als Faktor unterdrückt werden darf.

Mit dieser Betrachtung ist implicite auch eine neue Ableitung resp. Demonstration des Theorems A_0) von Miss **Ladd** gegeben, welche als originell zu bezeichnen ist.

Aus der gemeinsamen Hauptformel A), und zwar in ihrer Umschreibung A_1), geht nun der Syllogismus **Barbara** hervor, indem man setzt:

$$\alpha = a, \quad \beta = b_1, \quad \gamma = c_1$$

oder noch besser:

$$\alpha = c_1, \quad \beta = b, \quad \gamma = a.$$

Hierdurch ergibt sich in der That:

$$(ab_1 = 0)(bc_1 = 0) \Subset (ac_1 = 0)$$

was nach Th. $38_\times$) äquivalent ist mit:

$$(a \Subset b)(b \Subset c) \Subset (a \Subset c).$$

Man kann jedoch natürlich auch selbständig zuwerke gehen. Um aus den Prämissen $ab_1 = 0$ und $bc_1 = 0$ das Mittelglied b zu eliminiren, bilde man die vereinigte Gleichung $ab_1 + c_1b = 0$ und erhält als die Eliminationsresultante: $ac_1 = 0$ oder $a \Subset c$. Elegant gewinnt man rechnerisch die Konklusion, indem man den Untersatz $ab_1 = 0$ mit c_1, den Obersatz $bc_1 = 0$ mit a durchmultiplizirt und die Ergebnisse überschiebend addirt, das Th. 30_+) $b_1 + b = 1$ berücksichtigend, vergl. **Peano**[1] p. 16. —

Diese Betrachtung kann nicht als *Beweis* des Syllogismus Barbara angesehen werden, dessen wir ja als „Prinzip II" zum Beweise der hier angewendeten Sätze selbst benötigten. Vielmehr hat dieselbe nur den Wert einer Kontrole und das Verdienst, zu zeigen, dass auch der Syllogismus Barbara in unsrer Hauptformel A) mitenthalten ist.

Als Beweise für dieselben sind nun aber anzusehen die analogen Zurückführungen der übrigen gültigen Syllogismen als welche wir wesentlich nur diejenigen des Tableau § 42, γ) noch abzuhandeln haben.

Aus A_3) und damit indirekt aus A) fliesst:

Darii, indem man setzt:

$$\alpha = a, \qquad \beta = c, \qquad \gamma = b,$$

wodurch entsteht:

$$(ab \neq 0)(bc_1 = 0) \Subset (ac \neq 0)$$

was sich lesen lässt als:

$$(a' \not\Subset b)(b \Subset c) \Subset (a' \not\Subset c).$$

Mit demselben Erfolge könnte man demnach auch in A_2) setzen:

$$\alpha = b, \qquad \beta = c_1, \qquad \gamma = a.$$

Ebenso fliesst:

Cesare aus A_1) für $\alpha = c,\ \beta = b,\ \gamma = a$, nämlich:

$$(ab_1 = 0)(bc = 0) \Subset (ac = 0),$$

$$(a \Subset b)(c \Subset b_1) \Subset (a \Subset c_1).$$

Festino aus A_2) für $\alpha = b,\ \beta = c,\ \gamma = a$, somit:

$$(ab \neq 0)(bc = 0) \Subset (ac_1 \neq 0),$$

$$(a' \not\Subset b)(c \Subset b_1) \Subset (a' \not\Subset c_1)$$

desgl. also auch aus A_3) für $\alpha = a,\ \beta = c_1,\ \gamma = b$.

Disamis aus A_3) für $\alpha = c,\ \beta = a,\ \gamma = b$, somit:

$$(a_1 b = 0)(bc \neq 0) \Subset (ac \neq 0),$$

$$(b \Subset a)(b' \not\Subset c) \Subset (a' \not\Subset c)$$

desgl. also auch aus A_2) für $\alpha = b,\ \beta = a_1,\ \gamma = c$.

Datisi ergibt sich auf dieselbe Weise wie oben Darii, indem man nur unter Konversion des Untersatzes der dort resultirenden Aussagensubsumtion dieselbe liest als:

$$(b' \not\Subset a)(b \Subset c) \Subset (a' \not\Subset c).$$

Hiermit sind nun die gültigen Modi der drei ersten Figuren erledigt.

Die vierte Figur enthält noch drei gültige Modi. Es ergibt sich:

Calemes aus A_1) für $\alpha = a,\ \beta = b,\ \gamma = c$:

$$(ab = 0)\,(b_1 c = 0) \subseteq (ac = 0)$$

$$(b \subseteq a_1)\,(c \subseteq b) \subseteq (a \subseteq c_1).$$

Dimatis wie Disamis, nur ist die dort resultirende Aussagensubsumtion jetzt (unter Konversion des Obersatzes) zu lesen als:

$$(b \subseteq a)\,(c' \subseteq b) \subseteq (a' \subseteq c).$$

Fresison genau wie Festino, nur mittelst Konversion des Untersatzes gelesen als:

$$(b' \subseteq a)\,(c \subseteq b_1) \subseteq (a' \subseteq c_1).$$

Nach dem über § 42, γ) Gesagten sind zugleich mit den vorstehend behandelten 9 Modi (die wie man sah nur 6 verschiedene Schemata im Aussagenkalkul lieferten) auch die noch übrigen 6 gültigen Modi bereits bewiesen.

Zur Bequemlichkeit des Unterrichtenden stellen wir indess auch diese mit ihren Formeln im Aussagenkalkul und deren Zurückführung auf die Hauptformel noch kurz zusammen. Man erhält:

Celarent wie Cesare, die Formel unter Konversion des Obersatzes lesend als:

$$(a \subseteq b)\,(b \subseteq c_1) \subseteq (a \subseteq c_1).$$

Ferio wie Festino, die dortige Formel unter Konversion des Obersatzes gelesen als:

$$(a' \subseteq b)\,(b \subseteq c_1) \subseteq (a' \subseteq c_1).$$

Camestres wie Calemes, die Formel unter Konversion des Untersatzes gelesen als:

$$(a \subseteq b_1)\,(c \subseteq b) \subseteq (a \subseteq c_1).$$

Baroco aus A_2) für $\alpha = b_1,\ \beta = c,\ \gamma = a$

sowie aus A_3) für $\alpha = a,\ \beta = c_1,\ \gamma = b_1$:

$$(ab_1 \neq 0)\,(b_1 c = 0) \subseteq (ac_1 \neq 0)$$

$$(a' \subseteq b_1)\,(c \subseteq b) \subseteq (a' \subseteq c_1).$$

Bocardo aus A_3) für $\alpha = c_1,\ \beta = a,\ \gamma = b$

oder aus A_2) für $\alpha = b,\ \beta = a_1,\ \gamma = c_1$:

$$(a_1 b = 0)\,(bc_1 \neq 0) \subseteq (ac_1 \neq 0)$$

$$(b \subseteq a)\,(b' \subseteq c_1) \subseteq (a' \subseteq c_1).$$

Ferison wie Festino, die Formel unter Konversion des dortigen Unter- sowol als Obersatzes gelesen als:

$$(b' \mathrel{\underline{\in}} a)(b \mathrel{\underline{\in}} c_1) \mathrel{\underline{\in}} (a' \mathrel{\underline{\in}} c_1). \text{ —}$$

Im Ganzen zählen wir also bei den 15 gültigen Modi jetzt 8 verschiedene Formeln des Aussagenkalkuls, welche sich unter Barbara, Darii, Cesare, Festino, Disamis, Calemes, Baroco und Bocardo vorstehend der Reihe nach angegeben finden. *Verschieden* sind die 8 Formeln insofern, als sie, miteinander verglichen entweder verschiedenen Bau zeigen (überhaupt nicht durch Buchstabenvertauschung in einander übergeführt werden können), oder, wenn sie einerlei Bau haben, doch wenigstens für einen von den sechs Termen a, a_1, b, b_1, c, c_1 einen andern enthalten.

Unter dem höheren Gesichtspunkt des Kalkuls ist daher überhaupt nur von *acht* gültigen Syllogismen zu reden. Aus diesen entspringen die 15 Modi, indem die Wortsprache da und dort die Möglichkeit bietet, einunddieselbe Formel auf verschiedene Weise in Worte zu fassen. Wir geben sogleich einen Überblick über diese Verteilung der 15 Modi auf die 8 Formen, indem wir die gleichwertigen Modi untereinanderstellen.

Zuvor wollen wir nur noch bemerken, dass unsre acht Formen auch nur *von zweierlei Typus* sind. Entweder nämlich illustriren sie das Eliminationstheorem, welches durch den Satz A_1) dargestellt wird, oder aber dasjenige, welches die Formeln A_2) und A_3) übereinstimmend ausdrücken. Die beiden Sätze sind verschieden, sie können augenscheinlich nicht durch blossen Buchstabenwechsel in einander verwandelt werden [wenngleich wir sie als logisch mit einander und dem einen A) äquivalent erkannt haben], weil der erste Satz drei Gleichungen, der zweite neben nur einer Gleichung zwei Ungleichungen enthält.

Es zerfallen also die 8 Formen des Syllogismus in zwei Gruppen — die eine, wie sich zeigt von drei Formen (mit 5 Modi), die andre von fünf Formen (mit 10 Modi), und zwar wie folgt:

C) Erste Gruppe.

Cesare	Barbara	Calemes
Celarent		Camestres.

Zweite Gruppe.

Bocardo	Darii	Festino	Disamis	Baroco.
	Datisi	Ferio	Dimatis	
		Ferison		
		Fresison		

Dergestalt dass die untereinanderstehenden Modi — wenn dargestellt als Subsumtionen des Aussagenkalkuls, deren Minor sowol als Major mittelst Gleichungen oder Ungleichungen (mit der rechten Seite 0) ausgedrückt erscheint — wie gesagt, identisch die nämliche Formel oder Aussage liefern. Wogegen ein Buchstabenwechsel erforderlich ist und hinreicht, um die nebeneinanderstehenden Formen in einander überzuführen. Die Syllogismen der ersten Gruppe laufen auf den Satz A_1), die der zweiten auf den durch A_2) [sowie A_3)] dargestellten Satz hinaus.

Die ähnliche Bildung der im Tableau C) in einer Kolumne stehenden Namen weist unverkennbar darauf hin, dass schon die älteren Logiker die hier dargelegte engere Verwandtschaft unter den Modi herausgefühlt haben.

Formeln aber, die sich durch blossen Buchstabenwechsel in einander*) transformiren lassen — wie z. B. $ab = ba$ und $cd = dc$ — drücken immer denselben Satz aus und sind nicht wesentlich verschieden.

Es gibt hienach wesentlich nur *zwei* Arten von gültigen syllogistischen Schlüssen, als deren Typus man etwa Barbara und Darii (oder Festino) hinstellen mag. In diesen — in deren einem oder aber dem andern — ersetzen die übrigen Modi samt und sonders nur gewisse Buchstaben durch andere!

Es sind jetzt alle gültigen Syllogismen aus den Prinzipien des identischen Kalkuls bewiesen und auf eine gemeinsame Quelle zurückgeführt.

Wer auf letzteres weniger Wert legen sollte kann natürlich die Elimination des Mittelgliedes nachdem er die Prämissen in Formeln gesetzt hat, in jedem Falle einfach der Regel v) des § 41 gemäss ausführen.

Man überzeugt sich leicht, dass jedesmal die behauptete Konklusion des Syllogismus sich als die *vollständige* Resultante ergibt, und genügt es, um dies nachzusehen, das Schema A_2) — z. B. — in's Auge zu fassen, worin unter den Prämissen auch eine Ungleichung figurirt — in Anbetracht, dass wir in Bezug auf Gleichungen — bei A_1) — die Sache längst erledigt haben.

*) Dies muss immer gegenseitig sein. Geht aus einer ersten Formel eine zweite dadurch hervor, dass man α für a, β für b, etc. in sie einsetzt, so wird man auch aus der zweiten Formel die erste erhalten durch die Substitution von a für α, b für β, etc. Es genügt, sich hievon an einem allgemeinen Schema $F(a, b, c \ldots)$ und $F(\alpha, \beta, \gamma \ldots)$ zu überzeugen.

Der Eliminand heisst hier α. Sagten wir x dafür, so könnten wir die Prämissen von A_2) wie folgt schreiben:

$$(\beta x + 0 \cdot x_1 = 0)\,(\gamma x + 0 \cdot x_1 \neq 0).$$

Als Resultante ergibt sich schon nach dem Satze ι) des § 41:

$$(\beta \cdot 0 = 0)\,(\gamma \beta_1 + 0 \cdot 0_1 \neq 0) = (0 = 0)\,(\beta_1 \gamma \neq 0) = 1 \cdot (\beta_1 \gamma \neq 0) = (\beta_1 \gamma \neq 0)$$

wie dies eben der Satz A_2) behauptet.

Ob man bei dieser Elimination vorzieht, so, wie es vorstehend geschah, und wie ich es im allgemeinen thue, alle Aussagen *auf das Prädikat* 0 einzurichten (mit rechts auf 0 gebrachten Subsumtionen, Gleichungen und Ungleichungen zu operiren), oder ob man mit Herrn Mitchell[1] lieber für das Subjekt 1 sich entscheidet (etwaige Subsumtionen links, die Gleichungen und Ungleichungen einerseits auf 1 bringend), erscheint dabei als ein nebensächlicher Umstand, bleibt in subjektives Belieben gestellt, Geschmacksache.

Ich hege die Überzeugung, dass es nicht möglich sein wird, die Syllogistik jemals in einer *schöneren* Weise zu erledigen, als es durch Miss Ladd begründet ist — wie wir vorstehend darzustellen versucht haben: in weniger als *eine* Formel lassen die Syllogismen sich zuverlässig nicht komprimiren, und dabei an Durchsichtigkeit und Einfachheit die Formel A) noch zu übertreffen erscheint undenkbar.

Obiges dürfte wenigstens dann anzuerkennen sein, wenn auch dem historisch Gewordenen sein Recht in der Syllogistik gewahrt bleiben, wenn der Zusammenhang ihrer Betrachtungen mit der Gesamtheit der Schlussformen der Wortsprache dabei aufrecht erhalten werden soll.

Sieht man freilich ab von den traditionellen Modi und Figuren, und hält sich von vornherein lediglich an das Problem als ein rechnerisch in der Zeichensprache zu lösendes, so lassen die Betrachtungen sich äusserlich noch erheblich viel mehr, als es vorstehend geschehen, zusammendrängen — wie denn schon Herr Cayley[1] gezeigt hat, dass das Problem der Syllogistik alsdann lediglich hinausläuft auf dasjenige der Elimination von b aus den folgenden *sechs* Paaren von Prämissen:

$$(ab = 0)\,(bc = 0), \qquad (ab = 0)\,(b_1 c = 0),$$
$$(ab = 0)\,(bc \neq 0), \qquad (ab = 0)\,(b_1 c \neq 0),$$
$$(ab \neq 0)\,(bc \neq 0), \qquad (ab \neq 0)\,(b_1 c \neq 0),$$

in welchen, wie man leicht nachweist, alle innerhalb des Rahmens der gewöhnlichen Syllogistik erdenklichen Prämissensysteme der Art nach enthalten sind, aus denen sie nämlich durch blossen Buchstabenwechsel, als da ist: Vertauschung von b mit b_1, resp. von a mit a_1, c mit c_1, und vielleicht auch von a mit c, vollständig hervorgehen müssen.

Wir können um so mehr darauf verzichten, die Lösung des Problemes auch für diese Art seiner Stellung hier wiederholend durchzugehn, als es sich so in § 48 mit einem noch viel umfassenderen Aufgabenkreise behandelt zeigen wird. Erwähnt sei nur, dass Herr Voigt[1], von andern Gesichtspunkten aus zu einer ähnlichen Übersicht, wie Cayley, gelangend, mit Recht darauf hinweist p. 38, dass die Lehre von den Syllogismen eine Materie sei, deren Bewältigung früher auch einem guten Kopfe wol ein gutes Teil von Kopfzerbrechen und Mühe verursachte, und dass nichts die Zweckmässigkeit der algebraischen Logik besser beweise als diese Thatsache, dass mit ihrer Hülfe eine solche Disziplin sich in jene wenigen Regeln (nur eine!) zusammenfassen lässt. —

Nachdem die Theorie hiermit erledigt, mögen noch einige Beispiele zu den verschiedenen gültigen Modi gegeben werden, dergleichen sofort zur Hand zu haben dem Lehrer sicherlich willkommen ist.

Zu Barbara finden sich solche schon in § 4 zur Genüge angeführt.

Zu Celarent. Die theoretischen Überzeugungen sind vom Willen unabhängig. Was vom Willen unabhängig ist, kann nicht durch Strafgesetze erzwungen werden. Ergo: Theoretische Überzeugungen können nicht durch Strafgesetze erzwungen werden. (Ueberweg.) — Anderes Beispiel:

Hasen und Kaninchen sind Nagetiere.

Kein Nager ist ein Wiederkäuer.

Ergo: Hasen und Kaninchen sind keine Wiederkäuer.*)

Zu Darii. Einige Raubvögel sind Eulen. Die Eulen sind Nachtvögel. Einige Raubvögel müssen also Nachtvögel sein. (R. Grassmann.) Ebendazu: Einige Gase sind Metalle (z. B. Wasserstoffgas, Quecksilberdampf). Alle Metalle sind gute Leiter der Elektrizität. Folglich: Einige Gase sind gute Leiter. — Desgleichen (wenn man will, auch zu Disamis, etc.):

Krisen des Handels und der Industrie (sog. „Krache") sind periodisch. Solche Krisen pflegen die Menschen zu überraschen. Also gibt es Ereignisse, die mit periodischer Regelmässigkeit eintreten und gleichwol die Menschen überraschen. (F. A. Lange[1], p. 82.)

NB.: Durch Verwendung einer Prämisse, wie diese: Katastrophen zu deren Zustandekommen (wie z. B. bei einer Panik) das Gemüt der Menschen wesentlich mitwirkt, lassen sich dadurch unschädlich machen oder verhindern, dass man sie rechtzeitig vorhersieht und ihnen vorzubeugen sucht — als Obersatz, sowie etwa: Gegenwärtig naht wieder eine Handelskrise — als eines Untersatzes — und geschickt darauf gebaute Schlüsse würden zu geeigneter Zeit sich offenbar grosse Summen gewinnen resp. retten lassen — sodass sich der „Wert der Syllogistik" unter Umständen nach Millionen berechnen lassen dürfte. — Desgleichen:

Alle Quadrate sind Vierecke. Einige Parallelogramme sind Quadrate. Ergo: Einige Parallelogramme (sogar alle!) sind Vierecke. (Ueberweg.)

*) Als im Gegensatz zu dieser Konklusion stehend vergleiche man im dritten Buch Mosis: Kap. XI, Vers 4 bis 6, sowie 5 Moses XIV, 7.

Das Beispiel zeigt, dass auch die Modi der ersten Figur unter Umständen wenig wertvolle Konklusionen liefern können, was stets zu thun Kant[2] zu Unrecht denen der drei andern Figuren vorwirft.

Zu Ferio. „Einige Genüsse sind nachteilig. Nichts Nachteiliges ist erstrebenswert. Ergo: Einige Genüsse sind nicht erstrebenswert."

Zu Cesare. Diamant zeigt keine Doppelbrechung. Dieser Krystall zeigt Doppelbrechung. Also ist er kein Diamant. (Sigwart.)

Desgleichen: Kein griechisches Wort geht auf *m* aus; praeambulum geht auf *m* aus; also ist es kein griechisches Wort. (Pommer.)

Zu Camestres. Der Astronom Leverrier schloss: Die Gesamtheit der Planeten bestimmt die Störungen des Uranus in seiner Bewegung um die Sonne. Die zur Zeit bekannten Planeten*) sind nicht ausreichend zur Erklärung der beobachteten Störungen des Uranus. Also bilden sie nicht die Gesamtheit der Planeten — eine negative Einsicht, welche die Entdeckung des Neptun vorbereitete. (Ueberweg.) Man bemerkt, dass die Konklusion hier eigentlich als Ungleichung aufgefasst sein will, womit über die Folgerung $a \not\subseteq c_1$ oder $ac = 0$ noch hinausgegangen ist, nämlich von da, in Verbindung mit $a \neq 0$ noch auf $a \neq c$ geschlossen ist.

Zu Festino. Einige Schwimmvögel sind Enten. Kein Schwan ist eine Ente. Gewiss also sind einige Schwimmvögel nicht Schwäne. (R. Grassmann.)

Zu Baroco. Manche nützliche Dinge sind gar nicht selten. Alle Edelsteine sind selten. Folglich sind manche nützliche Dinge nicht Edelsteine.

Zu Disamis. Die Käfer sind Insekten (Kerfe). Einige Käfer sind Wassertiere. Ergo: Einige Insekten sind Wassertiere. (R. Grassmann.)

Zu Datisi. „Einige Zufriedene sind arm. Alle Zufriedenen sind beneidenswert. Ergo: Einige Arme sind beneidenswert."

Zu Bocardo. Manche von den der Zauberei angeklagten Personen haben sich selbst nicht für unschuldig gehalten. Alle der Zauberei Angeklagten waren eines eingebildeten Verbrechens beschuldigt. Ergo: Einige eines blos fingirten Verbrechens Beschuldigte haben sich selbst (nicht) für (un-)schuldig gehalten. (?Ueberweg.) — Desgleichen:

Der Rhombus ist gewöhnlich nicht gleichwinklig. Der Rhombus ist ein gleichseitiges Polygon. Also: Manche gleichseitige Polygone sind nicht gleichwinklig.

Es ist nicht angängig, mit Pommer[1] schlechtweg zu sagen: der Rhombus ist nicht gleichwinklig — wo dann der Schluss unter den Modus (falsch-)Felapton fallen würde — sintemal es auch gleichwinklige Rhomben gibt, als da sind die Quadrate.

Zu Ferison. Das Eisen ist nicht organisch. Einiges „Eisen (?)" ist kohlenstoffhaltig. Also ist nicht alles, was Kohlenstoff enthält, organisch. (Pommer.)

Zu Calemes. Der Storch ist ein Sumpfvogel (Stelzengänger.) Kein Sumpfvogel ist ein Schwimmvogel. Ein Schwimmvogel kann also kein Storch sein. (R. Grassmann.)

*) Als Kollektivum. Beide Prämissen sind hier singuläre Urteile.

Zu Dimatis. Käfer sind Insekten. Einige Wassertiere sind Käfer. Einige Insekten, also, sind Wassertiere. (R. Grassmann.)

Zu Fresison. Einige Mongolen sind von blonder Rasse. Kein Germane ist ein Mongole. Also sind einige blonde Rassen nicht Germanen.

Obwol sie hier als „falsch" bezeichnet sind und theoretisch erst im nächsten Paragraphen erledigt werden, wollen wir um mit der Exemplifikation der traditionellen Syllogismen zu Ende zu kommen, hier sogleich auch die übrigen Modi anreihen.

Vor allen die Modi Darapti und Felapton, ohwol eigentlich Enthymeme, kommen mit der als „reservatio mentalis" ehen hinzugedachten erforderlichen Ergänzung (auf Grund als existirend anerkannter Individuen der Snhjektklasse) doch ungemein häufig zur Anwendung; sie spielen in den Raisonnements der Wissenschaften sowol als des gemeinen Lebens unhestreithar eine Rolle. Einige Beispiele werden dies erkennen lassen:

Zu (falsch) Darapti. Die 2 ist eine Primzahl; 2 ist eine gerade Zahl; ergo: Einige Primzahlen (mindestens eine, und in der That nur diese eine) sind gerade. [Enthymematisch war zu unterstellen: Es giht eine Zahl 2; solche existirt!]

„Die Eulen sind Raubvögel; die Eulen sind nützlich(e Tiere); ergo: Einige Raubvögel sind nützlich."

„Kalium ist Metall; Kalium schwimmt auf dem Wasser; ergo: Einige Metalle schwimmen auf dem Wasser."

Die Wale sind Säugetiere; die Wale hahen Flossen; also: Einige Säugetiere hahen Flossen. (R. Grassmann.)

Es gibt Steine, die Eisen anziehen, weil (der Magnet) das Magneteisen ein Stein ist und Eisen anzieht. (Pommer.)

Die Rytina Stelleri (Seekuh) hätte eines der nützlichsten Tiere werden können. Sie wurde vom Menschen ausgerottet. Also wurden einige der (potentiell) nützlichsten Tiergattungen vom Menschen ausgerottet. —

Zu (falsch) Felapton. Man sage: „*nicht* gehegt oder geschont oder erhalten" statt „ausgerottet" im letzten Beispiel.

Natrium ist Metall; Natrium geht im Wasser nicht unter (sinkt nicht etc.); ergo: Einige Metalle gehen im Wasser nicht unter. Etc.

Zu (falsch) Fesapo. Alle Fische atmen durch Kiemen. Kein Walfisch ist ein Fisch. Ergo: Einige Kiemenatmer sind nicht Walfische — sogar alle, was aber nicht „folgte"!

Die Pferde sind Säugetiere. Kein Wiederkäuer ist ein Pferd. Also: Einige Säugetiere sind nicht Wiederkäner. (R. Grassmann.) —

Zu (falsch) Bamalip. Die Wale (Cetaceen) sind Sängetiere; die Walrosse sind Wale. Also müssen einige Säugetiere Walrosse sein. (Derselbe.) [Die vollständige Konklusion würde sein: Alle Walrosse sind Säugetiere.]

Die ührigen abgeschwächten Modi zu exemplifiziren überlassen wir dem Leser. Desgleichen in Bezug auf sämtliche Modi zn thun, wird als eine vorzügliche Denkübung vielseitig empfohlen. Gute Beispiele zu ersinnen,

ist in der That nicht leicht, als namentlich solche, die für sich hingestellt *herausgerissen aus dem Zusammenhange* solcher Überlegungen, in welchen sie vielleicht verwertet vorkommen, schon irgend einen Nutzen, eine weitere Verwendbarkeit der gezogenen Konklusion erkennen liessen. Das ist aber auch viel verlangt! Dergleichen gute Beispiele sind immer noch als *rar* zu bezeichnen, und möge der kritisch aufgelegte Leser, der an dem einen oder andern von den angeführten Beispielen kein Gefallen findet, selbst deren bessere aufstellen! —

Nicht unwichtig ist noch die Frage, wie man einem Syllogismus schon äusserlich ansehen könne, ob er gültig ist — genauer gesagt, einem Schlusse „von syllogistischer Form", welcher nämlich aus zwei kategorischen Urteilen über drei Terme ein drittes ableitet, das den doppelt vorkommenden Term nicht mehr enthält, sondern nur noch die beiden andern Terme.

Frau Franklin-Ladd gibt [1] p. 41 hiefür eine Regel, welche darauf hinausläuft, den Syllogismus in eine Inkonsistenz zu verwandeln und mit dem Schema *A*) zu vergleichen, welches, wie gezeigt, ja alle gültigen Syllogismen in sich zusammenfasst.

Zu dem Ende *bilde man* zunächst *das kontradiktorische Gegenteil zur Konklusion* — indem man dieselbe nach den Regeln der Kontraposition konvertirt, somit

für „alle *a* sind *c*" sagt: „einige *a* sind nicht *c*"

für „einige *a* sind *c*" sagt: „kein *a* ist *c*" — oder umgekehrt. Die so konvertirte Konklusion halte man mit den beiden Prämissen zusammen. *Von diesen drei Urteilen müssen dann zwei universal, das übrig bleibende partikular sein*, und falls man *jene* (oder auch alle dreie) als *Existenzialurteile* formulirt, *muss der den beiden universalen gemeinsame Term mit entgegengesetzter Qualität* (einmal negirt einmal unnegirt) *vorkommen*, ein jeder von den beiden andern Termen aber mit durchweg der gleichen Qualität. Dann und nur dann wird der Syllogismus gültig sein.

Für „alle *A* sind *B*" sage man also: *„nichts ist A und* zugleich *nicht-B"*. und für „kein *A* ist *B*" eventuell: *„nichts ist A und B* zugleich".

[Als unwesentlich kann es dagegen unterbleiben, für „einige *A* sind *B* resp. nicht *B*" auch noch zu sagen „es gibt *A*, die *B* resp. nicht-*B* sind", oder *„etwas* ist *A* und *B*, etc.", weil in dieser Fassung die Terme bezüglich mit der nämlichen Qualität auftreten, wie in der vorigen.]

Diese Zumutung scheint mir eine geringere zu sein als diejenige der Frau Franklin-Ladd, welche fordert hinzubringen, dass die universalen Urteile „mit einer verneinenden Kopula" (!), das partikulare Urteil mit einer bejahenden ausgedrückt werde — wodurch leicht die Nötigung entsteht zur Bildung von Sätzen mit negativem Subjekte, ausserdem aber auch

noch unbequeme Satzbildungen entstehen, wie: „Spartaner sind-nicht nicht-Griechen“.

So ist z. B. der Schluss (ibidem):

„Alle Menschen sind sterblich. Einige Sterbliche sind glücklich. Also sind einige Menschen glücklich“ äquivalent der Inkonsistenz:

Nichts ist *Mensch* und *nicht-sterblich* (oder: kein *Mensch* ist *unsterblich*). Einige *Sterbliche* sind *glücklich.* (Alle Menschen sind unglücklich oder:) Nichts ist *Mensch* und *glücklich* —
welche ungültig ist aus dem doppelten Grunde, weil der dem ersten und dritten Urteil gemeinsame Term „Mensch“ beidemal mit derselben Qualität, und obendrein der Term „sterblich“ mit entgegengesetzten Qualitäten vorkommt.

Man bemerkt sogar, dass die obige Umschreibung von universal verneinenden Urteilen („kein A ist B“ in „nichts ist A und B“) unterbleiben kann, wofern man nur *sich hütet, die in dem verneinenden Artikel „kein“ liegende negative Qualität dem einen oder andern Terme zuzuschreiben.* Und dies vorausgesetzt könnten wir auch statt „alle A sind B“ ganz ungezwungen sagen: „kein A ist *nicht-B*“. Sodass — anstatt der oben geforderten Umschreibung in Existenzialurteile — am besten wol die Forderung eintritt: *dafür zu sorgen, dass die universalen Urteile mit dem verneinenden Artikel „kein“ beginnen,* worauf dann lediglich zu kontroliren bliebe, dass der denselben gemeinsame Term, *und* von allen *nur dieser*, entgegengesetzte Qualitäten aufweise.

So ist das auch noch von Frau Franklin angeführte Beispiel:

Nur Griechen sind tapfer. Alle Spartaner sind Griechen. Ergo: Alle Spartaner sind tapfer — äquivalent der Inkonsistenz:

Kein *Tapferer* ist *nicht-Grieche.* Kein *Spartaner* ist *nicht-Grieche.* Einige *Spartaner* sind *nicht-tapfer* —
und darum ungültig aus ähnlichen Gründen wie die vorige. —

Am übersichtlichsten dürfte sich allemal solche Umschreibung in der Zeichensprache des Kalkuls gestalten. —

Zum Schlusse seien hier wenigstens noch erwähnt Cunynghame's „syllogistische Karten“ und in ihrem Betreff auf Jevons [9] p. 107 .. 110 verwiesen.

§ 44. Die inkorrekten Syllogismen der Alten und ihre Richtigstellung in der exakten Logik. Über Subalternation und Konversion. Zusammengesetzte Schlüsse.

Von den noch übrigen Syllogismen zerfallen zunächst die vier Hauptmodi in die zwei Gruppen:

Darapti und Bamalip
Felapton
Fesapo

derart, dass wieder die drei untereinanderstehenden wesentlich nur einunddenselben (falschen) Satz der Elimination zum Ausdruck bringen, der sich aber unterscheidet von dem des isolirten Modus.

Die Unrichtigkeit der drei erstern lässt sich auf zwei Wegen darthun. Einmal durch Exemplifikation, wie wir dies am Schlusse des § 42 bezüglich Darapti schon zeigten. Sodann: indem man den Mittelterm b regelrecht aus den Prämissen eliminirt. Man findet alsdann: $0 = 0$ als Eliminationsresultante, und da diese bereits als vollständig erwiesen ist [indem bei der Elimination nur das Th. 50_+) in's Spiel kommt], so folgt also *keine* Relation zwischen den beiden andern Termen.

In der That heissen bei Darapti $a_1 b = 0$ und $bc_1 = 0$ die beiden Prämissen; es ist $(a_1 + c_1) b + 0 \cdot b_1 = 0$ die vereinigte Gleichung derselben, also $(a_1 + c_1) \cdot 0 = 0$ oder $0 = 0$ die (volle) Resultante der Elimination von b.

Bei Felapton und Fesapo tritt nur c für c_1 ein. Hier haben wir also die Elimination:

$$(a_1 b = 0)(bc = 0) = \{(a_1 + c) b = 0\} \Subset (0 = 0)$$

und unterscheiden beide Modi sich überhaupt nur dadurch, dass der Obersatz $bc = 0$ bei ersterm als $b \Subset c_1$, bei letzterm als $c \Subset b_1$ in Worte gekleidet wird.

Im Hinblick auf die(se) Koincidenz der drei genannten Modi genügt es, nur mehr den ersten derselben, Darapti, noch richtig zu stellen. Wir haben schon bei der Exemplifikation darauf hingewiesen, dass, um ihn zu ergänzen, die Annahme $b \neq 0$ den Prämissen noch hinzugefügt werden muss. Der Schluss

α) $$(b \Subset a)(b \Subset c)(b \neq 0) \Subset (ac \neq 0)$$

oder

β) $$(a_1 b = 0)(bc_1 = 0)(b \neq 0) \Subset (ac \neq 0)$$

ist dann richtig, und lässt sich durch Elimination von b aus der Aussage:

$$\{(a_1 + c_1) b + 0 \cdot b_1 = 0\} \{1 \cdot b + 0 \cdot b_1 \neq 0\}$$

gemäss der Regel ι) des § 41 beweisen, welche als Resultante liefert:

$$\{(a_1 + c_1) \cdot 0 = 0\} \cdot \{1 \cdot (a_1 + c_1)_1 + 0 \cdot 0_1 \neq 0\} = (0 = 0)(1 \cdot ac + 0 \cdot 1 \neq 0)$$

oder $(ac \neq 0)$ — in Anbetracht, dass der Faktor $(0 = 0)$, $= \dot{1}$ nicht geschrieben zu werden braucht. Wie man sieht, stellt die Konklusion, d. h. der Satz „Einige a sind c“ dann auch die *volle* Resultante der Elimination des b aus den Prämissen dar.

Ebenso wären:

$$\gamma) \begin{cases} (b \Subset a)(b \Subset c_1)(b \neq 0) \\ \text{resp. } (b \Subset a)(c \Subset b_1)(b \neq 0) \Subset (ac_1 \neq 0), \end{cases}$$

welche zusammenfallen zu

$$\delta) \qquad (a_1 b = 0)(bc = 0)(b \neq 0) \Subset (ac_1 \neq 0)$$

die berichtigten Modi Felapton und Fesapo.

Alle drei berichtigten Schlüsse sind nun aber, wie schon angedeutet, keine „Syllogismen“ mehr, indem sie *drei* Prämissen enthalten, von denen eine keine „Subsumtion“, sondern ein „Existenzialurteil“ ist, indem ferner auch der sogenannte Mittelbegriff hier seinen Namen nicht in dem früheren Sinne verdient, sintemal er drei mal in den Prämissen vorkommt.

Von diesen drei inkorrekten Syllogismen unterscheidet dagegen der vierte Bamalip sich dadurch, dass hier sehr wohl aus den Prämissen ein gültiger Schluss auf a und c (unabhängig von b) zu ziehen ist. Und zwar ist dieser Schluss kein anderer als der von Barbara, mit vertauschtem a und c:

$$(b \Subset a)(c \Subset b) \Subset (c \Subset a).$$

Von dem hiermit etablirten Ergebnisse: „alle c sind a“ zu schliessen auf „einige a sind c“ ist aber (in unsrer Disziplin) nicht ohne weiteres gestattet. Es ist dies nur dann erlaubt, wenn man weiss, dass der minor c der Konklusion (welcher als major des Modus Bamalip figurirt) nicht 0 ist, in Worten: dass es c gibt.

In der That ist erst:

$$\varepsilon) \qquad (c \Subset b)(b \Subset a)(c \neq 0) \Subset (ac \neq 0)$$

der *richtig gestellte* Schluss Bamalip, und beweist sich derselbe systematisch, indem man aus der Prämisse:

$$(a_1 b + cb_1 = 0)(cb + cb_1 \neq 0)$$

regelrecht b eliminirt, wodurch sich ergibt:

$$(a_1 c = 0)(ca + cc_1 \neq 0) \quad \text{oder} \quad (c \Subset a)(ac \neq 0),$$

welches in der That $\Subset (ac \neq 0)$ nach Th. $\bar{6}_\times$) ist. Man sieht jedoch, dass diese Konklusion „einige a sind c“ hier nicht die volle Resultante der Elimination von b vorstellt.

Die volle Resultante kann nach Belieben dargestellt werden durch das soeben gefundene Ergebniss: $(c \Subset a)(ac \neq 0)$ oder auch *noch einfacher* durch: $(c \Subset a)(c \neq 0)$, welches man leichter erhalten kann, indem man nur aus den b enthaltenden Prämissen, d. i. aus den beiden

ersten Faktoren $(c \neq\!\!\!\in b)(b \neq\!\!\!\in a)$ der Hypothesis des in ε) berichtigten Schlusses Bamalip diesen Mittelterm b gemäss Barbara oder Prinzip II eliminirt, und die Resultante $c \neq\!\!\!\in a$ hernach mit dem dritten (b ohnehin nicht enthaltenden) Faktor $c \neq 0$ der Voraussetzung als einer simultan geltenden Aussage multiplikativ verknüpft. In Worten wird die volle Konklusion darnach am besten ausgedrückt, indem man sagt: *Alle c sind a und es gibt c.*

Die Äquivalenz jener beiden Konklusionen lässt sich auch leicht direkt nachweisen; dieselbe konstituirt einen kleinen *Satz des Klassenkalkuls,* welcher (wenn wir die Buchstaben c, a durch a, b ersetzen) lautet:

$$\zeta) \qquad (a \neq\!\!\!\in b)(ab \neq 0) = (a \neq\!\!\!\in b)(a \neq 0).$$

Um ihn zu beweisen, bemerke man erstlich, dass $(ab \neq 0) \neq\!\!\!\in (a \neq 0)$ nach hereits gegebenem Satze § 40, α') ist, woraus durch *beiderseitiges* Multipliziren mit $(a \neq\!\!\!\in b)$ die eine von den beiden in der behaupteten Gleichung enthaltenen Subsumtionen gewonnen ist, nämlich:

$$(a \neq\!\!\!\in b)(ab \neq 0) \neq\!\!\!\in (a \neq\!\!\!\in b)(a \neq 0).$$

Zweitens beachte man, dass nach hekanntesten Sätzen:

$$(a \neq\!\!\!\in b)(a \neq 0) = (ab_1 = 0)(ab + ab_1 \neq 0) = (ab_1 = 0)\{(ab \neq 0) + (ab_1 \neq 0)\}$$

sein wird. Wegen der Voraussetzung $ab_1 = 0$ darf aber in der Summe $ab + ab_1$ der letzte Term als verschwindend unterdrückt werden, wodurch wir $(ab_1 = 0)(ab \neq 0)$ oder $(a \neq\!\!\!\in b)(ab \neq 0)$ als Folgerung erhalten, somit auch die umgekehrte Suhsumtion bewiesen ist:

$$(a \neq\!\!\!\in b)(a \neq 0) \neq\!\!\!\in (a \neq\!\!\!\in b)(ab \neq 0)$$

— oder anders: es durfte oben heim Ausmultipliziren der letzte Term als Inkonsistenz unterdrückt werden. — Am schnellsten folgt ζ) aus Th. $20_\times$) und § 41, δ).

[Um den vorhin ausgeführten Schluss

$$(c = 0)\{f(c) \neq 0\} \neq\!\!\!\in \{f(0) \neq 0\}$$

(bei welchem wir ab_1 kürzer durch c dargestellt haben) *rein rechnerisch* zu begründen, kann man auch so verfahren. Es ist nach Th. $\bar{6}_\times$):

$$(c = 0)\{f(c) \neq 0\} \neq\!\!\!\in (c \neq\!\!\!\in 0)$$

und ferner ist: $(c = 0) \neq\!\!\!\in \{f(c) = f(0)\}$ — sowie überhaupt:

$$(b = a) \neq\!\!\!\in \{f(b) = f(a)\}$$

— in Anhetracht, dass es in jedem Funktionsausdruck nach Th. 32), Zus. 2, vergl. § 29, gestattet ist, Gleiches für Gleiches zu setzen. Dies gibt also auch a fortiori:

$$(c = 0)\{f(c) \neq 0\} \neq\!\!\!\in \{f(c) = f(0)\}$$

und dieses wiederum:

$$(c = 0)\{f(c) \neq 0\} ⋹ \{f(c) = f(0)\}\{f(c) \neq 0\},$$

z. B. wenn beiderseits mit dem letzten Faktor multiplizirt.

Nach dem bereits rechnerisch bewiesenen Th. δ) des § 41 folgt ferner:

$$\{f(c) = f(0)\}\{f(c) \neq 0\} ⋹ \{f(0) \neq 0\},$$

sonach a fortiori: $(c = 0)\{f(c) \neq 0\} ⋹ \{f(0) \neq 0\}$,

q. e. d. Der hiemit bewiesene Schluss ist nur ein besondrer Fall, eine Exemplifikation des folgenden:

$$(b = a)\{f(b) \neq c\} ⋹ \{f(a) \neq c\},$$

welcher leicht rechnerisch ebenso zu beweisen wäre.]

Ebenso wie der Hauptmodus Bamalip verhalten sich die fünf Nebenmodi oder abgeschwächten Formen:

Barbari, Celaront, Cesaro, Camestros, Calemos,

welche ja mit dem korrespondirenden Hauptmodus (demjenigen, dessen Name mit dem ihrigen bis auf die Endsilbe übereinstimmt) jeweils die Prämissen gemein haben und deshalb in der That einen gültigen Schluss, nämlich die Konklusion des Hauptmodus zulassen. Diese gibt nun aber die Konklusion des Nebenmodus nicht vollständig, sondern angeblich „abgeschwächt" wieder.

Untersuchen wir jedoch die Berechtigung zu dem bei dieser Abschwächung beobachteten Verfahren.

Bei den in Frage kommenden 5 Hauptmodi (Barbara, Celarent, Cesare, Camestres und Calemes) — es sind das diejenigen der ersten Gruppe von C) des § 43 — ist die Konklusion und volle Eliminationsresultante ein universales Urteil, und zwar ist dieses bejahender Art: $a ⋹ c$ bei dem ersten, verneinender: $a ⋹ c_1$ bei den vier letzten dieser 5 Modi. Die übrigen traditionellen Syllogismen dagegen entbehren einer universalen Konklusion.

Es frägt sich daher nur, ob die Abschwächung eines universalen Urteils, wie

„Alle a sind c, resp. nicht-c"

in ein partikulares:

„Einige a sind c, resp. nicht c"

gestattet ist, wie dies die traditionelle Logik behauptet, indem sie diesen Prozess als eine Schlussfolgerung durch *„Subalternation"* bezeichnet. Vergl. Fig. 10 in § 33, S. 86.

Die exakte Logik zeigt, dass dies *nicht* der Fall sein kann, indem für $a = 0$, das ist für den Fall, wo es keine a gibt, die Prämisse

$a \subseteq c$ resp. $a \subseteq c_1$ noch wahr ist, die Konklusion $ac \neq 0$ resp. $ac_1 \neq 0$ aber sich als falsch herausstellt.

Erst wenn zu der genannten Prämisse auch noch die Annahme $a \neq 0$, d. h. die Voraussetzung, dass es Individuen von der Klasse des Subjektes *gebe*, als eine weitere Prämisse hinzugefügt ist, wird der Schluss stichhaltig. Wir haben dies für das bejahende Urteil (mit vertauschtem a und c) schon unter Bamalip gezeigt, und das Ergebniss der Betrachtung in einem besondern Satze $\mathfrak{z}$) formulirt. Ersetzt man in $\mathfrak{z}$) b durch c resp. c_1, so gelangt man, dies Theorem rückwärts lesend und auf die linke Seite das Th. $\mathfrak{G}_\times$) des Aussagenkalkuls anwendend, zu den Schlüssen:

$$(a \neq 0)(a \subseteq c) \subseteq (ac \neq 0), \qquad (a \neq 0)(a \subseteq c_1) \subseteq (ac_1 \neq 0)$$

welche die obige Angabe rechtfertigen.

Dieselben zeigen zugleich, wie die in ihrer bisherigen Fassung noch lückenhaften oder enthymematischen „abgeschwächten Modi“ zu gültigen Schlüssen — mit unfehlbar richtiger, wenngleich unvollständiger Konklusion — zu ergänzen sind: dies hat einfach zu geschehen durch Hinzufügung des Faktors $a \neq 0$ zu dem Produkte der bereits angeführten Prämissen. So wird denn:

$$(a \neq 0)(a \subseteq b)(b \subseteq c) \subseteq (ac \neq 0)$$

— d. i. ε) mit vertauschtem a und c — den nunmehr richtig gestellten Schluss Barbari darstellen, und sind darnach auch die übrigen abgeschwächten Formen jetzt leicht berichtigt hinzuschreiben.

Zu merken ist hienach: dass ein *Folgern durch Subalternation in der exakten Logik unzulässig ist.*

Und da mit dieser Art von Schlussfolgerungen sich auch noch eine andere Folgerungsweise der traditionellen Logik: die sogenannte *„Konversion durch Limitation“*, *„conversio per accidens“* auf das naheste verwandt erweist, so wollen wir den Anlass ergreifen, die „Konversion“ überhaupt zu besprechen.

Die Konversion gehört (ebenso wie die „Subalternation“) zu den sogenannten *„unmittelbaren Folgerungen“*. Als solche, soweit sie in den Rahmen des Klassenkalkuls fallen, kann man bezeichnen: die Ableitung eines kategorischen Urteils aus (nur) *einem* andern.

Wir haben deren bereits eine grosse Menge kennen gelernt, darunter solche, bei denen ausser den beiden als Subjekt und Prädikat in der Prämisse auftretenden Termen in der Konklusion auch noch andere Terme als neu introduzirte vorkommen — wie z. B. den Schluss von $a \subseteq b$ auf $ac \subseteq bc$ — desgleichen solche, bei denen Terme sich eliminirten, heraus-

fielen — wie bei dem Schlusse von $a \neq\!\!\!\in bc$ auf $a \neq\!\!\!\in b$, oder von $ab \neq 0$ auf $a \neq 0$.

Im engsten Sinne sollen die „unmittelbaren Folgerungen" blos angeben — wenn ein kategorisches Urteil (von einer der vier Arten) zwischen zwei Termen gegeben ist, welche andern kategorischen Urteile (wiederum von einer dieser vier Arten) *in Bezug auf diese nämlichen beiden Terme* daraus gefolgert werden können.

Eine solche Folgerung heisst *Konversion*, wenn Subjekt und Prädikat der Prämisse in der Konklusion bezüglich auftreten als Prädikat und Subjekt — wenn dieselben mithin beim Schliessen ihre Rollen getauscht, ihren Charakter verkehrt, konvertirt haben.

Die Frage ist also, falls man für A als Subjekt und B als Prädikat die vier Urteile a, e, i, o des § 33 hinschreibt und dasselbe hernach thut für B als Subjekt und A als Prädikat: welches von den erhaltenen acht Urteilen:

$$A \neq\!\!\!\in B, \quad A \neq\!\!\!\in B_1, \quad AB \neq 0, \quad AB_1 \neq 0$$
$$B \neq\!\!\!\in A, \quad B \neq\!\!\!\in A_1, \quad BA \neq 0, \quad BA_1 \neq 0$$

aus irgend einem andern von ihnen gefolgert werden könne?

Es liessen sich $8 \times 7 = 56$ Paare von Urteilen aus diesen 8 Urteilen herstellen, von welchen also jeweils die Frage zu beantworten wäre, ob das zweite Urteil des Paares aus dem ersten folgt oder nicht.

Die Frage lässt sich indessen summarisch dahin erledigen: Zufolge der Äquivalenz von einzelnen laufen die acht Urteile auf nur sechs verschiedene hinaus, nämlich auf die nachfolgend in Klammern angeführten:

$$(A \neq\!\!\!\in B) = (AB_1 = 0), \qquad (B \neq\!\!\!\in A) = (BA_1 = 0),$$
$$(A \neq\!\!\!\in B_1) = (AB = 0) = (BA = 0) = (B \neq\!\!\!\in A_1),$$
$$(AB \neq 0) = (BA \neq 0),$$
$$(AB_1 \neq 0), \qquad (BA_1 \neq 0)$$

und von diesen wird der Leser, auf Gebiete oder auch auf Klassen (inclusive 0 oder 1) exemplifizirend, mit grösster Leichtigkeit darthun, dass *kein einziges* aus einem andern gefolgert werden kann. Diese sechs sind *gänzlich unabhängig von einander*.

Jede Subsumtion, angesetzt zwischen zweien von diesen sechserlei Aussagen, läuft zudem nicht auf eine Formel, sondern vielmehr auf eine Relation hinaus (vergl. § 20 und 32) — ein Umstand, dessen empirische Verifikation vereinfacht werden kann durch die Bemerkung, dass die sechs Aussagen zerfallen in zwei Tripel von einander paarweise entsprechenden:

$$AB = 0, \quad AB_1 = 0, \quad A_1B = 0,$$
$$AB \neq 0, \quad AB_1 \neq 0, \quad A_1B \neq 0$$

dergestalt, dass die entsprechenden eines Paares immer Negationen von einander sind, während die eines jeden Tripels mittelst Buchstabenvertauschung in einander überführbar.

Die verbale Logik unterscheidet nun: die *einfache* Konversion, *conversio simplex* (S. 224) als einen auf das *bejahende partikulare* Urteil anwendbaren Prozess des Schliessens, durch welchen aus

„Einige A sind B" folgt „Einige B sind A"

und zu dem die Berechtigung im Hinblick auf die Kommutativität der Multiplikation daraus erhellt, dass

$$AB \neq 0 \quad \text{oder also auch} \quad BA \neq 0$$

der gemeinsame Ausdruck der beiden Urteile ist — vergl. § 41, δ).

Sodann die Konversion *durch Kontraposition,* auch kurz blos Kontraposition genannt, anwendbar auf das *verneinende universale* Urteil, mittelst welcher aus

„Kein A ist B" oder „Alle A sind nicht-B"

auch folgt:

„Kein B ist A" oder „Alle B sind nicht A" —

und deren Berechtigung aus den Theoremen 38) und 37) erhellt, unter deren letzterem sie auch bereits erwähnt wurde; in Anbetracht dass eben $(AB = 0) = (A \neq\!\!\in B_1) = (B \neq\!\!\in A_1)$ einander äquivalente Ausdrücke für Prämisse sowol als Konklusion sind (S. 225).

Bei diesen beiden Arten der Konversion bleibt Qualität und Quantität des Urteils unverändert; es stimmen in beiderlei Hinsichten Prämisse und Konklusion miteinander überein. Aus diesem Grunde pflegt eine jede dieser Konversionen als eine *„reine"*, *conversio pura* bezeichnet zu werden, im Gegensatz zu einer vermeintlich zulässigen „unreinen" Konversion, conversio impura, bei welcher in der Schlussfolgerung das Urteil in mindestens einer dieser beiden Hinsichten abgeändert erscheint.

In Bezug auf die Quantität wäre dies in der That der Fall bei der oben erwähnten „Konversion durch Limitation", conversio per accidens, gemäss deren man aus

„Alle A sind B" resp. „Kein A ist B"

glaubte folgern zu dürfen:

„Einige B sind A" resp. „Einige B sind nicht-A"

Eine solche Folgerung ist nun aber hier ganz und gar nicht berechtigt, indem jede auf die oben schon zurückgewiesene „Subalternation"

hinausläuft — die erste links nämlich dadurch, dass man ihre Konklusion vermittelst der berechtigten conversio simplex sich umschreibt in die damit äquivalente: „Einige A sind B", die letztere rechts dagegen, nachdem man ihre Prämisse in „kein B ist A" oder „Alle B sind nicht A" durch Kontraposition umgeschrieben.

Es ist also ferner zu merken: *Von den Konversionen der traditionellen Logik ist nur die conversio pura in der exakten Logik zulässig.*

Unreine Konversion könnte nur gerechtfertigt erscheinen bei Zugrundelegung einer Mannigfaltigkeit, welcher die Null nicht adjungirt worden, bei welcher also es sozusagen verboten wäre auch von dem Nichts mit zu reden, vielmehr das kategorische Urteil stets die Existenz des Subjektes postulirte (und das hypothetische Urteil immer nur dann an einen Bedingungssatz auch einen Folgesatz knüpfen dürfte, wenn die Bedingung des erstern als verwirklicht, resp. allerwenigstens als realisirbar, nachgewiesen worden). Auf dieser Basis ist eine *konsequente* Logik indessen noch nicht geschrieben; auch müsste einer solchen ein gutes Teil von Einfachheit und Allgemeinheit der Gesetze — wie solche der exakten Logik eigen — abgehn.

Dann freilich könnten wir ein Urteil, wie „Alle Möpse sind Hunde" auch zweimal konvertiren — so wie es Lotze[1] p. 105 andeutet — und würde erstmals sich durch die (oben zurückgewiesene) unreine Konversion ergeben: „Einige Hunde sind Möpse", und daraus durch abermalige, und zwar jetzt durch die berechtigte, nämlich reine Konversion: „Einige Möpse sind Hunde".

Anlässlich dieses Beispiels wollen wir noch einer falschen Auffassung entgegentreten..

Die Prämisse des letzten Schlusses könnte als Konklusion der vorhergehenden Prämisse auch in der exakten Logik gelten, wenn man diese durch den Zusatz „Es gibt Möpse" ergänzte und so den hier ein Enthymem zu nennen gewesenen Schluss vervollständigte.

Auch ohne solche Herleitung mag man aber auch den Satz: „Einige Hunde sind Möpse" als einen materiell richtigen adoptiren und auf ihn als auf eine Prämisse vermittelst der berechtigten einfachen Konversion den Schluss bauen: „Ergo, einige Möpse sind Hunde".

Wenn man hienach nicht mehr zu dem ursprünglichen Urteil (Alle Möpse sind Hunde) zurückkommt, vielmehr die logischen Operationen hier nur „den Erfolg gehabt haben, einen Teil der Wahrheit aus dem Wege zu schaffen", so kann man Lotze's Ausführungen doch im ganzen beistimmen: wenn er jenes auch als eine „Unschicklichkeit" bezeichnet, so lässt er doch den Schluss sowol als seine Konklusion wenigstens als richtig gelten.

Darüber hinaus geht aber zu meiner Verwunderung F. A. Lange[1], p. 57 und 58 (vergl. auch p. 67): „Aus der vollständigen Erkenntnis, dass alle Körper der Gravitation unterworfen sind, kann ich nimmermehr die unvollständige Erkenntniss ableiten, dass mindestens ein Teil der Körper Gewicht hat. Aus der Gewissheit kann nimmermehr die Ungewissheit

folgen. ... Sagt man .. aus dem Urteil »alle Menschen sind sterblich« *folge* das Urteil »mindestens einige Menschen sind sterblich«, so leitet man aus der Gewissheit die Ungewissheit ab, was offenbar widersinnig ist."

Dies ist durchaus nicht gelten zu lassen: Selten ist ja die Konklusion logisch äquivalent *mit*, eine blosse Umschreibung, Transformation *von* der Prämissengruppe, und niemals reicht sie beim *deduktiven* Schliessen noch über diese hinaus. Bei fast jeder deduktiven Folgerung wird vielmehr ein Teil der in den Prämissen enthaltenen Informationen unterdrückt, fallen gelassen, eliminirt. Und könnte man mit demselben Rechte schon in Bezug auf das deduktive Schliessen überhaupt die obige Phrase anwenden: aus dem Wissen folge die Unwissenheit, was absurd sei, um daraufhin dasselbe ganz zu verwerfen. Unter der Herrschaft dieser Phrase verrät Lange eine totale Verkennung des eigentlichen Wesens der Deduktion, die mit den sonst so treffenden Ausführungen des scharfsinnigen Meisters schwer vereinbar erscheint.

So lassen wir ja bei Anwendung des Syllogismus Barbara auch allemal unsere Kenntniss von dem Mittelgliede b fallen! In der Arithmetik dürfte z. B. ein Schluss von $a = b + 5$ auf $a > b$ auch keine Folgerung genannt werden, indem er aus der „Gewissheit", dass die Zahl a die b um 5 übertrifft, die „Ungewissheit" folgen liesse, um wie viel denn a grösser ist, als b!

Noch mehr: bei jeder Abstraktion schon, auch bei der Bildung eines Begriffes, lassen wir die Kenntniss der notae accidentales, der zufälligen oder nebensächlichen Merkmale der unter ihn fallenden Individuen zurücktreten, verblassen, und wäre ebendarum auch die Begriffsbildung selbst zu verwerfen!

Analog haben wir nun oben bei der Ableitung des Schlusssatzes: „Einige Möpse sind Hunde" nur einfach den Teil unsres Wissens fallen lassen, welcher uns darüber aufklärte, in uns die Überzeugung forterhielt, dass auch die übrigen Möpse Hunde seien. Wir reklamirten eben das Recht, auf diesen Wissensteil verzichten zu dürfen oder enthielten uns, davon Gebrauch zu machen, und hatten eine vollkommen korrekte Folgerung. Ein Vorteil, freilich welcher aus solchem Verzicht resultiren könnte, ist in dem erwähnten Beispiel ohne weiteres nicht abzusehen und in Bezug auf das psychologisch irreführende Moment, welches in dem Schlusssatze gelegen und denselben auch für die Diskussionen des gemeinen Lebens ungeeignet erscheinen lässt, wären ähnliche Bemerkungen am Platze, wie die, welche wir schon in § 4 an ein anderes typisches Beispiel angeknüpft haben.

Zutreffend sagt De Morgan[2] p. 56: *„Einige"* in der Logik heisst *„eines oder mehr und vielleicht alle"*. Wer da sagt *„einige sind .."*, dem darf nicht die Meinung untergelegt werden *„die übrigen* (the rest) *seien nicht .."*. In gewöhnlicher Rede würde der Satz ..: „Einige Pferde sind von ihren Reitern durch ihre Gestalt unterscheidbar" für falsch erachtet werden, indem die gewöhnliche Verkehrssprache wenn sie das umständlichere („complex") partikulare Urteil fällt, dem „einige sind" die Nebenbedeutung unterlegt, dass auch einige nicht sind. Der Studirende kann nicht sorgfältig genug in dieser Hinsicht sein.

Wenn aber De Morgan noch hinzufügt, eine partikulare Proposition

sei (in der Logik) nur eine *eventuell partikulare* (d „may be particular"), so können wir dies hier nur cum grano salis gelten lassen, hier, wo das partikulare Urteil sich immer wesentlich vom universalen unterscheidet dem in der exakten Logik ja nichts von einer Existenzbehauptung anhaftet.

Das partikulare Urteil schliesst uns das entsprechende universale nicht aus; vielmehr schliesst es das letztere möglicherweise ein, sagt aber im letzteren Falle noch mehr als dieses. —

Unvermerkt — etwa mit Lotze's Qualifikation jener Folgerung als einer „Unschicklichkeit" — ist uns mit den letzten Betrachtungen auch die Frage des *Wertes* eines Folgerungsverfahrens, wie z. B. auch der syllogistischen Figuren wieder näher gerückt worden.

Der Wert eines Schlussmodus ist überhaupt nicht eine Angelegenheit der Logik, sondern ausschliesslich Sache derjenigen Personen, die von ihm Gebrauch machen. Jenachdem er deren augenblickliche Zwecke fördert, oder aber deplacirt erscheint, wird ihm gelegentlich Wert oder Unwert zukommen. Jener hängt lediglich ab von der Gelegenheit, *bei* welcher, von der Art und Weise *auf* welche, und von den Zwecken *zu* welchen der Schlussmodus in Anwendung gebracht wird, und vermessen möchte es erscheinen, a priori für alle diese Möglichkeiten mit einem anerkennenden oder mit einem abfälligen Urteile *absprechen* zu wollen.

Aus diesem Grunde will ich auch die in § 4 schon begonnenen kritischen Erörterungen über den Wert der Syllogistik, nun, wo sie vollendet ist, nicht mehr weiter ausspinnen insbesondre auch, auf Angriffe wie die von Trendelenburg oder Kant[2] (vergl. die falsche Spitzfindigkeit der syllogistischen Figuren!) — die schon vielfach anderwärts Widerlegung gefunden haben — hier nicht weiter eingehen, mich vielmehr begnügen, nur eines noch hervorzuheben.

Von Verfechtern der Logik des Inhalts wird häufig gegen die „Gedankenlosigkeit" der partikularen Urteilsformen geeifert und insbesondre auch deren moderne Ausdrucksform mit „*Einige A* sind *B*" (gegenüber der griechischen und lateinischen mit τίς, aliquis) bemängelt.

Das wird begreiflich, wenn man in's Auge fasst, dass genau genommen partikulare Urteilsformen der Inhaltslogik gar nicht zugänglich sind zufolge des von ihr erhobenen Anspruches immer „nach dem Begriffe" zu denken, insbesondre also auch nur begrifflich bestimmte Subjekte zuzulassen.

Sagen wir nun z. B.: Einige Menschen sind schwarz, so frägt es sich, durch welches Merkmal das Subjekt „Einige Menschen" denn hier begrifflich bestimmt sein m. a. W. von welchen Menschen das Prädikat denn Geltung haben soll? Gewiss nicht von den Weissen, sondern gerade nur von den schwarzen unter den Menschen. So kommt die Logik des In-

haltes denn konsequenterweise dahin, den Subjektbegriff hier als durch das Prädikat selbst bestimmt ansehen zu müssen, und notwendig müsste ihr das partikulare Urteil erscheinen als ein blos identisches Urteil wie: Die schwarzen Menschen sind schwarz (oder wenn man will: sind schwarze Menschen)! Dies ist dann freilich „gedankenlos“.

Hand in Hand damit geht eine Geringschätzung auch der Schlussformen, die sich auf partikulare Urteilsformen gründen oder auf die Bildung solcher hinauslaufen.

Wer gegen die partikulare Urteilsbildung eifert verkennt indess ganz den eminent *induktiven* Charakter unsres gesamten Erkenntnissmaterials. All unser synthetisches (nicht-analytisches) Wissen verdanken wir unmittelbar oder mittelbar dem Induktionsverfahren. Unsre allgemeinen Wahrheiten positiven Inhaltes, sofern sie nicht schon aus andern ihresgleichen deduktiv gefolgert, sondern unmittelbar der Wahrnehmung oder Beobachtung entnommen wurden, kurz: *in letzter Instanz* sind sie alle durch induktive Verallgemeinerung aus *partikularen* Urteilen hervorgewachsen, in welchen zunächst die beobachteten Einzelfälle zusammengefasst worden. Diese *induktive Bedeutung* des partikularen Urteils hebt schon F. A. Lange[1] p. 60sq. gebührend und treffend hervor:

„Das partikulare Urteil kann sich thatsächlich nur auf die Beobachtung einzelner bestimmter Fälle stützen.“ ... Die Unbestimmtheit, welche dem Subjekte desselben anhaftet, „kann zunächst als Ausdruck der Vermutung gelten, dass es noch in andern Fällen ebenso sein werde, wie in den gefundenen; dahinter aber birgt sich das Suchen nach dem Allgemeinen“.

„Dies gesuchte Allgemeine ist keineswegs immer der Subjektsbegriff selbst, sondern in den meisten Fällen eine spezifische Differenz, ein durchschlagendes Merkmal, durch welches sich aus dem gegebenen Gattungsbegriff eine wohlbegrenzte Spezies ausscheidet. Sehr häufig aber, und bei den wichtigsten Entdeckungen, wird auch im Verfolg des induktiven Prozesses der gegebene Subjektsbegriff selbst durch das Resultat der Forschung verdrängt oder einer totalen Umbildung unterworfen. Die Auffindung des neuen Subjektsbegriffs ist ... vorbereitet durch den Verkehr des Geistes mit dem Gegenstande der Forschung, aber an sich willkürlich, wagend und neuen Zersetzungen und Umbildungen ausgesetzt.“

„Wiewohl die nähere Betrachtung dieses induktiven Prozesses keineswegs in die formale Logik gehört, so ist es doch natürlich und geboten“, eine Urteilsform, welche in diesem Prozess allein schon ihre Berechtigung hat, in die Technik hereinzuziehen und sie hier ausführlich zu behandeln, auch sie auf die Schlussformen, in die sie eingeht, zu untersuchen. —

Was nun die *hypothetischen Syllogismen* betrifft, so kommen für unsre Disziplin wesentlich nur diejenigen Modi in Betracht, in welchen keine partikularen Schlussglieder vorkommen. Da nämlich partikulare Urteile durch Ungleichungen, universale durch Gleichungen darzustellen sind (und umgekehrt), so laufen im Aussagenkalkul nach § 32, ζ) und η) auch die ersteren auf letztere hinaus. Hier ist speziell das partikular bejahende und das partikular verneinende Urteil:

$$(ab \neq 0) \quad \text{resp.} \quad (ab_1 \neq 0)$$

äquivalent dem „zerfallenden“ universalen Urteile:

$$(ab = 1), = (a = 1)(b = 1) \quad \text{resp.} \quad (ab_1 = 1), = (a = 1)(b = 0)$$

wonach a gilt und zugleich b auch gilt, resp. nicht gilt.

In Betracht kommen also nur die beiden ersten Modi der ersten sowie der zweiten Figur, als da sind:

II. Barbara: $(a \Subset b)(b \Subset c) \Subset (a \Subset c)$, Celarent: $(a \Subset b)(b \Subset c_1) \Subset (a \Subset c_1)$,

Cesare: $(a \Subset b)(c \Subset b_1) \Subset (a \Subset c_1)$, Camestres: $(a \Subset b_1)(c \Subset b) \Subset (a \Subset c_1)$.

Der erstere ist das Schema des (reinen) „hypothetischen Schlusses“ den wir schon früh erwähnten:

Wenn a gilt, so gilt b; Wenn b gilt, so gilt c. Ergo: wenn a gilt, so gilt c.

Und ebenso besagen die folgenden:

Wenn a gilt, so gilt b; Wenn b gilt, so gilt c nicht. Ergo: wenn a gilt, so muss c nicht gelten.

Wenn a gilt, so gilt b; Wenn c gilt, so gilt b nicht. Ergo: wenn a gilt, so kann c nicht gelten.

Wenn a gilt, so gilt b nicht; Wenn c gilt, so gilt b. Ergo: wenn a gilt, so gilt c nicht.

Der erstere ist auszudehnen — indem man mehr als zwei Prämissen in Betracht zieht — zu dem „zusammengesetzten hypothetischen Schlusse“, bei welchem man entweder *„episyllogistisch“* schliessen mag:

$$(a \Subset b)(b \Subset c)(c \Subset d) \Subset (a \Subset d)$$

entsprechend der Goclenius'schen, oder *„prosyllogistisch“*:

$$(c \Subset d)(b \Subset c)(a \Subset b) \Subset (a \Subset d)$$

entsprechend der Aristotelischen Anordnung der Prämissen beim Kettenschlusse im Klassenkalkul — oder auch mit ungeordneten (irgend-

wie geordneten) Prämissen.*) Auch lässt sich dabei jede einzelne Subsumtion noch vor- oder rückwärts lesen, wie z. B. $a \subseteq b$ als: „Wenn a gilt so gilt b“ sowol wie als: „b gilt, wann a gilt“; der Terminus minor involvirt den major, bedingt, zieht ihn nach sich; der major folgt aus dem minor, wird von ihm bedingt, etc. —

Da die Einteilungsgründe, unter welchen die verbale Logik die *zusammengesetzten* Syllogismen, und überhaupt Schlüsse, zu klassifiziren pflegt, vom Standpunkte unsrer Algebra als sehr wenig wissenschaftliche erscheinen und auch in keiner Weise zu vollständigen Aufzählungen führen, so wollen wir nicht allzuweit in dieses Gebiet eintreten, und von den traditionellen Schlussformen nur die geläufigsten mit berücksichtigen — mögen sie nun als kategorische im Klassenkalkul oder als hypothetische im Aussagenkalkul gedeutet werden.

Durch Verbindung der beiden Modi der ersten Figur, welche also den Mittelbegriff beidemal unnegirt enthalten, mit den Definitionen (3) entstehen die zusammengesetzten Schlüsse:

$$(s \subseteq a)(s \subseteq b)(s \subseteq c) \ldots (abc \ldots \subseteq p) \subseteq (s \subseteq p)$$

$$| \; (s \subseteq a + b + c \ldots)(a \subseteq p)(b \subseteq p)(c \subseteq p) \ldots \subseteq (s \subseteq p)$$

(in welchen natürlich auch noch p_1 für p gesagt werden kann und) welche einander dual entsprechen. Den ersten derselben — die Prämissen bis zur vorletzten incl. in $(s \subseteq abc \ldots)$ zusammengezogen — führt Sigwart[1] p. 412 und 413 als „Schluss aus einem konjunktiven Urteil“ an: Die s sind sowol a als b als c; was a, b und c zugleich ist, ist p, ergo: die s sind p.

Der zweite wird oft als „Induktionsschluss“ angeführt: man überzeugt sich darnach zum Beispiel empirisch, dass allen s das Prädikat p zukommt, indem man das gleiche nachweist für alle Kategorieen, Unterabteilungen einer die s unter sich begreifenden Klasse: Die s sind entweder a, oder b, oder c; die a sind p, die b sind p, die c sind p; ergo: die s sind p. Insbesondere kann man auch den Nachweis für

*) Bei der Mannigfaltigkeit der Weisen, auf welche Syllogismen zu zusammengesetzten Schlüssen verknüpft, kombinirt werden können, dient es der Bequemlichkeit Namen zu haben für die Beziehungen, in welchen die verknüpften Syllogismen zu einander stehen können. So wird ein Syllogismus, welcher eine Prämisse eines andern Syllogismus beweist oder begründet, (als Konklusion) liefert, ein *Prosyllogismus* des letzteren genannt, und dieser, welcher als eine Prämisse die Konklusion des ersteren enthält, derselben bedarf, heisst ein *Episyllogismus* von jenem.

die sämtlichen Individuen der Klasse s beibringen, und ist überhaupt eine der häufigsten Anwendungsweisen des Satzes die, bei der das erste Subsumtionszeichen sich als ein Gleichheitszeichen präsentirt.

Apelt[1] p. 17 führt als Beispiel an: Die Planeten sind: Merkur, Venus, Erde, Mars, etc. bis Neptun.

Merkur bewegt sich von West nach Ost um die Sonne;
Venus " " " " " " " "
die Erde " " " " " " " "
Mars " " " " " " " "
. . . .
Neptun bewegt sich von West nach Ost um die Sonne.

Ergo: die Planeten bewegen sich von West nach Ost um die Sonne. (Vergl. Sigwart[1] p. 414.)

Ich möchte für diesen Schluss höchstens die Bezeichnung als „eines *blos zusammenfassenden* Induktionsschlusses“ gelten lassen, weil von der im Wesen der „Induktion“ liegenden *Ausdehnung unsres Erkenntnissbereiches* nicht das geringste bei ihm zu verspüren ist, denselben aber am liebsten: das Dilemma im Klassenkalkul, „*Dilemma für Klassen*“ genannt wissen — in Anbetracht, dass mit ihm das, nur eben aussagenrechnerisch gedeutete, das *Dilemma* schlechtweg, der Form nach völlig zusammenfällt — vergleiche § 45.

Verbindet man die beiden der obigen vier Modi, welche den Mittelbegriff auch einmal negirt enthalten sonach der zweiten Figur angehören, mit den Theoremen 36), so entstehen nach dem Schema Cesare die beiden ersten, nach dem Camestres die beiden letzten von den vier folgenden Schlüssen:

$$(s ⋹ abc\,..)(p ⋹ a_1 + b_1 + c_1\,..) ⋹ (s ⋹ p_1) \mid$$
$$\mid (s ⋹ a + b + c\,..)(p ⋹ a_1 b_1 c_1\,..) ⋹ (s ⋹ p_1),$$
$$(p ⋹ abc\,..)(s ⋹ a_1 + b_1 + c_1\,..) ⋹ (s ⋹ p_1) \mid$$
$$\mid (p ⋹ a + b + c\,..)(s ⋹ a_1 b_1 c_1\,..) ⋹ (s ⋹ p_1).$$

Den letzten derselben führt Sigwart[1] p. 416 als „Schluss aus einem Divisions-Urteil in der zweiten Figur“ an: die p sind (p ist) teils a, teils b, teils c; s ist weder a noch b noch c; ergo: s ist nicht p.

Der Schluss bleibt auch in Kraft, wenn die Einteilungsglieder des p einander gegenseitig ausschliessen, wie in:

$$(p ⋹ ab_1c_1 + a_1bc_1 + a_1b_1c)(s ⋹ a_1b_1c_1) ⋹ (s ⋹ p_1)$$

— wie einerseits durch regelrechtes Eliminiren von a, b, c aus der vereinigten Gleichung der Prämissen:

$$p(ab + ac + bc + a_1 b_1 c_1) + s(a + b + c) = 0$$

zu sehen ist, welches die successiven Resultanten liefert:

$$pbc + s(b + c) + spb_1 c_1 = 0, \quad sc + spc_1 = 0, \quad sp = 0\ —$$

am besten aber, mittelst $ab_1c_1 + a_1bc_1 + a_1b_1c \Subset a + b + c$ nach Th. $6_\times$) und 17_+), auf den vorigen Schluss zurückgeführt wird.

Weiter seien noch angeführt die vier Schlüsse:

$$(s \Subset abc \cdot\cdot)(a \Subset p) \Subset (s \Subset p) \quad | \quad (s \Subset a)(a + b + c \cdot\cdot \Subset p) \Subset (s \Subset p);$$

$$(s \Subset abc \cdot\cdot)(p \Subset a_1) \Subset (s \Subset p_1);$$

$$(p \Subset abc \cdot\cdot)(s \Subset a_1) \Subset (s \Subset p_1),$$

deren erste beide einander dual entsprechen, wogegen wir zu den beiden letzten die dual entsprechenden nicht aufgeführt haben, weil sie in mindestens einem Schlussgliede ein negirtes Subjekt (allermindestens als Term) enthalten würden. Durch Einschaltung der nach Th. 6) ohnehin gültigen Subsumtion: $(abc \cdot\cdot \Subset a)$ — beim zweiten Schlusse der: $(a \Subset a + b + c \cdot\cdot)$ — zwischen die Prämissen gehen die beiden ersten in dreigliedrige Kettenschlüsse über, und ähnlich durch Zusammenziehung der nunmehrigen beiden ersten Prämissen gemäss II läuft der dritte Schluss auf Cesare, der vierte auf Camestres hinaus.

Auch diesen letzteren führt Sigwart[1] p. 413 als „Schluss aus einem konjunktiven Urteil" au, denselben dem oben bereits erwähnten zur Seite stellend, woraus zu ersehen, wie unter dem verbalen Gesichtspunkte oft wenig Verwandtes zusammengebracht wird. —

Die hier begonnenen Betrachtungen über zusammengesetzte Schlüsse werden im nächsten Paragraphen noch weiter fortgesetzt werden.

Wenn wir oben sagten, dass nur die universalen Syllogismen oder auch zusammengesetzteren Schlüsse, als „hypothetische", genauer: aussagenrechnerisch zu deutende, (für uns) in Betracht kämen, so erscheint es doch als bemerkenswert, dass hiezu noch ein Zugeständniss zu machen ist: Auch wenn wir die *affirmativen Existenzial*urteile $a \neq 0$ — die ja die bejahenden sowol als die verneinenden *partikularen* Urteile $ab \neq 0$ resp. $ab_1 \neq 0$ mit unter sich begreifen — etwa interpretirten nach dem Schema:

$a \neq 0$ solle heissen, dass die Aussage *a manchmal*, zuweilen, (nicht niemals), gilt —

so würden alle jene Schlussformen doch allerdings in Kraft bleiben und eventuell sich als unmittelbar einleuchtende darstellen lassen.

Bei Aussagen a von unveränderlichem Sinne, auf dergleichen allein nur unser Kalkul anwendbar erscheint, ist solches indessen nicht möglich, ohne dass dann a auch stetsfort gilt. Und wenn wir für Aussagen von mit der Zeit oder Anwendungsgelegenheit variirendem Sinne jene partikularen Schlussformen in Anspruch nehmen wollten, so müsste, um sie als wissenschaftlich begründete einzubürgern, doch erst die Art und Weise dieses Variirens näher definirt resp. gehörig eingeschränkt, etwa auf den Fall konstanten Wortlauts restringirt werden; auch würden wir allem Anschein nach Schlüsse erhalten, die weder in der Wissenschaft, noch im gemeinen Leben bislang eine Rolle spielen. —

Einundzwanzigste Vorlesung.

§ 45. Besonderheiten des Aussagenkalkuls im Kontrast mit dem Gebietekalkul. Dilemma, Modus ponens und tollens, disjunktiver Schluss. Formeln gemischter Natur.

In der fünfzehnten Vorlesung haben wir den Aussagenkalkul als besondern Fall des Gebietekalkuls hervorgehoben. Alle Formeln des letzteren galten auch im erstern, aber nicht umgekehrt; der Aussagenkalkul erwies sich als der formelreichere.

Dies ist nicht zu verwundern. Kann doch der Aussagenkalkul nichts anderes sein als der Gebietekalkul *in Verbindung mit der ihm gemachten Auflage, dass die allgemeinen Gebietsymbole in demselben lediglich der Werte* 0 *und* 1 *fähig sein sollten!*

So wenigstens insoweit man die Formeln desselben in's Auge fasst, die auch für Gebiete deutungsfähig erscheinen; dies erhellt aus dem Anblick der Formeln ζ) und η) des § 32. Freilich kommen dann auch noch Formeln im Aussagenkalkul hinzu, die im Gebietekalkul gar nicht interpretabel wären. Alle diese erwiesen sich als blosse Konsequenzen der Formel ε) des § 32, aus welcher auch die vorhin genannten hervorgingen. Und fortgesetzt werden auch alle ferneren Eigentümlichkeiten des Aussagenkalkuls sich lediglich als Folgerungen dieser einen Annahme ε) darstellen lassen. Genauer hätten wir also zu sagen: der Aussagenkalkul hebt sich aus dem Gebietekalkul hervor durch Hinzuziehung der Annahme § 32, ε):

$$(a = \dot{1}) = a$$

— mitsamt ihren Konsequenzen — zu den ohnehin gültigen Sätzen des letzteren.

Diese Annahme, jene Einschränkung, gestattet begreiflicherweise eine Menge von Folgerungen, die wenn sie fehlt, nicht gezogen werden können. Der Umstand schon, dass jedes Symbol nur entweder 0 oder 1 bedeuten dürfe, gibt dem Aussagenkalkul ein besonderes Gepräge, das dem allgemeinen Gebietekalkul, in welchem ausser 0 und 1 auch alle erdenklichen Zwischenwerte zwischen diesen beiden Grenzen zugelassen sind, abgehen wird.

Bis zu einem gewissen Grade hat sich uns dies schon in § 32 bestätigt.

Teils lernten wir dort solche Sätze kennen — wie die mit Stern versehenen δ), ζ), η) — die im Gebietekalkul zwar gelten können, aber nicht allgemein gelten, teils auch solche Sätze, die — wie ε), λ), μ), ν) — daselbst überhaupt keinen Sinn haben, ganz unverständlich oder *deutungsunfähig* erscheinen.

Was sollte man in der That sich unter einem Satze, wie λ)

$$(a \Subset b) = a_1 + b$$

denken, wenn a und b nicht Aussagen, sondern irgendwelche Gebiete, z. B. der Tafelfläche, vorstellen? Es erscheint doch absurd, die *Aussage*, das Urteil linkerhand, die behauptete Subsumtion $(a \Subset b)$ mit dem *Gebiete* rechterhand in λ), mit der Fläche $a_1 + b$ zu identifiziren!

Dergleichen im Gebietekalkul zunächst überhaupt nicht deutungsfähige Formeln des Aussagenkalkuls mögen hier *„Formeln von gemischter Natur"* heissen. Es kommen in denselben ausser einfachen Symbolen, wie 0, 1, A, B, ..., die uns gewisse oder auch irgendwelche Aussagen (von nur nicht näher angegebenem, oder von ganz offen gelassenem Inhalte) vertreten, auch *„spezifizirte"* Aussagen vor, wie $A \Subset B$, $1 \Subset C$, $A = B$, welche über jene Aussagen selbst wieder etwas — und zwar etwas ganz Bestimmtes — aussagen.

Es ist klar, dass jene einfachen Symbole alsdann nicht als (Punkt-) Gebiete, Flächen z. B., gedeutet werden können, wenn sie mit solchen spezifizirten Aussagen durch Rechenoperationen oder Vergleichungszeichen verknüpft, solchen vielleicht eingeordnet, oder gleich gesetzt erscheinen.

Da müsste denn doch erst eine Erklärung gegeben worden sein, was unter dem Produkt — z. B. — aus einer Aussage und einer Fläche verstanden werden solle, was die Subsumtion zwischen letztern auszudrücken habe, etc.

Im Klassenkalkul könnte bei Zugrundelegung einer gewissen Mannigfaltigkeit $\underline{1}$, jenes Produkt allerdings als bereits erklärt hingestellt werden, insofern dasselbe als „Nichts" zu interpretiren und mit $\underline{0}$ zu bezeichnen wäre, sintemal es nichts gibt, was zugleich jene Aussage und diese Fläche ist. Nur wäre zu beachten, dass nach § 9, χ, ψ) diese $\underline{0}$ von dem Nullgebiet 0 unsrer Punktmannigfaltigkeit, der Tafelfläche 1, *wohl* zu unterscheiden bleibt. In jener höheren Mn. könnte man auch die etwa zwischen einer Subsumtion und einer Fläche behauptete Ungleichheit allenfalls (als eine verständliche Behauptung) noch gelten lassen, indem es eben ganz und gar nicht zu rechtfertigen wäre, dieselben für identisch gleich zu erklären. Das Ungleichheitszeichen $\neq$ hätte dann aber sozusagen wieder einen andern Sinn, als wenn es in der niederen Mn. zwischen zwei Flächen-

symbole gesetzt wird: jene Ungleichheit wäre eine ganz selbstverständliche, analytische, und sie zu konstatiren: „nichtssagend". — Wir wollen in dieser Richtung nicht weiterfahren: das Gesagte wird bereits genügen um erkennen zu lassen, dass dergleichen Deutungsversuche bei unsern gemischten Formeln sicherlich ein nutzloses und müssiges Beginnen blieben. —

Indessen haben wir mit derartigen Formeln, mit Formeln von dieser und jener Art, nur so weit Bekanntschaft gemacht, als nötig war, jene Verifikation des identischen Kalkuls durch sich selbst (mittelst mechanischen Rechnens) vornehmen zu können, wie sie in § 32 durchgenommen wurde. Im Übrigen konzentrirten wir unsre Aufmerksamkeit auf die Formeln des *Gebiete*kalkuls, welche also für beide Kalkuln, auch für den mit Aussagen, maassgebend sind.

Demgegenüber wollen wir jetzt auf die dem Gebietekalkul *fremden* Sätze und Formeln des Aussagenkalkuls unser Hauptaugenmerk richten, solche thunlichst systematisch und vollständig aufsuchen.

Dieselben werden teils „gemischter Natur" sein, wodurch sie sich auf den ersten Blick als solche nur in der einen Disziplin gültige, (weil nur in ihr interpretable) zu erkennen geben. Teils aber auch werden sie „reine" Sätze oder Formeln sein (soll heissen: solche von reinem Charakter), die auch eine Deutung der in sie eingehenden Buchstaben als Flächen oder Gebiete, Klassen zulassen würden, dann aber keine allgemeine Geltung zeigen, die also im Gebietekalkul auf den ersten Blick zu urteilen zwar gelten *könnten* aber nicht gelten *müssen*, nicht unbedingt, notwendig gelten — welch' letzteren mit einem Stern auszuzeichnenden wir „die engere Geltung" vindiziren.

Von den zahlreichen Formeln dieser beiden Sorten ist nur eine kleine Gruppe von einiger, dann aber auch zumeist von grosser Wichtigkeit und wirklich vielfach für unser Denken maassgebend. Es sind das im allgemeinen diejenigen Formeln, in welchen nur *unverneinte* Umfangsbeziehungen vorkommen und wollen wir diese thunlichst von den übrigen gesondert in den Vordergrund stellen.

Um sogleich mit einem Paar von Sätzen zu beginnen, welche Herrn Peirce entgangen zu sein scheinen, so haben wir zu den seinerzeit in Theoremform ausgesprochenen Definitionen $(3_\times)$ und (3_+) — cf. § 29 — merkwürdigerweise *im Aussagenkalkul* die folgenden Gegenstücke. *Hier* ist nicht minder auch:

$$^*\alpha_\times)\ (ab \not\subseteq c) = (a \not\subseteq c) + (b \not\subseteq c) \quad | \quad ^*\alpha_+)\ (c \not\subseteq a+b) = (c \not\subseteq a) + (c \not\subseteq b),$$

wenn wir wiederum Buchstaben des kleinen Alphabets auch für Aussagen mitverwenden.

In der That ist bei $\alpha_\times$) die linke Seite:

$$A = (ab \Subset c) = (ab)_1 + c = a_1 + b_1 + c,$$

und die rechte:

$$B = (a \Subset c) + (b \Subset c) = a_1 + c + b_1 + c = a_1 + b_1 + c$$

— gemäss dem Schema λ) des § 32. Ebenso sind bei α_+) die beiden Seiten dieser Gleichung äquivalent ihrer Gültigkeitsklasse, welche sich für sie als die nämliche: $c_1 + a + b$ erweist und auch als die Aussage zu deuten ist, dass entweder c nicht gilt oder auch a oder b gilt.

Mc Coll[3] p. 16 gibt von den obigen Sätzen wenigstens diejenigen beiden Teilsätze, die in denselben mitgegeben erscheinen, wenn man die Gleichungen als Subsumtionen rückwärts liest, und zwar indem er diese Einordnungen wol als selbstverständliche hinstellt.

Ich habe die Sätze systematisch gefunden, indem ich mir die Aufgabe stellte — bei $\alpha_\times$) z. B. — wenn

$$z = (ab \Subset c), \qquad x = (a \Subset c), \qquad y \Subset (b \Subset c)$$

definirt wird, unter Elimination von a, b, c die Aussage z als Unbekannnte durch x und y auszudrücken. Die Ausführung ist in einer Hinsicht lehrreich.

Wir haben alsdann:

$$z = a_1 + b_1 + c, \qquad x = a_1 + c, \qquad y = b_1 + c$$

und können die Aufstellung der „vereinigten Gleichung" von diesen dreien, sowie die successive Elimination von a, b und c konform den Methoden des § 21 füglich dem Leser überlassen. Die Resultante lautet:

$$0 = x_1 y_1 z + (x + y) z_1$$

und ist dieselbe äquivalent ihrer Auflösung nach z, als welche sich zunächst ergibt:

$$z = x + y + u x_1 y_1,$$

wo u eine *unbestimmte* Aussage vorstellt. Diese letztere u ist aber hier *nicht* arbiträr oder willkürlich, weil z nicht blos durch die zur Auflösung vorgelegte Gleichung bestimmt erscheint, sondern von vornherein, schon anderweitig, *gegeben* ist. Einsetzung der Werte von x, y, z in die letzte Gleichung — wie sie angezeigt erscheint durch die Forderung, nunmehr die *Probe* der gefundnen Auflösung zu machen — gibt:

$$a_1 + b_1 + c = a_1 + b_1 + c + u a b c_1,$$

oder:

$$A = A + u A_1.$$

Damit aber diese Gleichung gelten könne, muss

$$u A_1 = 0$$

sein, wie man erkennt, indem man nach Th. 39) die Gleichung rechterhand auf 0 bringt, oder auch — noch bequemer — indem man sie beider-



seits mit A_1 mnltiplizirt Hiernach ist denn gefunden, dass $u x_1 y_1 = u a b c_1 = 0$ hier sein muss, m. a. W. dass $u = 0$ eine zulässige und die zweckmässigste von den für u zulässigen Annahmen wäre, und es bleibt:

$$z = x + y$$

als der zu entdecken gewesene Satz, q. e. d.

Die Sätze α) sind ebenso einfach als diejenigen der Def. (3), welche für unsern identischen Kalkul von so fundamentaler Bedeutung waren.

Während aber diese (3) nicht blos für Aussagen, sondern auch für beliebige Gebiete gültig bleiben, ist solches bei $\alpha_\times$) und α_+), wie schon angedeutet, nicht der Fall, und um das zu *beweisen*, genügt bereits der Hinweis auf ein Beispiel, in welchem sie nicht zutreffen.

Ein solches bietet die Figur $8_\times$, resp. 8_+ des § 6 — Bd. 1, S. 205. Daselbst erblickt man linkerhand ein Gebiet c, in welchem zwar das Gebiet ab enthalten ist, ohne dass jedoch entweder a oder b in diesem c enthalten wäre (m. a. W. während weder a noch b in ihm enthalten ist). Ebenso rechterhand ein in $a + b$ enthaltenes c, welches gleichwol weder in a noch in b enthalten ist.

In Worten klingt der Satz α_+) vollkommen selbstverständlich:

Wenn a oder b gilt sobald c gilt, so muss entweder a gelten, wann c gilt, oder es muss b gelten, wann c gilt, und umgekehrt.

Und er bildet offenbar ein Prinzip von welchem in unsern Überlegungen (wenn auch unbewusst) auf das häufigste Gebrauch gemacht wird.

Hiezu kommt noch, dass der Satz α_+) auch im Klassenkalknl Geltung beansprucht, wenn unter dem Zeichen c nicht von einer Klasse, sondern von *Individuen* einer solchen gesprochen wird — vergleiche § 47 — wie wir denn bei jenem angeblichen resp. vorgreifenden „Beweise" des Distributionsgesetzes in § 12 uns in ebendiesem Sinne auf ihn berufen mussten.

Weniger einleuchtend klingt der Satz $\alpha_\times$): Wenn die Aussage c gilt, sobald die Aussagen a und b gleichzeitig gelten, so muss entweder c gelten wann a gilt, oder es muss c gelten wann b gilt — und umgekehrt.

Dennoch ist auch dieser Satz korrekt und lassen beide Sätze mit dem gemeinen Verstand auch in folgender Weise sich begreifen:

Wir haben für die drei Aussagen a, b, c a priori folgende Möglichkeiten, wie sie gültig oder ungültig sein können, was die Symbole 1 resp. 0 andeuten:

Zu $\alpha_\times$) a, b, c	Zu α_+) a, b, c
×0 0 0*	×0 0 0*
×0 0 1*	0 0 1
0 1 0*	×0 1 0*
×1 0 0*	×1 0 0*
×0 1 1*	0 1 1*
1 0 1*	1 0 1*
1 1 0	×1 1 0*
×1 1 1*	×1 1 1*

Von diesen erfüllen die rechts mit Stern ausgezeichneten die Annahme:

$$ab \Subset c \qquad | \qquad c \Subset a + b$$

sintemal $0 \Subset 0$, $0 \Subset 1$ und $1 \Subset 1$, dagegen nicht $1 \Subset 0$ ist. Für die links mit Kreuz bezeichneten gilt sogar:

$$(a \Subset c)(b \Subset c), \qquad | \qquad (c \Subset a)(c \Subset b),$$

für die erste links unbezeichnete gilt nur $a \Subset c$, für die zweite nur $b \Subset c$. | für die letzte links unbezeichnete gilt nur $c \Subset a$, für die vorletzte nur $c \Subset b$.

Die Kontrole stimmt also, indem die 7 Fälle, wo mindestens eine von diesen letztern Aussagen mithin die rechte Seite des Theorems zutrifft, zusammenfallen mit den 7 rechts besternten Fällen in welchen auch die andre Seite des Theorems zutraf.

Der siebente Fall links und der zweite rechts ist der einzige, wo die eine (und dann ebenso auch die andre) Seite dieser Aussagenäquivalenz nicht zutrifft, etwas Falsches besagt. In jenen 7 Fällen lief unser Theorem auf die Identität $1 = 1$, in diesem einen Falle auf $0 = 0$ hinaus, d. h. es bewahrheitete sich durchaus.

Dehnt man die Sätze α) auch auf beliebig viele Operationsglieder (Terme) aus und verwendet dann zu ihrer abgekürzten Darstellung Produkt- und Summenzeichen, so entstehen bei der Annahme

$$c = 0 \qquad | \qquad c = 1$$

mit Rücksicht auf Th. $\bar{5}$) die beiden ersten von den folgenden vier Sätzen:

$$^*\beta_\times) \begin{cases} (\Pi a = 0) = \Sigma(a = 0) \\ (\Pi a \neq 0) = \Pi(a \neq 0) \end{cases} \qquad | \qquad ^*\beta_+) \begin{cases} (\Sigma a = 1) = \Sigma(a = 1) \\ (\Sigma a \neq 1) = \Pi(a \neq 1) \end{cases}$$

aus welchen die darunter gesetzten durch beiderseitiges Negiren, Kontraposition, gemäss Th. $\bar{32}$) und $\bar{36}$) hervorgehn.

Dieselben bilden das Gegenstück zur ersten Zeile der Theoreme § 40, β), erweisen sich indessen als blosse Umschreibungen von eben-

diesen auf Grund der Formeln § 32, ζ) und η). Analog könnte man dann auch noch die Formeln der zweiten Zeile von § 40, β) für den Aussagenkalkul um-schreiben. —

Die bemerkenswertesten (bis jetzt bemerkten) Formeln gemischter Natur will ich zunächst im Überblick hinsetzen. Sie sind, auf *zwei* allgemeine Aussagen a, b bezüglich, diese:

$\gamma_\times$)	$a ⋹ (b ⋹ a)$	γ_+)	$a_1 ⋹ (a ⋹ b)$
$\delta_\times$)	$a ⋹ \{(a ⋹ b) ⋹ b\}$	δ_+)	$b_1 ⋹ \{(a ⋹ b) ⋹ a_1\}$
$\varepsilon_\times$)	$(a ⋹ b)\, a ⋹ b$	ε_+)	$(a ⋹ b)\, b_1 ⋹ a_1$
$\zeta_\times$)	$\{(a ⋹ b) ⋹ a\} = a$	ζ_+)	$\{(a ⋹ b) ⋹ b_1\} = b_1$

$\eta_\times$) $\quad (a ⋹ b) + b = (a ⋹ b) = (a ⋹ b) + a_1 \quad (\eta_+$

und auf *drei* allgemeine Aussagen a, b, c bezüglich:

$\vartheta_\times$) $\{a ⋹ (b ⋹ c)\} = (ab ⋹ c) = \{b ⋹ (a ⋹ c)\}$ |

| ϑ_+) $\{a_1 ⋹ (c ⋹ b)\} = (c ⋹ a + b) = \{b_1 ⋹ (c ⋹ a)\}$

— mit raummangelshalber gebrochenem Mittelstriche; es soll dabei die Chiffrirung Bezug haben auf denjenigen Satz, welcher sich durch Vergleichung des mittleren Terms mit einem der beiden äussersten ergibt, wogegen die Gleichsetzung der beiden extremen Terme citirt werden mag als:

$\vartheta_\times{}^0$) $\{a ⋹ (b ⋹ c)\} = \{b ⋹ (a ⋹ c)\}$ | $\vartheta_+{}^0$) $\{a_1 ⋹ (c ⋹ b)\} = \{b_1 ⋹ (c ⋹ a)\}$.

Ähnlich wie bei ϑ) sollen die Chiffren gedeutet werden bei den Formeln:

$\iota_\times$) $\{a_1 + (b ⋹ c)\} = (ab ⋹ c) = \{b_1 + (a ⋹ c)\}$ |

| ι_+) $\{a + (c ⋹ b)\} = (c ⋹ a + b) = \{b + (c ⋹ a)\}$

welche sich als eine blosse Umschreibung der Formeln ϑ) nach § 32, λ) erweisen; desgleichen bei den Formeln:

$\varkappa_\times$) $\{(c ⋹ a) ⋹ b\} ⋹ (a ⋹ b) ⋹ \{c ⋹ (a ⋹ b)\}$ $(\gamma_\times$ |

| $\varkappa_+$) $\{(b ⋹ c) ⋹ a_1\} ⋹ (a ⋹ b) ⋹ \{c_1 ⋹ (a ⋹ b)\}$ $(\gamma_\times$

— aus denen nebenher ersichtlich ist, dass a fortiori:

$\lambda_\times$) $\{(a ⋹ b) ⋹ c\} ⋹ \{a ⋹ (b ⋹ c)\}$ somit $⋹ (ab ⋹ c)$. |

| λ_+) $\{(b ⋹ c) ⋹ a_1\} ⋹ \{c_1 ⋹ (a ⋹ b)\}$ somit $⋹ (a ⋹ b + c)$.

Die wichtigsten von diesen Sätzen dürften die ε) und ϑ) sein.

Viele von diesen Sätzen finden sich in [5] und [8] zerstreut bei Peirce,

so namentlich $\gamma_\times$), $\delta_\times$), die beiden, wie wir sehen werden, schon altbekannten ε), ferner $\vartheta_\times{}^0$) und $\varkappa_\times$). Formel $\zeta_\times$) gibt Peirce nur als Subsumtion statt Gleichung, vergl. [8] p. 189, Z. 3 v. u., auch war ihm bei γ_+) eine kleine Ungenauigkeit zu berichtigen — vergl. die (mir separat zugeschickten) Corrigenda seines Aufsatzes [5], Z. 10 und 14 v. o. Seine Formel [5] p. 31, Z. 2 u. 3 v. o. $a \Subset (a \Subset b) + b$ nebst Herleitung (und Satz am Schluss von p. 30) ist falsch und durch unser η) zu ersetzen. Nicht zu billigen dürfte auch in [8] p. 188 sqq. die Art sein, wie Klammern weggelassen werden.

Ausser dergleichen kleinen Berichtigungen lag mir ob, die Sätze dualistisch zu ergänzen, was bei den gemischten Formeln weniger nahe liegt als bei den andern, und weiter unten eine besondere Erläuterung beanspruchen wird; auch glaube ich mit $\vartheta_\times$) den wahren Grund für die Äquivalenz $\vartheta_\times{}^0$) hervorgehoben zu haben, welcher letztern übrigens Herr Peirce eine zu grosse Wichtigkeit beizulegen scheint, indem er sie [8] p. 188 sogar zu einem Prinzip erheben will.

Zunächst die Sätze aussagenrechnerisch zu **beweisen** ist nach den in § 32 vorgetragnen Methoden eine blosse Rechenübung.

Hiefür bedarf es z. B. nur der Ansätze:

zu $\gamma_\times$) $\quad a \Subset b_1 + a,$ $\qquad \delta_\times$) $\quad a \Subset (a_1 + b)_1 + b = ab_1 + b = a + b,$

zu $\varepsilon_\times$) $\quad (a_1 + b)\, a = ab \Subset b,$ $\qquad \zeta_\times$) $\quad (a_1 + b)_1 + a = ab_1 + a = a,$

zu $\vartheta_\times$) $\quad a_1 + b_1 + c = (ab)_1 + c,$ $\qquad \varkappa_\times$) $\quad (c_1 + a)_1 + b = a_1 c + b \Subset a_1 + b.$

Um sodann die nebeneinandergestellten Formeln als einander dualistisch entsprechende zu erkennen, muss man die gemischten sich erst in reine Formeln umgeschrieben denken.

Jede Formel gemischter Natur im Aussagenkalkul lässt sich in der That immer *in eine solche von reinem Charakter umschreiben.* Das Verfahren besteht darin, dass man von den „nicht spezifizirten" nämlich blos durch einen Buchstaben (wie a oder a_1) dargestellten Aussagen, welche in der gemischten Formel vorkommen, alle diejenigen in spezifizirte Aussagen umwandelt, welche nicht als Gebiete oder Klassen gedeutet werden könnten, indem sie eben mit spezifizirten Aussagen wie $(a \Subset b)$, $(a = 0)$, $(b \neq 1)$ etc. verknüpft erscheinen, sei es rechnerisch mittelst eines Operationszeichens wie $\cdot$, $+$, sei es vergleichend mittelst des Zeichens einer Umfangsbeziehung, wie Einordnung, Gleichheit oder deren Verneinungen. Zu jener Umwandlung aber verhilft das Schema ε) des § 32, nach welchem wir für a blos zu sagen brauchen: $(a = 1)$ und für a_1 auch werden sagen dürfen: $(a = 0)$.

Lässt man hernach den Tupfen über der 1 weg und deutet alle einfachen Symbole (anstatt als Aussagen) jetzt als Gebiete oder

Klassen*), so ist es ein Leichtes, die Formeln gemäss den am Schlusse des § 30 gegebenen Andeutungen „gebietsdual“ umzuschreiben und so eventuell erst ihr duales Gegenstück zu ermitteln.

In der That bekommen wir nun solchergestalt aus dem Obigen das Tableau von „reinen“ Formeln:

$$\gamma_\times)\quad (a = 1) \mathrel{=\!\!\!\!\in} (b \mathrel{=\!\!\!\!\in} a) \qquad\Big|\qquad \gamma_+)\quad (a = 0) \mathrel{=\!\!\!\!\in} (a \mathrel{=\!\!\!\!\in} b)$$

$$\delta_\times)\quad (a = 1) \mathrel{=\!\!\!\!\in} \{(a \mathrel{=\!\!\!\!\in} b) \mathrel{=\!\!\!\!\in} (b = 1)\} \qquad\Big|\qquad \delta_+)\quad (b = 0) \mathrel{=\!\!\!\!\in} \{(a \mathrel{=\!\!\!\!\in} b) \mathrel{=\!\!\!\!\in} (a = 0)\}$$

$$\varepsilon_\times)\quad (a \mathrel{=\!\!\!\!\in} b)(a = 1) \mathrel{=\!\!\!\!\in} (b = 1) \qquad\Big|\qquad \varepsilon_+)\quad (a \mathrel{=\!\!\!\!\in} b)(b = 0) \mathrel{=\!\!\!\!\in} (a = 0)$$

$${}^*\zeta_\times)\quad \{(a \mathrel{=\!\!\!\!\in} b) \mathrel{=\!\!\!\!\in} (a = 1)\} = (a = 1) \qquad\Big|\qquad {}^*\zeta_+)\quad \{(a \mathrel{=\!\!\!\!\in} b) \mathrel{=\!\!\!\!\in} (b = 0)\} = (b = 0)$$

$$\eta_\times)\qquad (a \mathrel{=\!\!\!\!\in} b) + (b = 1) = (a \mathrel{=\!\!\!\!\in} b) = (a = 0) + (a \mathrel{=\!\!\!\!\in} b) \qquad \eta_+)$$

$${}^*\vartheta_\times)\quad \{(a = 1) \mathrel{=\!\!\!\!\in} (b \mathrel{=\!\!\!\!\in} c)\} = (ab \mathrel{=\!\!\!\!\in} c) \qquad\Big|\qquad {}^*\vartheta_+)\quad \{(a = 0) \mathrel{=\!\!\!\!\in} (c \mathrel{=\!\!\!\!\in} b)\} = (c \mathrel{=\!\!\!\!\in} a + b)$$

$${}^*\varkappa_\times)\quad \{(c \mathrel{=\!\!\!\!\in} a) \mathrel{=\!\!\!\!\in} (b = 1)\} \mathrel{=\!\!\!\!\in} (a \mathrel{=\!\!\!\!\in} b) \qquad\Big|\qquad {}^*\varkappa_+)\quad \{(b \mathrel{=\!\!\!\!\in} c) \mathrel{=\!\!\!\!\in} (a = 0)\} \mathrel{=\!\!\!\!\in} (a \mathrel{=\!\!\!\!\in} b)$$

aus welchem ersichtlich ist, dass wir mit der dualen Umschreibung nur zuweilen auch noch eine Buchstabenvertauschung verbunden hatten.

In dieser Fassung zeigen die meisten dieser Formeln sogar die weitere Geltung, worauf die Abwesenheit des Sternes hinweisen soll, und auch die besternten Gleichungen ζ), ϑ) gelten für alle Klassen wenigstens einseitig, nämlich rückwärts als Subsumtionen gelesen.

Es erscheinen nämlich die Formeln γ) als blosse Umschreibungen der Definitionen (2), desgleichen die η), welche aus denen γ) — die erstere $\gamma_\times$) in der Gestalt $(b = 1) \mathrel{=\!\!\!\!\in} (a \mathrel{=\!\!\!\!\in} b)$ geschrieben — nach Th. $\overline{20}_+$) hervorgehen.

Ebenso erscheinen δ) und ε) als blosse Umschreibungen der Theoreme 5).

Dass auch im Klassenkalkul:

$$\zeta_\times'')\quad (a = 1) \mathrel{=\!\!\!\!\in} \{(a \mathrel{=\!\!\!\!\in} b) \mathrel{=\!\!\!\!\in} (a = 1)\} \qquad\Big|\qquad \zeta_+'')\quad (b = 0) \mathrel{=\!\!\!\!\in} \{(a \mathrel{=\!\!\!\!\in} b) \mathrel{=\!\!\!\!\in} (b = 0)\}$$

versteht sich nach dem Schema $\gamma_\times$) $A \mathrel{=\!\!\!\!\in} (B \mathrel{=\!\!\!\!\in} A)$ von selbst — vergleiche weiter unten die Formulirung dieses Schema's in Worten. Desgleichen gilt daselbst:

$$\vartheta_\times'')\quad (ab \mathrel{=\!\!\!\!\in} c) \mathrel{=\!\!\!\!\in} \{(a = 1) \mathrel{=\!\!\!\!\in} (b \mathrel{=\!\!\!\!\in} c)\} \qquad\Big|\qquad \vartheta_+'')\quad (c \mathrel{=\!\!\!\!\in} a + b) \mathrel{=\!\!\!\!\in} \{(a = 0) \mathrel{=\!\!\!\!\in} (c \mathrel{=\!\!\!\!\in} b)\}.$$

Denn ist — links z. B. — $ab \mathrel{=\!\!\!\!\in} c$, so reduzirt sich, wenn $a = 1$ ist, eben ab zu $1 \cdot b$ oder b, und gilt also auch $b \mathrel{=\!\!\!\!\in} c$; ist dagegen a nicht gleich 1, mithin $(a = 1) = 0$, so gilt die Behauptung des Theorems ohnehin, auch wenn b nicht $\mathrel{=\!\!\!\!\in} c$ sein sollte; und desgleichen für den Fall, wo ab nicht $\mathrel{=\!\!\!\!\in} c$ wäre, sagt das Theorem nichts aus, und gilt als ein „nichtssagendes“ auf die Prämisse 0 verweisendes jedenfalles.

---

*) Ohne Rücksicht darauf, ob sie dann auch mit der „weiteren Geltung“ fortbestehen werden.

Dass aber — um es wenigstens links vom Mittelstriche durchzusprechen — die vorwärtigen Subsumtionen:

$$*\zeta_\times') \quad \{(a \neq\!\!\!< b) \neq\!\!\!< (a = 1)\} \neq\!\!\!< (a = 1), \quad *\vartheta_\times') \quad \{(a = 1) \neq\!\!\!< (b \neq\!\!\!< c)\} \neq\!\!\!< (ab \neq\!\!\!< c),$$

$$*\varkappa_\times) \qquad \{(c \neq\!\!\!< a) \neq\!\!\!< (b = 1)\} \neq\!\!\!< (a \neq\!\!\!< b)$$

nur die engere Geltung haben werden, sieht man so: Ad $\zeta_\times'$) Entweder ist b so beschaffen, dass $(a \neq\!\!\!< b) = \dot{1}$ oder so, dass $(a \neq\!\!\!< b) = 0$ ist. Im ersten Falle muss in der That nach der Voranssetzung des Satzes und Th. $5_\times$) $(a = 1) = \dot{1}$ sein oder $a = 1$ gelten. Im letzteren Falle aber trifft die Voranssetzung des Satzes für ein beliebiges a schon zu, ohne dass doch $a = 1$ sein müsste. Also braucht der Satz nicht zu gelten. Und an die Annahme $(a = 1)$ resp. $(c \neq\!\!\!< a)$ der hypothetischen Prämisse von $\vartheta_\times$) resp. $\varkappa_\times$) lässt sich eine ähnliche Überlegung anknüpfen. Ist bei $\vartheta_\times$) wirklich $a = 1$, so muss laut Hypothesis $b \neq\!\!\!< c$, also wegen $ab \neq\!\!\!< b$ auch $ab \neq\!\!\!< c$ sein, wogegen für den andern Fall sich nichts behaupten lässt. Etc.

Überhaupt lassen die Formeln sowol in ihrer letzten, wie auch in ihrer früheren Fassung sich auf die mannigfaltigste Weise als selbstverständliche erkennen, sich auf andere und teilweise auch aufeinander zurückführen.

Um dies hervortreten zu lassen, will ich auch die Formel λ) des § 32: $(a \neq\!\!\!< b) = a_1 + b$ aus dieser ihrer gemischten Schreibnng noch, wie oben angegeben, in eine reine Formel umsetzen, wonach sie lauten wird:

$$\text{§ 32, } *\lambda) \qquad (a \neq\!\!\!< b) = (a = 0) + (b = 1)$$

und offenbar nur die engere Geltung besitzen kann.

Darnach, sowie auch schon bei der gemischten Schreibweise, erscheinen die Formeln γ) als unmittelbare Konsequenzen ebendieser kraft des Theorems $\bar{6}_+$). Ebenso lassen sich aus ihr die Formeln ε) und η) ableiten. Jene, z. B. $\varepsilon_\times$), indem man beiderseits mit $(a = 1)$ multiplizirt, rechts ausmultiplizirend das Th. § 32, α) $(a = 0)(a = 1) = 0$ berücksichtigt und endlich nach Th. $\bar{6}_\times$) schliesst $(a \neq\!\!\!< b)(a = 1) = (a = 1)(b = 1) \neq\!\!\!< (b = 1)$. Diese, z. B. $\eta_\times$), indem man beiderseits $(b = 1)$ addirt und rechterhand das Tautologiegesetz $\overline{14}_+$) berücksichtigt.

Wir wollen die Formeln jetzt wieder in ihrer konziseren Fassung — als gemischte Formeln S. 262 — in's Auge fassen und sie zunächst einmal in Worte kleiden:

$\gamma_\times$) *Gilt a, so gilt es auch dann, wann b gilt.*

γ_+) Gilt a *nicht*, so ist man *hier* berechtigt zu sagen es gelte b, wann a gilt — was immer für ein Urteil b auch vorstellen mag.

$\delta_\times$) *Wenn a gilt, so muss, wenn b aus a folgt, auch b gelten.*

δ_+) *Gilt b nicht, so kann, wenn b aus a folgt, auch a nicht gelten.*

Hiernächst möchte ich etwas vorgreifend das Theorem ϑ) einschalten:

$\vartheta_\times$) *Es ist einerlei, ob wir sagen:*

„Wenn a gilt, so muss, falls b gilt, auch c gelten“, oder ob wir sagen:

„Wenn a und b zugleich gelten, so gilt auch c.“

Mit dem gleichen Rechte — symmetriehalber, weil $ab = ba$ — dürfen wir also für ersteres auch sagen: *„Wenn b gilt, so muss, falls a gilt, auch c gelten“* — was der Inhalt des Theorems $\vartheta_\times{}^0$) von Peirce ist.

Nach diesem Grundsatze $\vartheta_\times$) gehen nun offenbar die Theoreme ε) aus denen δ) oder umgekehrt hervor, und besagen beide somit im Grunde dasselbe.

Nach dem Schema:

$$\{A \in (B \in C)\} = (AB \in C)$$

werden wir nämlich haben

$$\{a \in [(a \in b) \in b]\} = \{a\,(a \in b) \in b\},$$

etc. Die Formel aber zur Linken des Gleichheitszeichens, mithin den Satz $\delta_\times$), leitet Peirce in interessanter Weise aus der Identität:

$$\underline{(a \in b)} \in (\underline{a} \in b)$$

des Prinzips $\bar{\mathrm{I}}$ nach dem ihm, wie erwähnt, als Prinzip geltenden Satze

$\vartheta_\times{}^0$) $$\{A \in (B \in C)\} = \{B \in (A \in C)\}$$

ab, indem er einfach die unterstrichenen beiden Minoren miteinander vertauscht; da nun die Identität $= \dot{1}$ ist, gilt, so muss darnach auch ihre legitime Transformation $= \dot{1}$ sein, gelten. Und ähnliches mehr.

Dies angeführte Beispiel mag ein Bild davon geben, was für mancherlei Schlussweisen in diesem Teile unsrer Disziplin möglich und effektvoll sind. Die Mannigfaltigkeit erscheint hier fast zu gross, um einigermassen erschöpft werden zu können. Und doch kann die Disziplin erst dann in ihrer Schönheit hervortreten, wenn man das Zusammengehörige auch vollständig vereinigt, wogegen die verzettelten Fragmente solche Schönheit noch vermissen lassen werden.

ϑ_+) nebst $\vartheta_+{}^0$) besagt: Folgt b aus c falls a nicht gilt, so muss, falls c gilt, a *oder* b gelten, sowie umgekehrt, und muss auch a aus c folgen wenn b nicht gilt.

Obwol sie, wie gezeigt, nur unwesentlich von denen δ) sich unterscheiden, wollen wir doch die Formeln ε) auch für sich noch betrachten.

$\varepsilon_\times$) $(a \in b)\,a \in b$ ist bekannt als der *„modus ponens* des gemischten hypothetischen Schlusses“ (auch als ein „konstruktiver“ Syllogismus):

Zugegeben: wenn a gilt, so gilt b. Nun gilt a. Ergo: gilt b. Und

ε_+) $(a \in b)\,b_1 \in a_1$ als der *„modus tollens“* desselben (ein „destruktiver“

Syllogismus): *Wenn a gilt, so gilt b. Nun gilt b nicht. Ergo gilt auch a nicht.*

Die Prämisse a bei dem modus ponens, b_1 bei dem modus tollens, heisst die „*Assumtion*".

Die Bezeichnung des hypothetischen Schlusses als eines „gemischten" soll den Gegensatz ausdrücken zu dem „reinen" hypothetischen Schlusse, welcher nach Prinzip II stattfindet: $(a \Subset b)(b \Subset c) \Subset (a \Subset c)$ — vergleiche den Schluss des § 44. —

Exempel. Wenn er sich wohl befindet, so kommt er. In der That ist er aber wohl, also kommt er. Resp. Nun kommt er aber nicht, also muss er unwohl sein.

Dagegen würden die Schlüsse:

Wenn er sich wohl befindet, so kommt er sicher. Nun kommt er; also befindet er sich wohl. Resp. Wenn er sich wohl befände, so käme er. Nun ist er aber krank, also kommt er nicht —

einfach Fehlschlüsse sein. (Vergl. Jevons [9] p. 145.)

Sich ähnlich auch mit der verbalen Formulirung der noch übrigen Sätze ζ), η), $\varkappa$) und λ) abzufinden, überlassen wir dem Leser. Dass die mit denen $\varkappa$) oben verschmolzenen Formeln sich nach dem angemerkten Schema $\gamma_\times$) hinzuergeben, wird ersichtlich, wenn man die Aussage $(a \Subset b)$ mit einem Buchstaben — d zum Beispiel — bezeichnet.

Was wir aber aus dem Bisherigen in Worte gekleidet haben, bekundet, dass auch in den gemischten und eigentümlichen Formeln des Aussagenkalkuls wichtige Sätze niedergelegt sind, die vielfach unsere verbalen Überlegungen und Diskussionen beherrschen, und schon deshalb verdienten, zum Bewusstsein gebracht zu werden. —

Es dürfte hier der Ort sein, mit der am Schlusse des § 44 begonnenen Betrachtung der traditionellen zusammengesetzten Schlüsse zu Ende zu kommen.

Als „*Dilemma*" wird bekanntlich bezeichnet der dort schon angeführte Schluss:

$$(s \Subset a + b + c \cdots)(a \Subset p)(b \Subset p)(c \Subset p) \cdots \Subset (s \Subset p)$$

wenn für den Aussagenkalkul gedeutet, wo er lauten wird: *Wenn s gilt, so gilt entweder a, oder b, oder c, ... Wenn nun a gilt, so gilt p, wenn b gilt, so gilt p, wenn c gilt, gilt p, ... Ergo: wenn s gilt, so gilt p.* Bewiesen dachten wir uns denselben durch Zusammenziehung — gemäss Def. (3_+) — aller seiner auf die erste folgenden Prämissen in: $(a + b + c \cdots \Subset p)$, und Anwendung von Prinzip II.

Damit solches „*Di*lemma" seiner Namenbildung entspreche, ist übrigens der obige Schluss wol auf nur *zwei* Terme des Major $a + b \cdots$ einge-

schränkt zu denken, und wäre ohne diese Einschränkung streng genommen nur die Bezeichnung desselben als des *erweiterten* Dilemma's (Polylemma) zulässig.

Wie weit übrigens in der Auffassung des „Dilemma" die Autoren anseinandergehen, geht z. B. daraus hervor, dass Jevons[6] p. 167 sq. desgleichen Keynes[1] p. 241 im Einklang mit Whately und Mansel[2] p. 108 hinstellen als „simple constructive dilemma" den aussagenrechnerischen Schluss:

$$(a \preceq b)(c \preceq b)(a + c) \preceq b,$$

als „complex constructive dilemma" diesen

$$(a \preceq b)(c \preceq d)(a + c) \preceq b + d$$

und endlich als „destructive dilemma" diesen:

$$(a \preceq b)(c \preceq d)(b_1 + d_1) \preceq a_1 + c_1$$

wobei sie noch — in Erschwerung der Übersicht — die Aussagen a, b, ... in Gestalt von A ist B, C ist D, ... spezifiziren.

Der erste von diesen Schlüssen kommt mittelst Def. (3):

$$(a \preceq b)(c \preceq b) = (a + c \preceq b),$$

der zweite mittelst Th. 17_+):

$$(a \preceq b)(c \preceq d) \preceq (a + c \preceq b + d)$$

auf den modus ponens, der dritte mittelst Th. $17_\times$):

$$(a \preceq b)(c \preceq d) \preceq (ac \preceq bd)$$

kraft Th. $36_\times$) auf den modus tollens zurück. —

Das „Epicheirem" der Scholastik verdient als ein unvollständiger (lückenhafter, enthymematischer) Schluss in *dieser* Theorie überhaupt keine Berücksichtigung. —

Auch frühere Schlussformen können nunmehr oft dilemmatisch bewiesen werden. Z. B. die durch

$$\alpha') \quad (x \preceq a) + (x \preceq b) + \cdots \preceq (x \preceq a + b + \cdots) \mid$$
$$\mid (a \preceq x) + (b \preceq x) + \cdots \preceq (ab \cdots \preceq x)$$

dargestellten, welche in den auf beliebig viele Terme ausgedehnten Formeln α) vom Eingang dieses Paragraphen mit enthalten sind.

Links z. B. wird man zu dem Ende blos aus jedem Alternativfall der Hypothesis vermittelst des Theorems 6_+) gemäss Prinzip II auf die Thesis des Satzes zu schliessen brauchen, so von $x \preceq a$ mit Rücksicht auf $a \preceq a + b + \cdots$ auf $x \preceq a + b + \cdots$; ebenso von $x \preceq b$ wegen $b \preceq a + b + \cdots$ auf $x \preceq a + b + \cdots$, etc. Und analog wird rechts die Überlegung beweiskräftig sein: nach der Voraussetzung ist *entweder* $a \preceq x$, und wegen

$ab \cdots \Subset a$ — cf. Th. $6_\times$) — dann auch $ab \cdots \Subset x$, *oder* es ist $b \Subset x$ und wegen $ab \cdots \Subset b$ dann auch $ab \cdots \Subset x$, *oder* etc.; sonach zieht die Voraussetzung in allen Fällen auch die Behauptung nach sich.

Man bemerkt, dass während den als Gleichungen angesetzten Formeln α) blos die engere Geltung zukam, den im Sinne von α') als Subsumtionen angesetzten sogar die weitere Geltung zukommen muss: diese gelten auch für Klassen, Gebiete, Systeme, jene blos für Aussagen. —

Als „*disjunktiven Schluss*" führt Sigwart den folgenden an mit dem „modus ponendo-tollens":

$$(a \Subset bc_1 + b_1c)(a \Subset b) \Subset (a \Subset c_1):$$

Wenn a gilt so gilt entweder b oder (aber) c. Nun muss, wenn a gilt, b gelten. Also wird dann c nicht gelten,
und mit dem „modus tollendo-ponens":

$$(a \Subset bc_1 + b_1c)(a \Subset b_1) \Subset (a \Subset c):$$

Wenn a gilt, so gilt b oder aber c. Falls a gilt, gilt nun aber b nicht. Also muss, wenn a gilt, c gelten.

Desgleichen für mehr disjunkte Terme, z. B. für dreie:

$$(a \Subset bc_1d_1 + b_1cd_1 + b_1c_1d)(a \Subset b) \Subset (a \Subset c_1d_1),$$

$$(\quad\quad ,, \quad\quad ,, \quad\quad)(a \Subset c_1d_1) \Subset (a \Subset b),$$

$$(\quad\quad ,, \quad\quad ,, \quad\quad)(a \Subset b_1) \Subset (a \Subset cd_1 + c_1d),$$

etc. welche Schemata leicht in Worte zu kleiden, z. B.: Wenn a gilt, so gilt entweder b, oder c, oder d — und zwar jeweils allein (ohne die beiden andern). Nun gilt, wenn a gilt, b; also gilt dann weder c noch d. Etc.

Um alle diese Schlüsse direkt rechnerisch zu beweisen wird man die vereinigte Gleichung der Prämissen für einen jeden derselben herstellen und aus derselben b — im vorletzten Falle c nebst d — eliminiren. Für jene erhält man unschwer:

$$a\,(b_1 + c) = 0, \quad \text{resp.} \quad a\,(b + c_1) = 0, \quad \text{resp.}$$

$$a\,(b_1 + c + d) = 0, \qquad a\,(b_1 + c + d) = 0, \qquad a\,(b + cd + c_1d_1) = 0,$$

— in Anbetracht dass $bc + bd + cd + b_1c_1d_1$ die Negation ist von

$$bc_1d_1 + b_1cd_1 + b_1c_1d,$$

wonach sich die drittletzte und die vorletzte Prämisse als äquivalent erweisen.

Die zugehörigen Resultanten sind bezüglich:

$$ac = 0, \quad ac_1 = 0, \quad a(c+d) = 0, \quad ab_1 = 0, \quad a(cd + c_1 d_1) = 0,$$

woraus auch zu ersehen, dass keine abgeschwächten Schlüsse vorliegen, dass vielmehr die obigen Konklusionen die vollen Resultanten darstellen.

Gebrauchte man statt des ausschliessenden das einschliessende „oder" — vergl. § 8, $\zeta, .. \vartheta$) — so ginge von den angeführten fünf Formen (während die erste und dritte keine Konklusion liefert) die zweite, vierte und fünfte Form über in:

$$(a \Subset b + c)(a \Subset b_1) \Subset (a \Subset c),$$

$$(a \Subset b + c + d)(a \Subset c_1 d_1) \Subset (a \Subset b), \quad (a \Subset b + c + d)(a \Subset b_1) \Subset (a \Subset c + d).$$

Von diesen drei Schlüssen fallen die letzten beiden aber unter das Schema des ersten, wie man sieht, wenn man in ihm $c + d$ für c setzt, eventuell nachdem man b mit c vertauschte.

Und jener erste ist ein *gültiger Schluss*, welcher leicht durch Elimination von b aus seiner vereinigten Prämissengleichung $ab_1c_1 + ab = 0$, oder wieder $a(b + c_1) = 0$, zu rechtfertigen. Es ist mir unbekannt, ob er in der traditionellen Logik einen Namen erhalten:

Wenn a gilt, so gilt b oder auch c. Nun gelte, wenn a gilt, b nicht. Dann muss, wenn a gilt, c gelten.

Da er aber sich einfacher darstellt und auch zu seiner Rechtfertigung ein wenig weniger Rechnung erforderte, so erscheint es naturgemäss, auf ihn mittelst der Bemerkung, dass

$$bc_1 + b_1c \Subset b + c, \quad \text{also} \quad (a \Subset bc_1 + b_1c) \Subset (a \Subset b + c)$$

ist, den „modus tollendo-ponens" zurückzuführen, wodurch die selbständige Begründung des letztern erspart wird. —

Im weitern Verfolg der spezifischen Gesetze des Aussagenkalkuls (im Vergleiche zum Gebietekalkul) gelangen wir nunmehr zu den minder wichtigen wenn auch noch bemerkenswerten Partieen derselben.

Sehr *paradox* erscheint auf den ersten Blick das als allgemeingültig in der That hinzustellende Formelpaar des Aussagenkalkuls:

$*\mu_\times) \quad (a \not\Subset b) \Subset (c \Subset a) \qquad | \; *\mu_+) \quad (a \not\Subset b) \Subset (b \Subset c)$

dessen erste Formel von Peirce[8] p. 187 gegeben ist — paradox aus dem Grunde, weil die Aussage c, über welche die Konklusion rechts berichtet, in der Prämisse links gar nicht vorkommt, diese also keinerlei Information über jene Aussage enthalten kann, während man nichtsdestoweniger berechtigt ist, den Schluss von der Aussage linkerhand auf die rechterhand als einen „deduktiven" zu bezeichnen.

Leicht ist zunächst der Beweis für die Formeln zu führen. Dieselben besagen, dass

$$(a_1 + b)_1 \subseteq c_1 + a \quad \text{oder} \quad ab_1 \subseteq a + c_1 \quad \Big| \quad ab_1 \subseteq b_1 + c$$

sei, und gelten — in Anbetracht, dass nach den Theoremen $6_\times$) und 6_+):

$$ab_1 \subseteq a \quad \text{und} \quad a \subseteq a + c_1 \quad \Big| \quad ab_1 \subseteq b_1 \quad \text{und} \quad b_1 \subseteq b_1 + c$$

ist — a fortiori, gemäss Prinzip II.

In Worten *könnte* man (sich versucht fühlen) das Theorem $\mu_\times$) — z. B. — so aus(zu)sprechen: *Wenn b nicht aus a folgt, so folgt a aus c* — und zwar, was auch immer für Aussagen, Urteile, Sätze oder Theoreme die drei Symbole **a, b, c** vorstellen mögen!

Gegenüber von Laien in Bezug auf unsre Disziplin wäre allerdings diese *Ausdrucksweise* zu beanstanden, indem sie in der That ein sehr stark irreführendes psychologisches Moment enthält, einesteils darin wurzelnd, dass wir mit dem Worte „folgen" gewohnt sind, die Vorstellung eines denknotwendigen Zusammenhangs zwischen der Voraussetzung und der Folgerung zu verknüpfen. Ein solcher Zusammenhang liegt bei dem ganzen Satze vor; derselbe lehrt, eine wirkliche und berechtigte Folgerung ($c \subseteq a$) aus einer Voraussetzung ($a \not\subseteq b$) ziehen. Nicht aber *muss* solcher Zusammenhang auch innerhalb der beiden durch „wenn" . . „so" verknüpften Teilurteile des Satzes oder Elemente des Schlusses gedacht werden (wenngleich sein Bestehen beim einen, bei dem andern oder bei allen beiden hier nicht ausgeschlossen ist); vielmehr ist hiebei nur an das faktische, vielleicht ganz extralogische und zufällige Zusammenbestehen ihrer Konklusion mit ihrer Prämisse zu denken, wie dasselbe durch jenen Satz: „Wann c gilt, dann gilt a" genauer ausgedrückt würde — ein Verhältniss, Verhalten, für welches jedoch unter den Substantiven und Verben die Wortsprache angemessen kurzer Ausdrucksformen entbehrt. Sagten wir für einmal auch: die Geltung von c *„zieht"* diejenige von a *„thatsächlich nach sich"*, *„ist von"* derselben *„vielleicht zufällig begleitet"*, so würde doch bei jedem Versuche, die Redensart abzukürzen wieder jenes Missverständniss nahe gelegt oder wenigstens zugelassen werden.

Zudem ist *in unsrer Disziplin* allemal noch auf den Fall, wo die Voraussetzung *nie* gilt, vielleicht gar nicht gelten *kann*, mit Rücksicht zu nehmen in der Weise, wie dies in § 28 auseinandergesetzt worden. Und der Kontrast dieser Forderung mit dem Unterbleiben ebendieser Rücksicht bei den Überlegungen, Räsonnements des gewöhnlichen Lebens verursacht in erster Linie das paradoxe Ansehen des Th. $\mu_\times$) in seiner ihm oben gegebenen verbalen Fassung.

Bringen wir uns die Bedeutung des Satzes noch deutlicher zum Bewusstsein, suchen wir ihn auch mit dem gemeinen Verstande zu begreifen.

Wie schon erwähnt kann jede Aussage nur entweder gelten ($= 1$ sein), oder nicht gelten ($= 0$ sein). Von den vier Möglichkeiten:

$$a = 0, \quad b = 0$$
$$a = 0, \quad b = 1$$
$$a = 1, \quad b = 0$$
$$a = 1, \quad b = 1$$

hebt die Voraussetzung unsres Satzes, welche ja die Subsumtion $a \preceq b$ verneint, die dritte hervor, wo a gilt, b nicht gilt.

Für die drei, andern Fälle haben wir dagegen $a \preceq b$, nämlich $0 \preceq 0$, $0 \preceq 1$ und $1 \preceq 1$ — alles zuwider der Hypothesis $a \not\preceq b$.

Unser Theorem sagt nun aus: *Wenn a gilt (und zugleich b nicht gilt), so gilt entweder a, oder es gilt c nicht.* Faktisch tritt sicher die erste Alternative ein — ganz einerlei, ob die zweite noch dazu gesetzt wird oder nicht: es gilt einfach a, und folglich gilt dieses a auch dann, wenn c gilt.

Die Annahme: $a =$ der Behauptung, dass $2 \times 2 = 4$ ist (welche unbestritten gilt), $b =$ der Behauptung: Es gibt Hexerei (welche entschieden nicht gilt) und $c =$ der Behauptung: Der dreidimensionale Raum ist Querschnitt einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit — würde eine Illustration zu dem Satze liefern, ganz einerlei, ob letztere c für wahr oder für falsch gehalten wird (ihre Richtigkeit ist bekanntlich noch unentschieden) — mag das Theorem exemplifiziren.

Man sieht auch, dass der vorhin in Klammer gesetzte Zusatz „(und zugleich b nicht gilt)“ vollkommen überflüssig ist. Der Satz muss sich vereinfachen lassen zu: $a \preceq (c \preceq a)$ — sein Gegenstück ebenso zu: $b_1 \preceq (b \preceq c)$ — und in dieser vereinfachten Gestalt fallen die Theoreme in der That zusammen mit den schon angeführten γ).

Insbesondre ist es natürlich gestattet, in $\mu_\times$) auch $c = b$, resp. in μ_+) $c = a$, anzunehmen wodurch die beiden Formeln übergehn in:

$$*\nu) \qquad (a \not\preceq b) \preceq (b \preceq a):$$

Ist es unrichtig, dass b gilt, wann a gilt, so muss a gelten, wann b gilt.

Verbindet man diesen Satz mit den vier Gleichungen von Def. (3) und α), so ergeben sich die acht Schlüsse:

$$*\xi)\begin{cases}(c \not\preceq ab) \preceq (a \preceq c) + (b \preceq c) & (a+b \not\preceq c) \preceq (c \preceq a) + (c \preceq b) \\ (ab \not\preceq c) \preceq (c \preceq a)(c \preceq b) & (c \not\preceq a+b) \preceq (a \preceq c)(b \preceq c) \\ \hline (c \not\preceq a) + (c \not\preceq b) \preceq (ab \preceq c) & (a \not\preceq c) + (b \not\preceq c) \preceq (c \preceq a+b) \\ (a \not\preceq c)(b \not\preceq c) \preceq (c \preceq ab) & (c \not\preceq a)(c \not\preceq b) \preceq (a+b \preceq c)\end{cases}$$

welche auf ihn auch zurückgeführt werden könnten, sonach weiter in Zusammenhang gebracht werden durch die Äquivalenzen:

$$o) \quad (c \not\preceq ab) = (c \not\preceq a) + (c \not\preceq b) \qquad\Big|\qquad (a+b \not\preceq c) = (a \not\preceq c) + (b \not\preceq c)$$

$$*\pi) \quad (ab \not\preceq c) = (a \not\preceq c)(b \not\preceq c) \qquad\Big|\qquad (c \not\preceq a+b) = (c \not\preceq a)(c \not\preceq b),$$

die sich aus jenen (3) und α) durch beiderseitiges Negiren gemäss Th. 32) und 36) ergeben, und deren ersterer natürlich, gleichwie der Def. (3) selbst, die weitere Geltung zukommt. Sie ist von Peirce[5] schon gegeben.

Hiezu ist noch anzuführen, dass wegen

$$ab \preceq a + b$$

auch sein wird:

$$(a+b \Subset c) \Subset (ab \Subset c) \quad | \quad (c \Subset ab) \Subset (c \Subset a+b)$$

gemäss Prinzip II und Th. $\bar{6}$) — vergl. auch die noch allgemeineren unter υ) des § 32 angeführten Schemata von Aussagensubsumtionen.

Darans aber ergibt sich durch Kontraposition:

$$\varrho) \quad (ab \not\Subset c) \Subset (a+b \not\Subset c) \quad | \quad (c \not\Subset a+b) \Subset (c \not\Subset ab)$$

und mit Rücksicht hierauf haben wir auch:

$$*\sigma) \quad (ab \not\Subset c) \Subset (c \Subset a+b) \quad | \quad (c \not\Subset a+b) \Subset (ab \Subset c)$$

als a fortiori folgende, mithin abgeschwächte Formen von den zwei ersten Paaren der (über's Kreuz zusammengehaltenen) Schlüsse ξ).

Demgegenüber erscheint bemerkenswert, dass sogar anch:

$$*\tau) \quad (c \not\Subset ab) \Subset (a+b \Subset c) \quad | \quad (a+b \not\Subset c) \Subset (c \Subset ab)$$

als zwei *verstärkte* Formen ebendieser Schlüsse und somit auch von ν) gelten müssen, indem dieselben leicht direkt zu rechtfertigen sind.

Weiter mögen von den Gesetzen der Nicht-Einordnung (non-implication) noch angeführt sein die beiden ein gewisses Gegenstück zu den wichtigen ϑ) bildenden gemischten Formeln:

$$\upsilon_\times) \quad \{(a \not\Subset b) \not\Subset c\} = (a \not\Subset b+c) = \{(a \not\Subset c) \not\Subset b\} \quad |$$

$$| \quad \upsilon_+) \bullet \quad \{(b \not\Subset a) \not\Subset c_1\} = (bc \not\Subset a) = \{(c \not\Subset a) \not\Subset b_1\}$$

von deren erster Peirce wenigstens die Äquivalenz der beiden extremen Terme anführt in den (mir separat zugeschickten) Corrigenda seiner Abhandlung [5].

Und endlich gehört hierher der die weitere Geltung besitzende Schluss:

$$\varphi) \qquad (a \not\Subset c) \Subset (a \not\Subset b) + (b \not\Subset c)$$

welcher sich einerseits durch Kontraposition aus Pr. II ergibt, und andrerseits bei direkter Begründung auf die Subsumtion $ac_1 \Subset ab_1 + bc_1$ hinausläuft, die unserm Beispiel μ) in § 18 zugrunde gelegen.

Die Zerlegung einer Subsumtion des Aussagenkalkuls in eine Alternative von Gleichungen nach dem oben S. 265 im Kontext angeführten Schema $*\lambda$) des § 32):

$$(a \Subset b) = (a = 0) + (b = 1)$$

nennt Herr Peirce [5], p. 20 unten, einen *„Dialogismus"*. Als „kanonische" Form desselben bezeichnet er aber ibid. p. 31 den soeben aufgestellten Satz φ). Es scheint mir hiernach der Begriff des „Dialogismus" bei Peirce selbst noch einigermassen zn schwanken. Ebenda bezeichnet er als „minor indirect dialogism" den Satz:

$$\chi) \qquad \{x \not\Subset (b \not\Subset c)\} \Subset \{x \not\Subset (a \not\Subset c)\} + (a \not\Subset b)$$

und als „major indirect dialogism" den:

$$\psi) \qquad \{x \not\Subset (a \not\Subset b)\} \Subset \{x \not\Subset (a \not\Subset c)\} + (b \not\Subset c);$$

desgleichen stellt er die Sätze auf:

$$\omega)\begin{cases}\{(a \not\Subset c) \not\Subset x\} \Subset \{(a \not\Subset b) \not\Subset x\} + (b \not\Subset c), \\ \{(a \not\Subset c) \not\Subset x\} \Subset \{(b \not\Subset c) \not\Subset x\} + (a \not\Subset b).\end{cases}$$

Dieselben sind zunächst sämtlich leicht in der geschilderten Weise zu verifiziren oder als gültige Sätze des Aussagenkalkuls zu beweisen; sie kommen bezüglich auf die Subsumtionen hinaus:

$$x(b_1 + c) \Subset x(a_1 + c) + ab_1, \qquad x(a_1 + b) \Subset x(a_1 + c) + bc_1,$$

$$ac_1x_1 \Subset ab_1x_1 + bc_1, \qquad ac_1x_1 \Subset bc_1x_1 + ab_1,$$

die als analytische Formeln des Gebietekalkuls (indem man z. B. rechts auf 0 brächte) leicht vollends zu erhärten wären.

Ich muss indessen gestehen, dass ich mit all' den im gegenwärtigen Kontext genannten Sätzen nichts Rechtes anzufangen wüsste und dass mir dieselben mehr nur als Kuriosa des Aussagenkalkuls erscheinen, denen kaum ein höherer Wert als der von Übungsbeispielen für Anfänger zukommen dürfte.

Sofern sich die Sätze auf die (merkwürdigerweise?) *dem verbalen Schliessen fremde* Beziehung der Nichteinordnung, des *Nicht*imgefolgehabens bei ihren Prämissen oder Konklusionen berufen, dürften sie am besten ganz von der Theorie ignorirt werden, und möchte ich als den vornehmsten Zweck unsrer diesbezüglichen Darlegungen die eben hiermit geübte Kritik derselben hinstellen. Diese Sätze, deren Menge leicht noch weiter, ja in's Unbegrenzte zu vermehren wäre — zunächst z. B. indem man auch noch Gegenstücke zu den Formeln γ), δ), ε), .. aufsuchte — steigern nur — wenn etwa gar als zu memorirende hingestellt — die Belastung des Gedächtnisses auf ersichtlich mehr als das Doppelte von der Auflage des Gebietekalkuls, und das ohne Not, ohne entsprechenden Gewinn! Sind wir doch auch ohne sie schon den allgemeinsten Aufgaben des Gebiete- (einschliesslich Aussagen-) kalkuls näher getreten und haben bereits gelernt, derselben zu entraten! — Endlich aber *zerfallen* ja alle diese Beziehungen, indem

$$(a \not\Subset b) = ab_1 = (a = 1)(b = 0)$$

sein muss — ein Umstand, im Hinblick auf welchen Obiges schon weniger merkwürdig erscheinen wird. —

Gilt eine Formel im identischen Kalkul auch dann, wenn man die als einfache Symbole in ihr vorkommenden Buchstaben *beliebig* als Gebiete einer gewöhnlichen Mannigfaltigkeit interpretirt — desgleichen die einfachen Symbole 0, 1 in der aus Def. (2) bekannten Weise als bestimmte Gebiete — so haben wir bislang ihr „die *weitere* Geltung“ zugeschrieben.

Dagegen wurde gesagt, die Formel besitze blos „die *engere* Geltung“, wenn sie zwar im Aussagenkalkul gilt, d. h. richtig ist, sobald

man die in sie eingehenden Buchstabensymbole als irgendwelche Aussagen (konstanten Sinnes) interpretirt (dazu die 0 und 1 als die gewiss falsche resp. wahre Aussage) ohne dass ihr jedoch die weitere Geltung zukäme. Sie konnte in diesem Falle, vermittelst des Schema's $(a = 1) = a$ oder ε) und dessen Folgesätzen ν) des § 32, sofort in eine analytische Identität des Gebietckalkuls umgeschrieben und somit gerechtfertigt werden. *Vor* dieser Verwandlung aber wird sie entweder — als eine Formel „gemischter Natur" — im Gebietekalkul überhaupt nicht deutungsfähig erscheinen, oder, wenn sie doch in ihm deutungsfähig ist, wird sie daselbst *nicht durchaus* gelten. Im letzteren Falle haben wir ihre Chiffre durch einen Stern ausgezeichnet, um vor ihrer rückhaltlosen Anwendung zu warnen. Gültig zu bleiben braucht solche Formel nur dann, wenn man alle vorkommenden Gebietesymbole auf den Bereich der beiden Werte 0 und 1 verweist, für jeden Buchstaben nur einen beliebigen dieser beiden Werte — in jedem einzelnen Falle gleichviel welchen von beiden — zulässt.

Die Formeln des § 29 besassen sämtlich die *weitere* Geltung, wogegen wir im gegenwärtigen Paragraphen fast lauter solche Formeln zusammengestellt und solche vorzugsweise aufgesucht haben, denen nur die engere Geltung zukommt.

Hier drängt sich nun die nicht unwichtige Frage auf: wie kann man bei einer richtigen Formel des Aussagenkalkuls entscheiden, ob ihr die weitere oder blos die engere Geltung zukommt?

Träfe schon letztere nicht zu, so könnte die Formel überhaupt keine Geltung (in ihrer vollen Allgemeinheit, als solche) beanspruchen, auch die „weitere" nicht — denn eine Proposition des Gebietekalkuls soll sie allgemein gelten oder „Formel" sein, muss auch für die Werte 0 oder 1 ihrer Buchstabensymbole sich erfüllt zeigen. Wir müssen also bei jeder Formel (die als solche für uns in Betracht kommen kann) voraussetzen, dass sie wenigstens im engeren Sinne, als *„Formel des Aussagenkalkuls"* gelte.

Umgekehrt: Gilt eine Formel für alle Wertsysteme ihrer Buchstaben, die aus Nullen und Einsern gebildet werden können, so ist sie im Aussagenkalkul richtig, geniesst mindestens der engeren Geltung, da alsdann nichts hindert, ihre Buchstaben als irgendwelche (nach Belieben konstant richtige oder konstant falsche) Aussagen zu deuten.

Die aufgeworfene Frage ist nun wie folgt zu beantworten.

Jede Formel, gewonnen durch Übertragung der im identischen Gebietekalkul *bewiesenen* Sätze in die Zeichensprache des Aussagenkalkuls — überhaupt jede in jenem beweisbare, aus dessen Grundlagen deduzirbare Formel — muss zweifellos „die weitere Geltung" haben:

Gelingt es auf dem angedeuteten Wege nicht, eine fragliche Formel

zu begründen [welche sich dennoch nach dem Prinzip $(a = 1)$ resp. $(a = 1) = a$ als richtig erweist], so kann derselben nur die engere Geltung zukommen, sobald man auch nur *eine* Interpretation der Symbole in Gestalt von Gebieten nachweisen kann, für welche die Formel augenscheinlich nicht zutrifft.

Beispielsweise zeigt so die Figur 23, in welcher $a \not\in b$, und gleichwol *nicht* $c \not\in a$ ist, dass die Formel $\mu_\times$) der weitern Geltung entbehrt.

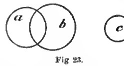


Fig 23.

Richtige Formeln des Aussagenkalkuls, bei welchen es weder gelänge, sie aus den bisherigen Grundlagen des Gebietekalkuls abzuleiten, noch auch (mit Leichtigkeit) gelänge, sie *für diesen* (wofern sie überhaupt in ihm deutungsfähig) durch ein Beispiel als im allgemeinen falsch nachzuweisen, sind bisher nicht entdeckt worden, aus welchem Umstande, wenn er in dieser Weise fortbesteht, induktorisch die Überzeugung zu schöpfen ist, dass wir die Grundlagen des Gebietekalkuls bereits vollständig besitzen.

Ob mit vorstehender Beantwortung der Frage die Wissenschaft das letzte Wort über dieselbe gesprochen hat, muss allerdings dahingestellt bleiben. Man empfindet es als ein *Desideratum*, dass die Frage — statt in jedem Falle eine spezielle Untersuchung, eventuell vergebliche Deduktionsversuche und den schliesslichen Rekurs auf die Anschauung zu erheischen — durch blos mechanisches Rechnen, Operiren nach einem allgemeinen Schema, möchte zur Entscheidung gebracht werden können — in ähnlicher Weise etwa, wie von der Analysis die Frage nach der *Auflösbarkeit eines Gleichungensystems* durch das *Theorem von der Funktionaldeterminante* bekanntlich allgemein erledigt ist. Dieser Vergleich eröffnet hier einen Ausblick auf ein weiteres Problem der Forschung. —

Abgesehen von der grösseren Allgemeinheit und Tragweite, die wir durch die Begründung des identischen Kalkuls als eines *Gebietekalkuls* gegenüber der McColl ... Peirce'schen als eines *Aussagenkalkuls* erzielten, scheint mir die in diesem Buche durchgeführte Voranstellung der Exposition des erstern — unter Vermeidung des Gebrauches jeglicher Abkürzungen, welche die Formelsprache des letzteren gestatten würde — auch in didaktischer Hinsicht einen Vorzug vor den andern Behandlungsweisen zu bieten insofern, als der Anfänger beim Studium von Herrn Peirce's Aufsatze [5] etc., sich vor eine ähnliche Schwierigkeit gestellt sehen wird, wie wenn er eine ihm fremde Sprache aus einer *zumeist in dieser selbst geschriebenen* Grammatik erlernen sollte. Zudem musste es die Übersicht fördern, dass wir beide Kalkuln sozusagen auseinander entwirrten. —

§ 46. Diverse Anwendungen, Studien und Aufgaben, darunter: Wesen des indirekten Beweises, Hauber's Satz, Mitchell's Nebelbilderproblem, nochmals McColl's Methode, etc.

1. Studie. *Wesen des „indirekten“* (oder *„apagogischen“*) *Beweises.* Dieser, auch *„reductio ad absurdum“* (bei Aristoteles ἀπαγωγὴ εἰς τὸν ἀδύνατον) genannt, stellt sich im Aussagenkalkul wie folgt dar, und rechtfertigt sich dadurch das Beweisverfahren als solches.

Die Voraussetzungen eines (indirekt) zu beweisenden Theorems mögen mit A bezeichnet werden und was das Theorem alsdann behauptet mit B. Das Theorem spricht darnach aus, dass aus der „Annahme“ A die „Behauptung“ B (faktisch) folge, d. h. dass sei

$$A ⋹ B.$$

Auch der Fall, wo unser Theorem als voraussetzungslos erscheinen, eine Behauptung B *ohne weiteres* als gültig hinstellen sollte, ist unter diesem Schema mitbegriffen, indem man sich alsdann unter A nur ein identisches (analytisches) Urteil vorzustellen braucht, wie z. B. das Urteil: $0 = 0$, welches im Aussagenkalkul den Wert 1 besitzt indem es stetsfort gilt; in der That wird ja hiedurch die Subsumtion $A ⋹ B$ auf $1 ⋹ B$, gemäss Th. $\bar{5}_+$) also auf $B = 1$, das ist auf die Behauptung B hinauskommen.

Wir mögen also die Subsumtion $A ⋹ B$ als das allgemeine Schema für jedes erdenkliche Theorem hinstellen.

Um ein solches apagogisch zu beweisen, bemerke man, dass nach Th. $21_\times$), 30_+) und $27_\times$):

$$A = AB + AB_1$$

ist. Man ziehe nun aus der Annahme, dass A gelte, B aber nicht gelte, d. h. also aus der Annahme AB_1 Schlüsse und suche aus derselben einen Widerspruch zu deduziren. Gelingt dies, so wird der Beweis apagogisch geleistet sein. Gesetzt, es gelinge.

Der Widerspruch bestehe darin, dass aus AB_1 gefolgert ist, eine Aussage C müsse gelten, während andrerseits gefolgert oder anderweitig bekannt, längst anerkannt und feststehend ist, dass sie nicht gelte, d. h. dass C_1 gelte. Ersteres, in Formeln gesetzt, gibt:

$$AB_1 ⋹ C, \quad \text{letzteres:} \quad AB_1 ⋹ C_1$$

— auch dann, wenn die Folgerung keine logische oder denknotwendige sein sollte; wenn nämlich C_1 nur anerkanntermassen gilt, so ist es ja

$= 1$ und muss nach Def. (2_+) $AB_1 \neq\!\!\!< 1$, also in der That $AB_1 \neq\!\!\!< C_1$ sein. Aus beiden Ergebnissen fliesst nach Def. $(3_\times)$:

$$AB_1 \neq\!\!\!< CC_1.$$

Da aber $CC_1 = 0$ nach Th. $30_\times$) ist, so haben wir $AB_1 \neq\!\!\!< 0$ oder nach Th. $5_\times$): $AB_1 = 0$. Es bleibt demnach gemäss Th. 21_+) oben: $A = AB$, oder kraft Th. $20_\times$): $A \neq\!\!\!< B$, wie zu zeigen gewesen.

Rascher noch folgt auch dasselbe gemäss Th. $38_\times$) sobald einmal $AB_1 \neq\!\!\!< 0$ erkannt ist. —

Eine etwas einfachere Modifikation der in Rede stehenden „reductio" ist die, dass aus der Annahme AB_1 gefolgert wird: eine sich unmittelbar als ungültig, „absurd", zu erkennen gebende Proposition C, wie z. B. das Ergebniss, dass $0 = 1$ sei.

Ist auf diese Weise dargethan, dass in der That

$$AB_1 \neq\!\!\!< C$$

so haben wir auch, da $C = (0 = 1) = 0$ sein muss, wie vorhin

$$AB_1 \neq\!\!\!< 0, \qquad AB_1 = 0,$$

somit nach Th. $38_\times$):

$$A \neq\!\!\!< B,$$

d. h. das behauptete Theorem ist bewiesen.

Bei dieser Modifikation kommt der dem gefolgerten widersprechende Satz:

$$C_1 = (0 \neq 1) = 1,$$

welcher als selbstverständlich gültig anzusehen, formell gar nicht, m. a. W. nicht ausdrücklich zur Sprache und der „Widerspruch" als solcher nicht notwendig zum Bewusstsein. —

Noch weiter vereinfacht erscheint das Beweisverfahren in dem bereits oben als mitzugelassen gekennzeichneten Falle, wo die Voraussetzung A des zu beweisenden Theorems als eine selbstverständliche gilt und darum nicht ausdrücklich als solche erwähnt sein mochte; dies ist derjenige Fall, wo das Theorem als ein „voraussetzungsloses" lediglich hinausläuft auf die Behauptung der Gültigkeit einer Proposition B.

In diesem Falle können wir auch den Faktor:

$$A = (0 = 0) = 1$$

bei AB_1 als einen belanglosen unterdrücken, und haben blos die Überlegung:

$$B_1 \neq\!\!\!\!\in C = 0, \quad \text{sonach} \quad B = 1, \quad \text{q. e. d.}$$

— gemäss Th. 2), $5_\times$) und 32). —

Unter Umständen lässt sich auch die Sache so darstellen, dass die absurde Behauptung C mit der Negation A_1 der selbstverständlichen A zusammenfällt, dass also $C = A_1$ — indem man z. B. von vornherein C_1 als die eventuell stillschweigende Voraussetzung A des Theorems (mithin $C_1 = A$) gelten lässt.

In diesem Falle vereinfacht sich der Charakter des apagogischen Beweises auf das äusserste: das Theorem $A \neq\!\!\!\!\in B$ wird alsdann bewiesen, indem man die Folgerung: $B_1 \neq\!\!\!\!\in A_1$ zieht und auf diese nur das Th. 37), das ist die „Konversion durch Kontraposition" anwendet. —

Die „reductio ad absurdum" erscheint als eine der gefährlichsten von den Waffen, mit welchen der Irrtum sich verteidigt. Indem er ihrer sich bedient, pflegt er dem Ansturm neuer Erkenntnisse (die ihm den garaus machen würden) am erfolgreichsten Widerstand entgegenzusetzen, deren Anerkennung hintanzuhalten.

In der That lässt auch keine Beweisform so leicht wie diese zu rhetorischen Zwecken, im Dispute, sich *missbrauchen.* Der Grund dieser Eigentümlichkeit ist unschwer zu sehen.

Man sagt: Wenn die Behauptung A des Gegners richtig wäre, so würde ja dies und das, ein Urteil B, daraus *folgen.* Dieses letztere ist augenscheinlich absurd, also kann auch die Behauptung A unmöglich zugegeben werden.

Schade nur, dass man so selten sich die Mühe nimmt, die Art, wieso B aus A denn folgen würde, genauer darzulegen! Dieser Schluss gerade, auf dessen Rechtfertigung alles ankäme (indem das Urteil B ja wirklich absurd sein mag) wird als ein enthymematischer meist unvollendet gelassen. Oft fehlt sogar jegliche Andeutung über die Art seines Zustandekommens, zufolge dessen der Opponent ausser Stand gesetzt ist, den Fehler in dem mentalen Raisonnement des Argumentirenden selbst zu entdecken, zu packen und bloszustellen, vielmehr sich darauf wird beschränken müssen, gegen die Berechtigung zum Ziehen desselben nur eben Protest einzulegen. In der Regel aber wird der Hörer durch Herbeiziehung irgend einer oberflächlichen *Analogie* (blos) *verleitet* diesem so flüchtig ausgeführten Schlusse zuzustimmen. Oder es werden auch anerkannte Wahrheiten in einem viel weiteren Sinne als ihnen rechtmässig zukommt, zur Rechtfertigung desselben herangezogen und läuft das Verfahren hinaus auf eine grossartige Übertreibung. Fast immer werden thatsächliche Momente, die für das Zustandekommen einer wirklich richtigen Konklusion wesentlich mitzuwirken hätten, dabei übergangen, ausser Acht gelassen.

So hat man zur Bekämpfung des „Determinismus" z. B. aus diesem auf ethischem Gebiete, in Bezug auf sittliche Verhaltungsregeln für den Einzelnen, sowie für die Gesellschaft gegenüber Schuldbeladenen, in leicht-

fertigster Weise die absurdesten Folgerungen zu ziehen beliebt (Folgerungen, die nebenbei gesagt durch die genau entsprechende Anwendung auf Verunglückte oder Kranke sich meistens selber würden ad absurdum führen lassen). —

Sage ich z. B.: Die Eingeweidewürmer des Menschen (in unsern Kulturlanden, die Oxyuris etc. — jedoch mit Ausnahme der Taenia-Arten, für welche eine ganz andere Verbreitungsweise nachgewiesen ist) rühren von dem Essen grünen Salates her (der bei seiner Düngung mit der Gülle betropft worden) — so wird mir vielleicht von dem Einen schon diese Möglichkeit überhaupt in Abrede gestellt unter dem Hinweise auf die dem Salatgenusse üblichermassen vorhergehende Waschung der Blätter mit kaltem Wasser (als ob durch solche auch angetrocknete mikroskopische Eier mit Sicherheit beseitigt werden müssten!). Wogegen ein Anderer (dem die Erkenntniss unwillkommen, weil er ein Liebhaber guten Salates) entgegnen wird: Nein! Das kann nicht sein, *denn* sonst müssten ja alle Menschen welche haben! —

Einen auffallenden Beitrag, der hier auch materiell von Interesse, liefert in dem „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik" von 1886, Bd. 18, p. 36, Herr Michaelis in Gestalt des Räsonnements mit welchem er eine von F. A. Lange aufgestellte Theorie bekämpft: Es kann nicht sein, dass die Grundsätze der Logik (und insbesondre der Satz des Widerspruchs) auf räumlicher Anschauung beruhen, denn sonst wäre die „letzte Konsequenz" ja die: *„die Lehrbücher der Logik in Bilderbücher zu verwandeln"* (!).

Notabene: ich will hiermit keineswegs für materielle Richtigkeit der bekämpften Ansicht von Lange eintreten, sondern wende mich blos gegen die benutzte Argumentation. Um die mir hier so unberechtigt erscheinende „Reductio" durch eine berechtigte zu widerlegen, werfe ich die Frage auf: Liesse nicht genau dieselbe Schlussweise sich auch anwenden, um darzuthun, dass die Axiome der *Geometrie* unmöglich auf Raum-Anschauung basiren können? —

2. Hülfssatz — unter andern zu Hauber's Theorem. *Gebiete, die einzeln je in disjunkten Gebieten enthalten sind, müssen selbst disjunkt sein.*

Einfachster Fall dieses Satzes ist der, wo nur zwei disjunkte Gebiete a und b in Betracht kommen. Wenn dann x in a und y in b enthalten ist, so müssen auch x und y disjunkt sein. In Formeln:

$$\alpha) \qquad (x \Subset a)(y \Subset b)(ab = 0) \Subset (xy = 0).$$

Dieser Satz ist kein anderer als der schon als Übungsaufgabe (nach De Morgan) unter μ_1) des § 18 von uns angeführte und bewiesene. Den Beweis werden wir nachher in der 4. Aufgabe ganz in der Zeichensprache geführt reproduziren.

Generalisiren lässt der Satz sich auf verschiedene Weise. Man könnte ihn samt dem erwähnten Beweisverfahren sogleich auf beliebig viele Symbolpaare ausdehnen in der Gestalt:

$$\beta) \qquad (x \subseteq a)(y \subseteq b)(z \subseteq c) \cdots (abc \cdots = 0) \subseteq (xyz \cdots = 0).$$

In der That folgt aus den vorausgesetzten *Subsumtionen* durch überschiebendes Multipliziren nach Th. $17_\times$), dass $xyz \cdots \subseteq abc \cdots$ sein muss, wo nun aber die rechte Seite laut der vorausgesetzten *Gleichung* durch 0 ersetzt werden darf nach Th. 2) und schliesslich nur zu beachten bleibt, dass Einordnung unter die Null Gleichheit bedeutet nach Th. $5_\times$), sonach $xyz \cdots = 0$ sein muss, q. e. d.

Dies wäre nun aber ein anderer als der obige Satz. Für dreie oder mehr Symbolpaare wird jener vielmehr lauten:

Wenn $a, b, c, \cdots$ unter sich disjunkt sind und x in a, y in b, z in c, $\cdots$ ganz enthalten, so müssen auch $x, y, z, \cdots$ unter sich disjunkt sein.

Oder in Formeln:

$$\gamma) \qquad (x \subseteq a)(y \subseteq b)(z \subseteq c) \cdots (ab = 0)(ac = 0)(bc = 0) \cdots$$
$$\cdots \subseteq (xy = 0)(xz = 0)(yz = 0) \cdots$$

Um dies auf die nächstliegende und einfachste Art zu beweisen braucht man sich nur den Satz α) für jedes erdenkliche Paar von Gebieten aus der Reihe der $a, b, c, \cdots$ (mitsamt dem zugehörigen aus der Reihe der $x, y, z, \cdots$) hingeschrieben zu denken, resp. wirklich unter die Proposition α) noch die Propositionen zu setzen:

$$(x \subseteq a)(z \subseteq c)(ac = 0) \subseteq (xz = 0),$$
$$(y \subseteq b)(z \subseteq c)(bc = 0) \subseteq (yz = 0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und dann alle miteinander überschiebend zu multipliziren — nach Th. $\overline{17}_\times$). Linkerhand sich wiederholende Faktoren kraft des Tautologiegesetzes $14_\times$) nur einmal schreibend wird man so das Theorem γ) gewonnen haben.

Obwol wir hiermit im wesentlichen zu Ende sind, ist es doch lehrreich, sowol den Beweis, als auch die Ausdrucksformen unsres Theorems noch verschiedentlich zu variiren.

Behufs Beweises von α) könnte man auch einfach gemäss den Schemata λ) und μ) des § 32 die „Gültigkeitsklassen" der verschiednen (Faktor-) Aussagen zur Linken und Rechten dieser Subsumtion ansetzen. Dieselbe kommt dann auf:

$$(x_1 + a)(y_1 + b)(a_1 + b_1) \subseteq x_1 + y_1$$

oder nach Th. $38_\times$) nebst 36_+) und 31) auf die Gleichung:

$$xy(x_1 + a)(y_1 + b)(a_1 + b_1) = 0$$

hinaus, welche als eine identisch richtige oder „analytische" nachzurechnen nur mehr eine blosse Multiplikationsübung ist.

Dies Verfahren gestaltet sich aber um so umständlicher, je mehr Symbole in Betracht kommen.

Anstatt solchermassen *„independent"* ziehen wir deshalb einmal vor, den Beweis des allgemeinen Satzes *„rekurrirend"* zu führen, für drei Symbole nämlich auf Grund des für zweie bereits bewiesenen Satzes, ebenso dann für viere, indem wir auf den für dreie bewiesenen Satz zurückverweisen, und so fort — im Grunde so den „Schluss" von n auf $n + 1$ Symbole anwendend. Die Ausführung dieses Programmes gestaltet sich ganz leicht, wie folgt.

In α) denken wir uns alle Buchstaben mit Accent versehen, oder schreiben wirklich die Formel so an:

$$(x' \lessdot a')(y' \lessdot b')(a'b' = 0) \lessdot (x'y' = 0).$$

Nehmen wir an, dass hierin die (von vornherein beliebig zu deutenden, weil allgemeinen) Gebiete x', y', a', b' folgende Werte haben:

$$x' = x + y, \qquad y' = z, \qquad a' = a + b, \qquad b' = c,$$

so ist erkannt, dass:

$$(x + y \lessdot a + b)(z \lessdot c)(ac + bc = 0) \lessdot (xz + yz = 0),$$

und nach Th. 24_+) kann darin — wofern man die Glieder nicht beisammen lassen will — $(ac + bc = 0)$ durch $(ac = 0)(bc = 0)$, desgleichen

$$(xz + yz = 0) \quad \text{durch} \quad (xz = 0)(yz = 0)$$

ersetzt werden.

Multiplizirt man die Subsumtion dann noch überschiebend mit der α) selbst, nach Th. $17_\times$), so erhält man für drei Symbolpaare die zu beweisende Subsumtion γ) genau — bis auf den Umstand, dass linkerhand ausser den sechs in ihr angegebenen Aussagenfaktoren auch noch als siebenter der Faktor $(x + y \lessdot a + b)$ steht. Dieser kann aber ohne weiteres unterdrückt werden. Da nämlich nach Th. 17_+):

$$(x \lessdot a)(y \lessdot b) \lessdot (x + y \lessdot a + b),$$

so ist nach Th. $\overline{20}_\times$), d. i. $(A \lessdot B) = (AB = A)$:

$$(x \lessdot a)(y \lessdot b)(x + y \lessdot a + b) = (x \lessdot a)(y \lessdot b)$$

auch ohne den dritten Faktor.

Hiermit ist denn die Formel γ) mit Wegfall der Punkte „. . ." bewiesen.

Um jetzt den Satz für vier Symbolpaare a, b, c, d nebst x, y, z, u zu erhalten, braucht man blos in der mit accentuirten Buchstaben angesetzten Formel α) anzunehmen:

$$x' = x + y + z, \qquad y' = u, \qquad a' = a + b + c, \qquad b' = d$$

und die sich ergebende Subsumtion:

$(x + y + z \in a + b + c)(u \in d)(ad + bd + cd = 0) \in (xu + yu + zu = 0)$

nachdem

$$(ad + bd + cd = 0) = (ad = 0)(bd = 0)(cd = 0)$$

und

$$(xu + yu + zu = 0) = (xu = 0)(yu = 0)(zu = 0)$$

eingesetzt sind, mit der für drei Symbolpaare vorhin bewiesenen Subsumtion — γ) ohne die Punkte — überschiebend zu multipliziren, beachtend, dass dann links der Faktor $(x + y + z \in a + b + c)$ von den ohnehin vorhandenen Faktoren $(x \in a)(y \in b)(z \in c)$, aus deren Produkt er ja von selbst mit folgt, überflüssig gemacht, verschluckt wird.

Und so weiter. —

Endlich mögen wir aber, nachdem für zwei Symbolpaare der Satz unter α) schon bewiesen ist, denselben für eine unbestimmte Menge solcher auch *apagogisch* beweisen. Ich führe dies um so lieber aus, als von verschiednen Seiten das Nichtvorkommen apagogischer Beweisführungen gerade in der Logik selbst schon mit Befremden konstatirt worden ist. Zudem eröffnen die Betrachtungen in ihrem ersten Teil uns neue Gesichtspunkte:

Zunächst lässt das Theorem α) sich auch in der Gestalt schreiben:

δ) $$(xy \neq 0)(x \in a)(y \in b) \in (ab \neq 0)$$

indem man etwa $\bar{\in}$ konform den Ausführungen am Schlusse des § 31 — die Subsumtion α) durch Herübernehmen ihrer rechten Seite erst in eine Inkonsistenz umschreibt und diese durch Hinüberwerfen ihres Gleichung-faktors wieder in eine Subsumtion umwandelt, oder auch, indem man mit *einem* Schlage gemäss dem unter Th. $\overline{41}$) mitgegebenen Schema: $(AB \in C) = (AC_1 \in B_1)$ die beiden Terme in α), welche Gleichungen sind, als Ungleichungen auf die andere Seite bringt.

Nebenbei sei hier darauf aufmerksam gemacht dass diese Formel δ) regelrechtes Exempel ist eines „zusammengesetzten Syllogismus", und zwar eines solchen mit drei Prämissen und den beiden Mittel- oder besser gesagt „*Zwischen*-Gliedern" x und y, lautend: Einige x sind y, alle x sind a, alle y sind b, *ergo:* einige a sind b.

Das gleiche ist auch mit α) der Fall, nur dass hier als die Zwischenglieder, Eliminanden a und b erscheinen; dieser Syllogismus würde lauten: Alle x sind a, alle y sind b, kein a ist b, *ergo:* kein x ist y.

Hier wäre schon Boole's Th. 50_+) zum Vollzug der Elimination (von a und b aus der vereinigten Gleichung der Prämissen $xa_1 + yb_1 + ab = 0$) ausreichend.

Es kann dieser Schluss deshalb auch durch unsre allgemeine Eliminationsmethode, etwa nach dem Schema ι) des § 41 *gewonnen* und gerechtfertigt werden, wobei sich herausstellt, dass die Konklusion als die *volle* Resultante der Elimination der Zwischenglieder zu bezeichnen.

Um dies behufs Illustration jener Methode systematisch durchzuführen, wird man links in δ) die beiden Subsumtionen in ihre vereinigte Gleichung zusammenziehen, wonach die Voraussetzung des behaupteten Th. δ) lautet:

$$(a_1 x + b_1 y = 0)(xy \neq 0),$$

oder, wenn wir dieselbe jetzt für die regelrechte Elimination von y präpariren:

$$\{(a_1 x + b_1)\, y + a_1 x y_1 = 0\}\, \{xy + 0 \cdot y_1 \neq 0\}.$$

Hieraus nach dem Schema y eliminirt, gibt:

$$\{(a_1 x + b_1) \cdot a_1 x = 0\}\, \{x \cdot (a + x_1)\, b + 0 \cdot (a + x_1) \neq 0\},$$

oder

$$(a_1 x + 0 \cdot x_1 = 0)(abx + 0 \cdot x_1 \neq 0)$$

und hieraus endlich x eliminirt, gibt:

$$(a_1 \cdot 0 = 0)(ab \cdot a + 0 \cdot 1 \neq 0),$$

das ist $ab \neq 0$, wie zu zeigen war — indem die erste Faktoraussage, welche den Boole'schen Bestandteil der Resultante vorstellt, als identisch erfüllte, nämlich als $(0 = 0) = 1$, zu unterdrücken war.

Somit in der Lage, uns auf das Theorem δ) berufen zu dürfen, mögen wir das allgemeine Theorem γ) nunmehr leicht wie folgt indirekt beweisen.

Gesetzt das Produkt irgend zweier Symbole aus der Reihe $x, y, z, \ldots$ sei (unter den Voraussetzungen des Theorems γ) *nicht* gleich 0, so mögen wir unter x und y uns ebendiese beiden vorstellen und werden also $xy \neq 0$ haben. Halten wir dieses Ergebniss zusammen mit den beiden unter den Voraussetzungen des Theorems befindlichen Subsumtionen $x \subseteq a$ und $y \subseteq b$, so erkennen wir die Voraussetzungen des Theorems δ) als augenscheinlich erfüllte und sind wir nach diesem zu der Folgerung berechtigt, dass $ab \neq 0$ sein müsse.

Diese Folgerung *widerspricht* aber der unter den Daten des Theorems γ) befindlichen Voraussetzung, dass $ab = 0$ sei, und war folglich jene Annahme $xy \neq 0$ eine unzulässige; es muss vielmehr $xy = 0$ sein, welches Wertepaar aus der Reihe $x, y, z, \ldots$ wir auch unter x und y uns vorstellen mögen, q. e. d.

Die Ausdrucksformen unsres Satzes betreffend kann man in γ) auch die Gleichungsfaktoren links und rechts je in eine einzige Faktorgleichung gemäss Th. 24_+) zusammenziehen, sodass die Formel lautet:

$$\varepsilon)\ (ab + ac + bc + \cdots = 0)(x \subseteq a)(y \subseteq b)(z \subseteq c) \cdots \dot{\subseteq} (xy + xz + yz + \cdots = 0)$$

Dem Polynom dieser Gleichung konute man — hei Benutzung vorstehendor Form — in unserm obigen rekurrenten Beweise dann dasjenige jeder noch weiter als Faktor hinzutretenden (rechts 0 habenden) Gleichung unmittelbar angliedern.

Auch für eine beliebige (eventuell selbst unbegrenzte) Anzahl Symbole lässt unser Theorem sich wie folgt in Formeln setzen:

$$(\Sigma'_{\varkappa,\lambda} a_\varkappa a_\lambda = 0) \, \Pi_\varkappa (x_\varkappa \Subset a_\varkappa) \Subset (\Sigma'_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda = 0),$$

wo der Apostroph über dem Summenzeichen andeuten soll, dass dem Index λ jeweils nur die von $\varkappa$ *verschiedenen* Werte aus der von diesem letztern Index zu durchlaufenden Wertenreihe beigelegt werden sollen. Will man aber solch' aparte Symbolik vermeiden, so ist unser Theorem korrekt durch die Formel:

$$\zeta) \qquad \left(\sum_1^n{}^\varkappa \sum_{\varkappa+1}^n{}^\lambda a_\varkappa a_\lambda = 0\right) \prod_1^n{}^\varkappa (x_\varkappa \Subset a_\varkappa) \Subset \left(\sum_1^n{}^\varkappa \sum_{\varkappa+1}^n{}^\lambda x_\varkappa x_\lambda = 0\right)$$

für die n Symbolpaare

$$a_1, \, a_2, \, .. \, a_n$$
$$x_1, \, x_2, \, .. \, x_n$$

darzustellen, und hindert nichts, darin auch $n = \infty$ zu nehmen.

Mit Leichtigkeit auch würde im Anschluss an dieses Schema jener Schluss von n auf $n + 1$ nunmehr sich in der Zeichensprache ausgeführt darstellen lassen.

Schliesslich kann man im allgemeinen Ausdruck γ), ε) oder ζ) unsres Theorems natürlich auch die Prämisse zur Linken durch deren vereinigte Gleichung ersetzen. Zu dem Ende sind die Subsumtionen $x \Subset a$, etc. zunächst in Gleichungen $a_1 x = 0$, etc. umzuschreiben. Um dies bei ζ) auszuführen müssen wir entweder zum wagrechten Negationsstrich unsre Zuflucht nehmen, oder anstatt der unteren Indices für x und a jetzt obere verwenden. Thun wir letzteres, so entsteht:

$$\eta) \qquad \left\{\sum_1^n{}^\varkappa \left(a_1{}^\varkappa x^\varkappa + a^\varkappa \sum_{\varkappa+1}^n{}^\lambda a^\lambda\right) = 0\right\} \Subset \left(\sum_1^n{}^\varkappa x^\varkappa \sum_{\varkappa+1}^n{}^\lambda x^\lambda = 0\right)$$

als wol konziseste aber dennoch vollkommen ausdrucksvolle Darstellung des Theorems, wobei rechts die volle Resultante der Elimination von $a^1, a^2, ..\, a^n$ aus der vereinigten Aussage der Data linkerhand steht. —

Da das in Worte gekleidete Theorem jedermann auch unmittelbar einleuchtet, so sind vorstehende Betrachtungen nur unter dem Gesichtspunkt der *Methode* zu würdigen.

3. Hauber's Theorem.*)

Wenn eine Gattung in die (disjunkten) *Arten $x, y, z, \ldots$ zerfällt,*

*) Hauber's Schrift [1] des Literaturverzeichnisses ist mir nicht zu Gesicht gekommen und halte ich mich bezüglich seines Satzes an die Angaben des Herrn Venn [1] p. 275.



desgleichen in die disjunkten Arten a, b, c, ... und wenn wir wissen: alle x sind a, alle y sind b, alle z sind c, ... so muss auch umgekehrt gelten: alle a sind x, alle b sind y, alle c sind z, ...

[Es ist nicht nötig auch die Arten $x, y, z, \ldots$ ausdrücklich als disjunkte vorauszusetzen — eine Bemerkung, durch welche Hauber's Satze anscheinend eine kleine Erweiternng zuteil wird. Und zwar leuchtet dieses augenblicklich auf Grund des vorausgeschickten Hülfssatzes ein.]

Aussagenrechnerisch stellt sich der Satz in Gestalt der folgenden Formel dar:

$$\vartheta)\quad (ab=0)(ac=0)(bc=0)\cdots(x+y+z\cdots=a+b+c\cdots)(x\subseteq a)(y\subseteq b)(z\subseteq c)\cdots\subseteq$$
$$\subseteq(a\subseteq x)(b\subseteq y)(c\subseteq z)\cdots(xy=0)(xz=0)(yz=0)\cdots$$

wo der mittlere Faktor links statuirt, dass es *dieselbe* Gattung sein soll, welche nach zweierlei Einteilungsprinzipien iu gleichviele Arten $a, b, c, \ldots$ und $x, y, z, \ldots$ zerfällt, wogegen die letzte Faktorengruppe rechts im Einklang mit unserm Hülfssatze kund gibt, dass auch die letztern Arten disjunkt sein werden.

Es genügt, den Satz, dem wir nachher noch eine etwas elegantere Fassung geben werden, zunächst für die dichotomische Einteilung zu beweisen, wo er lautet:

$$\iota)\quad (ab=0)(x+y=a+b)(x\subseteq a)(y\subseteq b)\subseteq(a\subseteq x)(b\subseteq y)(xy=0).$$

Einsetzung der Gültigkeitsklassen der Teilaussagen gibt hier wieder:

$$(a_1+b_1)\{(x+y)(a+b)+x_1y_1a_1b_1\}(x_1+a)(y_1+b)\subseteq(a_1+x)(b_1+y)(x_1+y_1),$$

oder: $$(a_1+b_1)\{(x+y)(a+b)+x_1y_1a_1b_1\}(x_1+a)(y_1+b)(ax_1+by_1+xy)=0$$

was leicht zu verifiziren durch geschicktes Ausmultipliziren. Dies beweist den Satz auch für die weitere Geltung, weil das Produkt jener Gültigkeitsklassen nach Th. $24_\times$) zugleich das Polynom ist der (rechts auf 1 gebrachten) vereinten Gleichung von Minor resp. Major der Subsumtion ι). Man konnte auch die vereinte Nullgleichung des Minor:

$$ab+a_1b_1(x+y)+(a+b)x_1y_1+a_1x+b_1y=0$$

nach x, y entwickeln zu: $xy+(b+a_1)xy_1+(a+b_1)x_1y+(a+b)x_1y_1=0$ und sich überzeugen, dass hieraus die vereinte Nullgleichung des Majors, $ax_1+by_1+xy=0$, wenn vollends nach x, y entwickelt, kraft Th. 24_+) folgt.

Von der dichotomischen Eiuteilung, d. i. auf Grund von ι) kann der Beweis nunmehr auf die tricho-, tetra- etc. tomische Einteilung *genau* in derselben Weise ausgedehnt werden — sonach mittelst der nämlichen für die acceutnirten Buchstaben auszuführenden Substitu-

tionen etc., wie sie oben im Kontext bei dem vorausgeschickten Hülfstheorem ausführlichst angegeben wurden.

Von **Venn**[1] ist ein scheinbar viel einfacherer Beweis des Satzes gegeben. Derselbe kommt aber nur durch einen Beweisfehler zustande, nämlich dadurch, dass (l. c.) p. 275 auf Zeile 16 und 15 v. o. ein wie mir scheint gänzlich ungerechtfertigter und verfehlter (nämlich Z. 16 auf einen circulus in demonstrando, eine petitio principii hinauslaufender, Z. 15 aber völlig sinnloser) Ansatz gemacht wird. (Jener kommt dadurch zustande, dass Herr **Venn** mit dem Minuszeichen — *was nicht erlaubt* — nach den Regeln der *Arithmetik* operirt, nämlich erst $a = b$ in $a - b = 0$, sodann aber $(a + b) - (c + d)$ in $(a - c) + (b - d)$ umschreibt. Behufs Richtigstellung wäre von unserm § 23 nähere Kenntniss zu nehmen. Der Fall, bei einem sonst so sorgfältigen Schriftsteller, gibt aber eine Warnung ab: in der Logik den Gebrauch des Minuszeichens lieber zu vermeiden.) —

Behufs Vereinfachung konnte man, nachdem das Hülfstheorem α) bereits bewiesen ist, den Faktor $(xy = 0)$ rechts in ι) auch weglassen, weil diese Folgerung bereits gezogen erscheint.

Linke Seite unsres Theorems ϑ) ist ein Produkt von vielen Faktoren. Nach dem Schema unter $\vartheta_\times$) des § 45:

$$(AB \underline{\in} C) = \{A \underline{\in} (B \underline{\in} C)\}$$

können auch einzelne Malzeichen zur Linken in Subsumtionszeichen verwandelt werden, wenn man jeweils alles auf sie folgende in eine Klammer einschliesst.

Zur Rechten, im Major dagegen können nach Th. $\bar{6}_\times$), weil $AB \underline{\in} A$, auch beliebige Faktoren unterdrückt werden, ohne dass das Theorem aufhört ein richtiges zu sein, während dann allerdings dasselbe ein eventuell weniger sagendes wird.

Endlich kann man im Major beliebige Faktoren aus dem Minor wiederholen kraft Th. $\overline{20}$), weil auch $(A \underline{\in} B) \underline{\in} (A \underline{\in} AB)$, sowie nach Th. $15_\times$) $(AB \underline{\in} C) \underline{\in} (AB \underline{\in} BC)$ sein wird.

Von der zweiten Erlaubniss Gebrauch machend unterdrücken wir in ϑ) zunächst das letzte Faktorensystem $(xy = 0)$ .. und geben dem Satze kraft der ersten Erlaubniss die Form:

$$\varkappa) \quad (ab = 0)(ac = 0)(bc = 0) \cdots (a + b + c \cdots = x + y + z \cdots) \underline{\in}$$
$$\underline{\in} \{(x \underline{\in} a)(y \underline{\in} b)(z \underline{\in} c) \cdots \underline{\in} (a \underline{\in} x)(b \underline{\in} y)(c \underline{\in} z) \cdots\}$$

und im Major des Majors wiederholen wir (nach der dritten) den Minor des letztern, wobei nach Def. (1) das Produkt je zweier entgegengesetzten Subsumtionen sich in eine Gleichung zusammenziehen wird. So entsteht:

$$\lambda) \quad (ab = 0)(ac = 0)(bc = 0) \cdots (a + b + c \cdots = x + y + z \cdots) \underline{\in}$$
$$\underline{\in} \{(x \underline{\in} a)(y \underline{\in} b)(z \underline{\in} c) \cdots \underline{\in} (x = a)(y = b)(z = c) \cdots\}$$

wonach nun die vollzogene Uuterdrückung der Faktorengruppe $(xy = 0)$.. bei der Konklusion sich als belanglos zu erkennen gibt, weil sie als blosse Wiederholung der vorausgesetzten $(ab = 0)$ .. wegen der Gleichheit der correspondirenden Symbole beider Reihen erscheinen würde.

Man kann darnach sowol $\varkappa)$ als $\lambda)$ als den vollen Ausdruck des Hauber'schen Satzes gelten lassen, obwol sich beide Formeln zufolge Wegfalles jenes Faktorensystems etwas einfacher als $\vartheta)$ darstellen.

Schliesslich kann man dem Theorem auch die hinsichtlich der beiden Symbolreihen $a, b, ..$ und $x, y, ...$ symmetrische Gestaltung geben:

$$\mu) \qquad (ab = 0) \cdot\cdot (xy = 0) \cdot\cdot (x + y \cdot\cdot = a + b \cdot\cdot) \Subset$$
$$\Subset \{(x \Subset a)(y \Subset b) \cdot\cdot = (a \Subset x)(b \Subset y) \cdot\cdot\}$$

welche wol der Hauber'schen Fassung am nächsten kommt. —

4. Studie. Wichtige Erwägungen von allgemeiner Natur wollen wir anknüpfen an die Aufgabe (De Morgan[2] p. 123): Aus A folgt B und aus C folgt D; aber B und D sind unverträglich miteinander.

Zu beweisen, dass auch A und C inkonsistent sind. In Formeln, dass: $(A \Subset B)(C \Subset D)(BD = 0) \Subset (AC = 0)$.

Man sieht, dass der Satz mit $\alpha)$ unsres Hülfssatzes unter 2. zusammenfällt, nur für Aussagen anstatt für Gebiete gedeutet. Ein Beweis ist demnach schon dort gegeben.

Hier jedoch wollen wir ihn nochmals, und zwar *ganz in der Zeichensprache* geben, um darau eine (wichtige) Bemerkung zu knüpfen. Jenes kann geschehen mittelst des Ausatzes:

$$(A \Subset B)(C \Subset D)(BD = 0) \Subset (AC \Subset BD)(BD = 0) \Subset (AC \Subset 0) \Subset (AC = 0)$$

gemäss den Theoremen $17_\times)$ nebst $\overline{15}_\times)$, 2) und $5_+)$ — q. e. d.

Auffallen muss es, dass beim Übergang über das erste freie Subsumtionszeichen hier *zwei Theoreme auf einmal angewendet* wurden: Nach Th. $17_\times)$, welches auch für Gebiete gilt, und darum keinen Strich übergesetzt bekommen soll, obwol A, B, C, D hier zufällig Aussagen (unspezifizirte) bedeuten, schlossen wir einerseits, dass

$$(A \Subset B)(C \Subset D) \Subset (AB \Subset CD)$$

sei. Diesen Schluss verknüpften wir aber obendrein beiderseits mit dem nämlichen Faktor $(BD = 0)$, wofür wir die Berechtigung aus Th. $\overline{15}_\times)$ schöpfen, das als ein für spezifizirte Aussagen in Anspruch genommenes hier jedenfalls mit überstrichener Chiffre zu citiren war.

Solch gelegentliches Miteingreifen des Th. $\overline{15}_\times)$ — und gerade nur

ebendieses, wonicht in seiner doppelten Anwendung, als Th. $\bar{1}\bar{6}_\times$) — dürfte sich gar nicht vermeiden lassen. Es scheint unmöglich zu sein — und ich behaupte es, solange nicht das Gegenteil dargethan wird — in der Zeichensprache, ganz in Formeln — jeden Beweis solchergestalt zu führen, dass beim Übergang über jedes ein „ergo" bedeutendes Subsumtionszeichen *nie mehr* als *ein* Theorem des identischen Kalkuls *auf einmal* zur Anwendung komme.

Alle unsere Überlegungen führen wir gleichsam *unter der Herrschaft eines (Aussagen-)Faktors*, welcher das Fortbestehen der Prämissen unsres Schliessens, zu denen auch alle selbstverständlichen oder analytischen Wahrheiten gezählt werden dürfen, das Fortbestehen derselben während irgend eines gerade eben vollzogenen Schlusses garantirt, und im Grunde nur eine Wirkung des Prinzips $\bar{\mathrm{I}}$ der Identität im Aussagenkalkul ist, demzufolge einmal als wahr Anerkanntes solches stillschweigend oder ausdrücklich bleibt, auch immer wieder in Erinnerung gebracht, überall als wahr angemerkt werden darf — womit auch Th. $21_\times$) im Zusammenhange steht. Ganz ähnlich, wie auch über unsern rechnerischen Schlüssen im *Klassen*kalkul jeweils die („gewöhnliche") Mannigfaltigkeit 1 schwebt, die den Betrachtungen zugrunde gelegt ist und mit der dieselben sozusagen *zum Schnitt kommen*, während sie ausserhalb, darüber hinaus, keine Geltung beanspruchen dürfen. —

Es kann jetzt als eine vorzügliche Übung dem Studirenden empfohlen werden, die Beweisführungen für die fundamentalen Sätze unsrer Disziplin, wie sie in Bd. 1 in der üblichsten Form, nämlich in *verbaler* Einkleidung gegeben worden sind, nochmals zu repetiren, so wie wir dies mit den Sätzen selbst in § 29 schon ausgeführt haben, und zwar indem man auch diese Beweisführungen gänzlich in der Zeichensprache des Aussagenkalkuls darstellt. Ganz besonders wären so die Paragraphen 10 und 11 zu berücksichtigen.

Als ein ferneres Exempel sei so noch das Th. 20) hier bewiesen, wobei wir uns des Dualismus halber blos an den einen Teil desselben: Th. $20_\times$) $(ab = a) = (a \Subset b)$ zu halten brauchen.

Für diesen führt schon McColl[9] den Beweis wesentlich in folgender Weise. (Es ist:)

$$\underset{(1)}{(ab = a)} = (ab \Subset a)(a \Subset ab) \underset{\bar{6}_\times)}{=} \dot{1} \cdot (a \Subset ab) \underset{\bar{2}\bar{1}_\times)}{=} (a \Subset ab) =$$

$$\underset{(3_\times)}{=} (a \Subset a)(a \Subset b) \underset{\bar{\mathrm{I}}}{=} \dot{1} \cdot (a \Subset b) \underset{21_\times)}{=} (a \Subset b), \quad \text{q. e. d.}$$

wobei wir das beim Übergang über ein jedes Gleichheitszeichen in Betracht gekommne Theorem, eventuell das Prinzip oder die Definition, mit ihrer Chiffre unter demselben angemerkt haben, neben $\overline{6}_\times$) und $\overline{1}$ es aber unterliessen, auch das noch mit in Betracht gekommne Th. $16_\times$) ausdrücklich anzuführen, kraft dessen in der That erst es erlaubt erscheint, z. B. aus $(a ⋹ a) = 1$ zu schliessen auf

$$(a ⋹ a)(a ⋹ b) = 1 \cdot (a ⋹ b)$$

gemäss dem [für $B = 1$ in Anspruch zu nehmenden] Schema:

$$(A = B) ⋹ (AC = BC)$$

desselben [in welchem A unsre Aussage $(a ⋹ a)$ und C die $(a ⋹ b)$ hier vertrat].

Analog wäre in etwas kürzerer Darstellung:

$$(a + b = b) \underset{(1)}{=} (a + b ⋹ b)(b ⋹ a + b) \underset{(\overline{6}_\times)}{=} (a + b ⋹ b) =$$
$$\underset{(3_+)}{=} (a ⋹ b)(b ⋹ b) \underset{\overline{1}}{=} (a ⋹ b)$$

der dual entsprechende Beweis für das Th. 20_+) — welchen wir demungeachtet auch noch hersetzen, gerade um daran zu zeigen, wie man in Praxi abkürzend zuwerke gehen mag. In der Regel wird man in der That auf die Pedanterie verzichten, welche mit peinlicher Sorgfalt alle mit zur Anwendung kommenden Sätze in erschöpfender Vollständigkeit zu citiren fordert: man wird als selbstverständlich (resp. auf Grund der Voraussetzungen einer Untersuchung geltende Aussagenfaktoren immer ohne weiteres unterdrücken, oder nach Belieben auch anfügen, ohne sie erst durch die 1 dargestellt, *aus* dieser oder *in* diese umgeschrieben zu haben, und ohne sich auf das Th. $\overline{21}_\times$) allemal ausdrücklich zu berufen.

Stellt — um auch auf den in der Klammer vorstehend angedeuteten Fall einzugehen — eine Aussage A irgend eine Annahme vor, die unter den Voraussetzungen einer zu führenden Untersuchung figurirt, so mögen wir etwa B die vereinigte Aussage aller übrigen Hypothesen von ebendieser nennen, und wird AB das Prämissensystem jener Untersuchung sein. Ist dann C irgend eine Behauptung, die kraft der Untersuchung notwendig gelten muss, also eine Konklusion aus dem Prämissensysteme, und nennen wir D den Komplex aller übrigen Ergebnisse dieser Untersuchung (vereinigt gedacht zu einer Gesamtaussage), so wird CD das Konklusionensystem, und der Ansatz:

$$AB \Subset CD$$

das gesamte Untersuchungsresultat ausdrücken.

Da nun $CD \Subset C$ nach Th. $6_\times$) ist, haben wir auch nach Pr. II:

$$AB \Subset C$$

und dies nach Th. $15_\times$) beiderseits mit A multiplizirt, gibt wegen $14_\times$):

$$AB \Subset AC$$

womit gezeigt ist, dass — *unter den Voraussetzungen der Untersuchung* — jeder (als Konklusion) gültigen Behauptung C nach Belieben auch *irgend eine A von jenen Voraussetzungen als ein Faktor zugesetzt* werden mag.

Das Umgekehrte versteht sich ebenfalls von selbst: jeder laut Voraussetzung gültige Faktor A bei einer Behauptung AC kann auch beliebig *unterdrückt* werden. Denn haben wir: $AB \Subset AC$, so folgt wegen $AC \Subset C$ auch $AB \Subset C$.

Dies sind Thatsachen, die man beim aussagenrechnerischen Arbeiten beständig vor Augen haben muss, und die auch Mc Coll und Peirce schon besonders betonten. —

5. Aufgabe. De Morgan[2] p. 124.

Gegeben: Jedes a ist b oder aber c;

d ist sowol b als auch c, ausgenommen wenn b ein e ist, wo es keins von beiden sein wird.

Man ziehe die Schlussfolgerung: Kein a ist d.

Auflösung. Die Data lauten: $a \Subset bc_1 + b_1c$, und:

$$(b \Subset e)_1 \Subset (d \Subset bc), \qquad (b \Subset e) \Subset (d \Subset b_1c_1),$$

oder:

$$bc_1 \Subset d_1 + bc, \qquad b_1 + e \Subset d_1 + b_1c_1.$$

Die vereinigte Gleichung dieser Data lautet:

$$a\,(bc + b_1c_1) + d\{bc_1e_1 + b_1c + (b + c)\,e\} = 0$$

wo der Inhalt der geschwungenen Klammer auch in $bc_1 + b_1c + bce$ zusammenziehbar wäre. Um e zu eliminiren braucht man hievon nur das letzte Glied zu unterdrücken, und aus der nach b und c entwickelten Resultante:

$$a\,(bc + b_1c_1) + d\,(bc_1 + b_1c) = 0$$

gibt endlich die Elimination von b und c zugleich gemäss Zusatz zu Th. 50_+):

$$adda = 0 \qquad \text{oder} \qquad ad = 0$$

wie zu finden gewesen. Statt b und c für sich, wenngleich auf einmal, zu eliminiren, kann man dies auch mit dem ganzen Ausdruck $bc_1 + b_1 c$ (als x betrachet, nebst seiner Negation $bc + b_1 c_1 = x_1$) thun, wo man dann zur Resultante $ad = 0$ ganz unmittelbar geführt wird. —

Wir wollen nunmehr das allgemeine Eliminationsverfahren auch an ein paar komplizirteren Aufgaben illustriren.

6. Aufgabe (O. H. Mitchell[1] p. 85).

Was kann unabhängig von x und y aus den zwei Prämissen geschlossen werden:

1⁰) Entweder einige a, die x sind, sind nicht y, oder alle d sind x und y zugleich;

2⁰) Entweder einige y sind sowol b als auch x, oder alle x sind entweder nicht y, oder c und nicht b —?

Auflösung. Der Ansatz lautet: $1^0) \cdot 2^0) = 1$, das heisst:

$$\{(axy_1 \neq 0) + (d \preceq xy)\}\{(ybx \neq 0) + (x \preceq y_1 + cb_1)\} = 1.$$

Hier haben wir nur die beiden Subsumtionen noch in Gleichungen zu verwandeln, um Alles durch den Typus der Gleichung und Ungleichung ausgedrückt zu haben. Entweder werden dabei nach § 41 die Gleichungen mit der rechten Seite 1 angesetzt und dann das Schema φ) ibid. angewendet, oder es ist mit rechts auf 0 gebrachten Gleichungen zu operiren, wobei das Schema τ) ibid. zur Anwendung zu kommen hat. Wir erhalten nach letzterem Modus:

$$\{[d(x_1 + y_1) = 0] + (axy_1 \neq 0)\}\{[xy\,(b + c_1) = 0] + (bxy \neq 0)\} = 1$$

und dies gibt links ausmultiplizirt vier Glieder.

Das erste wird:

$$\{(b+c_1)xy+d(x_1+y_1)=0\} \preceq \{dy_1+d(b+c_1)y=0\} \preceq \{d(b+c_1)=0\} = (d \preceq b_1 c)$$

— entsprechend dem von Mitchell so genannten „Boolean part“ des Ansatzes, welcher keine partikularen Prämissen enthält.

Das zweite Glied wird:

$$\{d\,(x_1 + y_1) = 0\}\{bxy \neq 0\} = \{dy_1 x + dx_1 = 0\}\{byx + 0 \cdot x_1 \neq 0\} \preceq$$
$$\preceq (dy_1 d = 0)\{by\,(d_1 + y) + 0 \cdot d_1 \neq 0\} = (dy_1 = 0)(by \neq 0) =$$
$$= (0 \cdot y + dy_1 = 0)(by + 0 \cdot y_1 \neq 0) \preceq (0 \cdot d = 0)(b \cdot 1 + 0 \cdot d_1 \neq 0) = (b \neq 0),$$

wenn man allemal erst x, dann y der genannten Regel gemäss eliminirt [vergl. schon das Th. § 41, ι); wir haben die auszuführenden

Prozesse zur Verdeutlichung hier ausführlichst dargelegt; der auch nur einigermassen geübte Rechner wird natürlich viel weniger anzuschreiben benötigt sein].

Das dritte Glied wird ebenso:

$$\{(b+c_1)yx=0\}\{ay_1x\neq 0\}\subseteq\{ay_1(y_1+b_1c)\neq 0\}=(ay_1\neq 0)\subseteq(a\neq 0).$$

Endlich wird das vierte Glied — nach § 41, η):

$$\{ay_1x\neq 0\}\{byx\neq 0\}\subseteq(ay_1\neq 0)(by\neq 0)\subseteq(a\neq 0)(b\neq 0)\,K,$$

wo die „Klausel" K die Forderung kürzehalber vorstellen soll, *dass die Klassen a und b nicht zugleich einunddasselbe Individuum (ausschliesslich) vorstellen dürfen.* Obwol dieses Thema noch nicht systematisch behandelt ist, vielmehr erst in § 49 in Angriff genommen wird, sieht man hier bei einigem Nachdenken doch leicht direkt ein, dass diese Forderung unerlässlich und hinreichend ist, damit es ein y geben könne und müsse, welches (bei nicht verschwindenden a und b) die Relationen $ay_1\neq 0$ und $by\neq 0$ gleichzeitig erfüllt.

Darnach sind die Data des Problems $\subseteq$ der Summe unsrer vier Resultanten, somit:

$$\subseteq(d\subseteq b_1c)+(b\neq 0)+(a\neq 0)+(a\neq 0)(b\neq 0)\,K$$

wo nun aber der letzte Term von den zwei vorhergehenden absorbirt wird — ein Zufall, der Herrn Mitchell's Lösung zugute kommt. Mithin ist

$$(bd=0)(d\subseteq c)+(a+b\neq 0)=1$$

die gesuchte Konklusion, und zwar die volle Eliminationsresultante für x, y. In Worten:

Entweder kein d ist b und alle d sind c (d. h. alle d sind c aber nicht b), *oder* es gibt a oder b.

Fernere Elimination von c würde blos noch den Wegfall des Faktors $(d\subseteq c)$ in obiger Resultante bewirken.

Wer mit rechts auf 1 gebrachten Gleichnngen zu operiren vorzieht, hat für das erste, zweite und dritte Glied bezüglich die Ansätze zu machen:

$$(d_1+xy=1)(x_1+y_1+b_1c=1)=\{d_1(x_1+y_1)+b_1cxy=1\}\subseteq(d_1+\underset{\cdot}{b}_1c=1)$$

wo beim Ansmultipliziren der beiden Polynome zur Linken das Glied b_1cd_1 absorbirt wnrde; resp.:

$$(d_1+xy=1)(bxy\neq 0)=\{(d_1+y)\,x+d_1x_1=1\}(byx+0\cdot x_1\neq 0)\subseteq$$

$$\subseteq(d_1+y+d_1=1)\{by\,(d_1+y)+0\cdot d_1\neq 0\}=(d_1+y=1)(by\neq 0)=$$

$$=(1\cdot y+d_1y_1=1)(by+0\cdot y_1\neq 0)\subseteq(1+d_1=1)(b\cdot 1+0\cdot d_1\neq 0)=(b\neq 0);$$

$$(x_1 + y_1 + b_1 c = 1)(axy_1 \neq 0) = \{(y_1 + b_1 c)\, x + 1 \cdot x_1 = 1\}(ay_1 x + 0 \cdot x_1 \neq 0\} \in$$
$$\in (y_1 + b_1 c + 1 = 1)\{ay_1(y_1 + b_1 c) + 0 \cdot 1 \neq 0\} = (ay_1 \neq 0) = (0 \cdot y + ay_1 \neq 0) \in$$
$$\in (0 + a \neq 0) = (a \neq 0)$$

während für das vierte Glied der nämliche Ansatz bleibt wie oben. Dies einmal zur Vergleichung der beiden Verfahrungsweisen!

Das Resultat befindet sich in Übereinstimmung mit demjenigen Mitchell's. Obwol derselbe die Klausel K übersieht und auch, wie in § 41 gezeigt, eine zur Gewinnung der vollen Resultante nicht ausreichende Methode anwendet, rächen sich diese beiden Umstände in dem vorliegenden Exempel aus leicht erkennbaren (zum Teil vorhin angedeuteten) Gründen nicht, und gilt dasselbe auch von seiner Lösung der nachfolgenden Aufgabe, welche ich bezeichne als

7. Herrn O. H. Mitchell's *Nebelbilderproblem* [1] p. 93 .. 95.

Sechs ebene Figuren a, b, c, d, e, f auf einer Tafel (Fläche, Gesichtsfeld) verändern während einer Stunde (1) beständig ihre Grösse, Gestalt und Lage unter den folgenden Einschränkungen.

I⁰. Die Fläche, welche c und d zusammen bedecken, ist stets eingeschlossen in der Fläche, welche a und b zusammen überdecken, *oder* auch: manchmal (d. i. während eines gewissen Teils der Stunde) fällt e mit dem gemeinsamen Flächenteile von d und f zusammen.

II⁰. Der Teil von a, welcher ausserhalb e fällt ist stets enthalten in dem über b hinaus fallenden Teile der d und f gemeinsamen Fläche, *oder* auch: während der ganzen Stunde trifft es, für einen Teil der Tafel zu, dass alle darin befindlichen Teile von b zugleich in c und e hineinfallen.

III⁰. *Entweder* verschwinden a und d, während e die ganze Tafel bedeckt, *oder* die Tafel*) wird stets von b oder c überdeckt.

Was kann nun *erstens* über die Beziehungen zwischen a, c, e und f unabhängig von b und d geschlossen werden; *zweitens* welche Beziehungen folgen zwischen a, c, e ohne Rücksicht auf b, d, f?

Auflösung. Der Ansatz des Problemes drückt sich durch die Relation aus:

$I^0 \cdot II^0 \cdot III^0 = 1$, in welcher bedeutet:

$$I^0 = (c + d \in a + b) + \{(e = df) \neq 0\},$$
$$II^0 = (ac_1 \in dfb_1) + (bce \neq 0),$$
$$III^0 = (a = 0)(d = 0)(e = 1) + (b = 1) + (c = 1),$$

oder, für die nachherigen Rechnungszwecke umgeformt:

*) Kleine Unklarheit im Texte: mit „it" könnte auch e gemeint sein.

$$\text{I}^0 = \{a_1 b_1 (c + d) = 0\} + \{(dfe_1 + (d_1 + f_1)\, c = 0) \neq 0\},$$
$$\text{II}^0 = \{ae_1 (b + d_1 + f_1) = 0\} + (bce \neq 0),$$
$$\text{III}^0 = (a + d + e_1 = 0) + (b_1 = 0) + (c_1 = 0).$$

Von den beiden Teilen von I^0 herrührend haben wir eigentlich zwei Probleme, wobei die Lösung des ersten sich auf die ganze Stunde, die des zweiten aber auf einen von 0 verschiedenen, sonst aber unbestimmten Teil der Stunde sich beziehen wird.

Diese beiden Teile sondern sich beim Ausmultipliziren von selbst, sodass ich es bei Problemen dieser Gattung für *überflüssig* halten muss (worauf indess Herr Peirce [8] bei der Logik der Beziehungen so grosses Gewicht legt, p. 194 oben) mit Herrn Mitchell eigens doppelte Indices einzuführen und den Aussagen als Suffixa beizusetzen, deren erster sich auf das Universum der Klassen, deren zweiter sich auf das Universum der Zeit (resp. der Gelegenheiten zu Aussagen) beziehen sollte (und als 1 anzusetzen wäre für die in genannter Hinsicht universalen, als u oder v für partikulare Aussagen).

Bezeichnen wir mit I^1, I^2, II^1, II^2, III^1, III^2, III^3 die verschiedenen Glieder der vorstehend zerlegten drei simultanen Prämissen, so erhalten wir beim Ausmultipliziren die nachstehend angegebenen Partialprodukte, aus denen wir *erst* b und d, *zuletzt* f regelrecht eliminiren — cf. v) des § 41.

$$\text{I}^1\text{II}^1\text{III}^1 = (a + b_1 c + d + e_1 = 0) \Subset (a + d + e_1 = 0) \Subset (a + e_1 = 0)$$
$$\text{I}^1\text{II}^1\text{III}^2 = (b_1 + ae_1 = 0) \Subset (ae_1 = 0)$$
$$\text{I}^1\text{II}^1\text{III}^3 = \{c_1 + a_1 b_1 + ae_1 (b + d_1 + f_1) = 0\} \Subset \{c_1 + ae_1 (d_1 + f_1) = 0\} \Subset$$
$$\Subset (c_1 + ae_1 f_1 = 0) \Subset (c_1 = 0)$$
$$\text{I}^1\text{II}^2\text{III}^1 = (a + d + e_1 + b_1 c = 0)(bce \neq 0) \Subset (a + e_1 + b_1 c = 0)(bce \neq 0) \Subset$$
$$\Subset (a + e_1 = 0)(a_1 ce \neq 0)$$
$$\text{I}^1\text{II}^2\text{III}^2 = (b_1 = 0)(bce \neq 0) \Subset (ce \neq 0)$$
$$\text{I}^1\text{II}^2\text{III}^3 = (c_1 + a_1 b_1 = 0)(bce \neq 0) \Subset (c_1 = 0)(ce \neq 0).$$

Vom dritten Produkt hat man, solange nur b, d eliminirt sein sollen, die vorletzte, falls b, d und f zu eliminiren sind aber die letzte der angegebenen Resultanten zu nehmen, bei allen übrigen Produkten gilt die letzte Resultante für beide Fälle.

Wird die Summe der Resultanten gebildet, so geht das sechste Glied im fünften, das vierte im ersten augenscheinlich ein; dieses erste jedoch wird selbst vom zweiten absorbirt, indem

$$(a + e_1 = 0) = (ae_1 + ae + a_1 e_1 = 0) = (ae_1 = 0)(ae = 0)(a_1 e_1 = 0) \Subset (ae_1 = 0)$$

ist, sonach lautet die Resultante für die Elimination von b und d:

$$(ac_1 = 0) + (c_1 + ac_1 f_1 = 0) + (cc \neq 0) = 1,$$

oder

$$\nu) \qquad (a \Subset c) + (c = 1)(a \Subset c + f) + (cc \neq 0) = 1,$$

und für die Elimination von b, d, f, wo nur der zweite Term durch $(c_1 = 0)$ zu ersetzen ist:

$$\xi) \qquad (a \Subset c) + (c = 1) + (cc \neq 0) = 1.$$

Dies sind die Antworten auf die gestellten Fragen, soweit sie den ersten Teil des Problems betreffen, nämlich sich auf die ganze Stunde 1 beziehen.

Behufs Ermittelung des andern Teils der Lösung lassen wir das „$\neq 0$“ bei I^2 zunächst unbeachtet und berücksichtigen es erst wieder beim Gesamtergebnisse. Alsdann werden die Partialprodukte mit den zugehörigen Resultanten:

$$I^2 II^1 III^1 = (1 = 0) = 0$$

$$I^2 II^1 III^2 = (b_1 + ac_1 + dc_1 f + d_1 c + cf_1 = 0) \Subset (ac_1 + cf_1 = 0) \Subset (ac_1 = 0)$$

$$I^2 II^1 III^3 = (c_1 + abc_1 + ad_1 + af_1 + dc_1 f + d_1 c + cf_1 = 0) \Subset$$
$$\Subset (c_1 + ac_1 + cf_1 = 0)^{*)} \Subset (ac_1 + c_1 = 0)$$

$$I^2 II^2 III^1 = (1 = 0)(bcc \neq 0) = 0$$

$$I^2 II^2 III^2 = (b_1 + dc_1 f + d_1 c + cf_1 = 0)(bcc \neq 0) \Subset (b_1 + cf_1 = 0)(bcc \neq 0) \Subset$$
$$\Subset (cf_1 = 0)(ccf \neq 0) \Subset (cc \neq 0)$$

$$I^2 II^2 III^3 = (c_1 + dc_1 f + d_1 c + cf_1 = 0)(bcc \neq 0) \Subset (c_1 + cf_1 = 0)(bcc \neq 0) \Subset$$
$$\Subset (c_1 + cf_1 = 0)(ccf \neq 0) \Subset (c_1 = 0)(cc \neq 0)$$

Unter Fortlassung des ersten und vierten Partialproduktes, welches unmöglich stattfinden kann, haben wir als Summe der vorletzten Resultanten, d. h. solange f noch nicht eliminirt ist:

$$(ac_1 + cf_1 = 0) + (cf_1 = 0)(ccf \neq 0) \neq 0$$

indem von den vier stehenbleibenden Gliedern das zweite im ersten, das vierte im dritten eingeht nach dem Schema:

$$(\alpha + \beta = 0) = (\alpha = 0)(\beta = 0) \Subset (\alpha = 0).$$

Ebenso entsteht nach Elimination auch des f:

$$(ac_1 = 0) + (cc \neq 0) \neq 0,$$

und mag man behufs verbaler Interpretation die beiden Resultate schreiben:

---

*) Diese Vereinfachung zu erzielen erfordert ein wenig Rechnung: Anwendung des Th. ι) des § 18.

o) $$(e \Subset f)\{(a \Subset e) + (ce \neq 0)\} \neq 0$$

— indem wegen $e \Subset f$ auch $ef = e$ sein wird, resp.

π) $$(a \Subset e) + (ec \neq 0) \neq 0.$$

Die Ergebnisse ν), o), sodann ξ), π) lehren in Worten:

Entweder während der ganzen Stunde ist a ganz in e enthalten, oder c bedeckt die ganze Tafel während a von e nebst f überdeckt wird, oder c und e haben einen Teil gemein,

Oder während eines Teils der Stunde („manchmal") ist c ganz in f eingeschlossen, während (entweder) a in e eingeschlossen erscheint, oder c und e in einander greifen.

Beziehungsweise:

Immer ist a in e enthalten oder c bedeckt die Tafel oder ragt in e hinein, *oder* (nur) manchmal ist a in e enthalten oder ragt c in e hinein.

Da $(A = 1) \Subset (A \neq 0)$, so wird man in ξ) den ersten und dritten Term gegen die beiden in π) weglassen können, und kann letzteres Resultat einfacher darstellen durch:

Entweder c bedeckt stets die ganze Tafel oder manchmal ist a in e enthalten oder ragt c in e hinein.

8. Studie.

In [5] p. 34 u. 35 gibt Peirce in der Formelsprache des Aussagenkalkuls ein paar Theoreme des Gebietekalkuls, denen ich in nächster Nummer ein paar analoge zugesellen werde. Für alle viere, die von eigentümlicher Beschaffenheit sind, vermag ich aber keine Gelegenheit für ihre Anwendung oder etwaige Verwertung abzusehn, sodass sie hier nur als Kuriosa des identischen Kalkuls und Übungen im Aussagenkalkul dargestellt und bewiesen werden sollen.

Herrn Peirce's Theoreme lauten:

$$\varrho_\times)\ (ab \Subset c) = \sum_{pq=c}(a \Subset p)(b \Subset q) \;\Big|\; \varrho_+)\ (c \Subset a+b) = \sum_{p+q=c}(p \Subset a)(q \Subset b)$$

wo die Summe jeweils auszudehnen ist über alle möglichen Gebiete p, q welche die unter das Summenzeichen gesetzte Gleichung erfüllen.

Noch besser, vielleicht, wird man die Theoreme so schreiben:

$$\sigma)\ (ab \Subset c) = \sum_{p,q}(pq = c)(a \Subset p)(b \Subset q) \;\Big|\; (c \Subset a+b) = \sum_{p,q}(p+q = c)(p \Subset a)(q \Subset b)$$

wo die Summen auszudehnen sind, sich erstrecken sollen über alle denkbaren Gebietepaare p, q.

Dass dieses auf das vorige hinauskommt, wird klar, wenn man — z. B. links vom Mittelstriche — bedenkt, dass für jedes Wertepaar p, q, für welches etwa $pq \neq c$ ist, der Faktor $(pq = c) = 0$ sein, mit-

hin das betreffende Glied verschwinden, sozusagen von selbst in der Summe fehlen wird.

Beweis der Theoreme (nach Peirce).

Wenn $a \leqslant p$ und zugleich $b \leqslant q$, so folgt nach Th. $17_\times$):

$$ab \leqslant pq$$

und für $pq = c$ folgt also nach Th. 2):

$$ab \leqslant c.$$

Das heisst, es ist zu einer einzigen Aussage zusammengefasst:

$$(pq = c)(a \leqslant p)(b \leqslant q) \leqslant (ab \leqslant c).$$

Da diese Subsumtion nun für jedes Wertepaar p, q gilt, so folgt durch Summirung aus der für alle diese Paare hingeschrieben gedachten Subsumtion nach Th. 17_+) und 14_+) — oder unmittelbar gemäss Def. $(\bar{3}_+)'$:

$$\Sigma(pq = c)(a \leqslant p)(b \leqslant q) \leqslant (ab \leqslant c).$$

Umgekehrt, wenn $ab \leqslant c$ ist, so muss $c + ab = c$ sein nach Th. 20_+). Es ist aber $c + ab = (c + a)(c + b)$. Sonach ist erkannt, dass:

$$(ab \leqslant c) \leqslant \{(c + a)(c + b) = c\}.$$

Nennen wir hier:

$$c + a = p, \qquad c + b = q,$$

wo dann also $pq = c$ sein wird, so ist *für diese* p, q zugleich $a \leqslant p$ und $b \leqslant q$ nach Th. 6_+), mithin gilt:

$$(ab \leqslant c) \leqslant (pq = c)(a \leqslant p)(b \leqslant q)$$

wenigstens für jene gewissen p, q. Das Glied rechterhand ist aber nach Th. 6_+) $\leqslant$ jeder Summe, die es enthält, folglich auch a fortiori:

$$(ab \leqslant c) \leqslant \Sigma(pq = c)(a \leqslant p)(b \leqslant q).$$

Nach 17_+) ist:

$$(p \leqslant a)(q \leqslant b) \leqslant (p + q \leqslant a + b).$$

Dies beiderseits mit $(p + q = c)$ multiplizirt und rechts beachtet, dass nach Th. 3):

$$(c = p + q)(p + q \leqslant a + b) \leqslant (c \leqslant a + b)$$

sein muss, gibt nach Prinzip II:

$$(p + q = c)(p \leqslant a)(q \leqslant b) \leqslant (c \leqslant a + b),$$

und wenn dies für alle p, q hingeschrieben gedacht wird, nach Def. $(\bar{3}_+)'$ in ihrer bekannten Erweiterung auf unbegrenzt viele Terme:

$$\Sigma(p + q = c)(p \leqslant a)(q \leqslant b) \leqslant (c \leqslant a + b).$$

Ferner haben wir:

$$(c \leqslant a + b) = \{c(a + b) = c\} = \leqslant (ac + bc = c)$$

nach Th. $20_\times$) und $27_\times$).

Nennen wir $ac = p$, $bc = q$, so wird erstlich $p \leqslant a$, $q \leqslant b$ nach Th. $6_\times$) sodann, wie eben gezeigt: $p + q = c$ sein und gilt im ganzen:

$$(c \leqslant a + b) \leqslant (p + q = c)(p \leqslant a)(q \leqslant b).$$

[Rechnerisch erhalten wir dies aus dem vorigen Ergebnisse durch beiderseitiges Multipliziren mit:

$$1 \leqslant (ac \leqslant a)(bc \leqslant b)$$

unter Einsetzung der Werte von p, q.] Und da nun das Glied wieder der Summe eingeordnet, so muss sein:

$$(c \leqslant a + b) \leqslant \Sigma(p + q = c)(p \leqslant a)(q \leqslant b).$$

Das Theorem ist hiermit als Subsumtion vor- und rückwärts bewiesen und muss nach Def. (1) folglich als Gleichung gelten. —

9. Fortsetzung.

Meine Analoga zu den Theoremen σ) lauten:

$$\tau)\quad (c \Subset ab) = \sum_{p,q} (pq = c)(p \Subset a)(q \Subset b) \mid$$

$$\mid (a + b \Subset c) = \sum_{p,q} (p + q = c)(a \Subset p)(b \Subset q)$$

und könnten dieselben auch in einer der Peirce'schen ϱ) noch näher kommenden Gestalt angeschrieben werden, indem man wieder den ersten Faktor des allgemeinen Gliedes nur als Bedingung („Erstreckung") unter das Summenzeichen setzte.

Beweis derselben.

Nach $17_\times$) ist:

$$(p \Subset a)(q \Subset b) \Subset (pq \Subset ab)$$

und dies nach Th. $\overline{15_\times}$) beiderseits mit der den Namen c einführenden Gleichung $(pq = c)$ multiplizirt, gibt, wenn man rechts berücksichtigt dass nach Th. 3):

$$(c = pq)(pq \Subset ab) \Subset (c \Subset ab)$$

ist, nach II:

$$(pq = c)(p \Subset a)(q \Subset b) \Subset (c \Subset ab),$$

wo der linken Seite nach Def. $(\bar{3}_+)'$ nun auch ein Σzeichen vorgeschrieben worden kann.

Ferner ist nach Th. $20_\times$):

$$(c \Subset ab) = (c \cdot ab = c) = \Subset (ca \cdot cb = c).$$

Nennen wir nun $ca = p$, $cb = q$, so ist gefolgert: $pq = c$ und muss zugleich nach Th. $6_\times$) sein: $p \Subset a$ und $q \Subset b$, sonach im ganzen:

$$(c \Subset ab) \Subset (pq = c)(p \Subset a)(q \Subset b)$$

wenigstens für *diese* p, q. Hier darf nun rechts auch ein Σ vorgeschrieben werden weil das Glied der Summe eingeordnet,

Nach 17_+) ist:

$$(a \Subset p)(b \Subset q) \Subset (a + b \Subset p + q)$$

und dies mit $(p + q = c)$ beiderseits nach Th. $15_\times$) multiplizirt wird wegen

$$(a + b \Subset p + q)(p + q = c) \Subset (a + b \Subset c)$$

— nach Th. 2) — geben:

$$(p + q = c)(a \Subset p)(b \Subset q) \Subset (a + b \Subset c)$$

und lässt sich links hier auch ein Summenzeichen vorschreiben aus dem schon wiederholt angeführten Grunde.

Desgleichen ist nach Th. 20_+):

$$(a + b \Subset c) = \{(a + b) + c = c\} = \Subset \{(a + c) + (b + c) = c\}.$$

Wird $a + c = p$, $b + c = q$ genannt, so ist gefunden: $p + q = c$, zugleich nach Th. 6_+) $a \Subset p$ und $b \Subset q$ mithin

$$(a + b \Subset c) \Subset (p + q = c)(a \Subset p)(b \Subset q)$$

für die vorstehend definirten p, q. Der rechten Seite darf man unbeschadet der Gültigkeit der Subsumtion ein Σ vorsetzen,

und ist hienach das Theorem als Subsumtion vor- und rückwärts bewiesen; es muss als Gleichung gelten.

Anmerkung 1.

In den Theoremen ϱ) oder σ) darf, wie leicht zu sehen, die Gleichung

$$pq = c \qquad \text{resp.} \qquad p + q = c$$

auch durch die Subsumtion

$$pq \subseteq c \qquad \text{resp.} \qquad c \subseteq p + q,$$

desgleichen in denen τ) durch

$$c \subseteq pq \qquad \text{resp.} \qquad p + q \subseteq c$$

ersetzt werden.

Bei den Umkehrungen (oder zweiten Teilen der Beweise) ist nur zu beachten, dass $(pq = c) \subseteq (pq \subseteq c)$ nach Def. (1) und Th. $\overline{6}_{\times}$) ist, etc.

Anmerkung 2.

Durch Kontraposition ergeben sich aus den vier Theoremen σ) und ϱ) — oder τ) und Gegenstück — noch vier entsprechende Formeln welche auf Un-Subsumtionen bezüglich sind und Produkte Π von Summen [Binomen oder Trinomen je nachdem man ϱ) oder σ), etc. konvertirt] aufweisen.

Die ersten beiden von diesen führt Peirce p. 37 an, doch überlassen wir ihren Ansatz dem Leser.

10. Aufgabe.

x zu eliminiren aus den beiden Unsubsumtionen:

$$ax \not\subseteq b \qquad \text{oder} \qquad a \not\subseteq b + x_1$$

und

$$c \not\subseteq d + x \qquad \text{oder} \qquad cx_1 \not\subseteq d.$$

Dass die nebeneinanderstehenden von diesen äquivalent sein müssen, folgt durch Kontraposition gemäss Th. $\overline{32}$) aus Th. 41). Wir mögen uns darum an die erste Form einer jeden halten.

Auflösung. Nun ist

$$(ax \not\subseteq b)(c \not\subseteq d+x) = (ax \subseteq b)_1(c \subseteq d+x)_1 = (ab_1x = 0)_1(cd_1x_1 = 0)_1 =$$
$$= (ab_1x \neq 0)(cd_1x_1 \neq 0).$$

Um hieraus x zu eliminiren, haben wir das Schema η) des § 41 anzuwenden als den hier in Betracht kommenden und schon ausreichenden Spezialfall des allgemeinen Eliminationstheorems τ) daselbst.

Darnach ergibt sich als die Resultante:

$$(ab_1 + 0 \neq 0)(0 + cd_1 \neq 0), = (ab_1 \neq 0)(cd_1 \neq 0), =$$
$$= (a \not\subseteq b)(c \not\subseteq d).$$

Dies ist aber blos die Resultante „aus dem Rohen". Um sie zur vollen Resultante zu machen ist noch erforderlich und hinreichend, dass man derselben eine Klausel K als Faktor beifüge. Obwol wir uns die systematische Entwickelung derselben erst in § 49 vornehmen, sei sie doch für den vorliegenden Fall hier angegeben, da sie unschwer auch mit dem gemeinen Verstande zu begreifen.

Die Klausel K fordert, dass falls die Klassen $a b_1$ und $c d_1$ sich je auf ein einziges Individuum zusammenziehen sollten, dieses nicht bei beiden das nämliche Individuum sein darf.

Andernfalles müsste ja dieses eine Individuum den Klassen x und x_1 gleichzeitig angehören (damit eben $a b_1 x \neq 0$ und zugleich $c d_1 x_1 \neq 0$ sein könnte) — was unmöglich.

Sonach wäre, wenn K den Inhalt jener Forderung bedeutet:

$$(a \not\Subset b)(c \not\Subset d)\, K$$

die volle Resultante.

Auch abgesehen von der Klausel jedoch ist zu sehen, dass die Resultante nicht etwa erhältlich ist, indem man die von Peirce angegebene Resultante aus den unverneinten Subsumtionen

$$(a x \Subset b)(c \Subset d + x),$$

das ist die Subsumtion $(ac \Subset b + d)$ — vergl. § 27, Bd. 1, S. 577 — einfach negirte. Hierdurch würde nämlich entstehen:

$$ac \not\Subset b + d \qquad \text{oder} \qquad a c b_1 d_1 \neq 0.$$

Nach dem entsprechenden Schema aus § 40, α) ist aber nur:

$$(a b_1 \cdot c d_1 \neq 0) \Subset (a b_1 \neq 0)(c d_1 \neq 0),$$

somit

$$(ac \not\Subset b + d) \Subset (a \not\Subset b)(c \not\Subset d)$$

und findet im allgemeinen keineswegs Äquivalenz statt. Die Figur 24 z. B. zeigt, dass sehr wohl $a \not\Subset b$ und zugleich $c \not\Subset d$ sein kann, ohne dass doch $ac \not\Subset b + d$ zu sein brauchte, da im Gegenteil das vorstehend schraffirte $ac \Subset b + d$, ja schon $\Subset b$ hier ist.

Fig. 24.

Aus den Prämissen des Problems darf nun blos auf $K(a \not\Subset b)(c \not\Subset d)$ geschlossen werden, keineswegs aber auf $ac \not\Subset b + d$, was eine in Hinsicht des fehlenden Faktors K noch unvollständige, in jeder andern Hinsicht aber *viel zu weit* gehende und darum unberechtigte Behauptung sein würde — im Gegensatz zu den Mitchell'schen zwar richtigen aber nicht weit genug gehenden Resultanten.

11. Aufgabe.

x zu eliminiren aus den beiden negirten Subsumtionen:

$$ax \not\subseteq b \quad \text{oder} \quad a \not\subseteq b + x_1$$

und

$$cx \not\subseteq d \quad \text{oder} \quad c \not\subseteq d + x_1.$$

Auflösung. Da

$$(ax \not\subseteq b)(cx \not\subseteq d) = (ab_1x \neq 0)(cd_1x \neq 0)$$

so ergibt sich ähnlich wie bei der vorigen Aufgabe:

$$(ab_1 + 0 \neq 0)(cd_1 + 0 \neq 0), = (ab_1 \neq 0)(cd_1 \neq 0) \quad \text{oder} \quad (a \not\subseteq b)(c \not\subseteq d)$$

als die Resultante aus dem Rohen. Diese ist aber jetzt selbst auch schon die volle Resultante. Eine Klausel tritt nicht hinzu, oder wenn wir eine solche fingiren wollen, ist sie als $K = 1$ zu denken. Es wird hier nämlich immer ein $x_1 = ab_1 + cd_1$, geben, welches die Prämissen erfüllt.

Hienach ist bemerkenswert, dass während die unnegirten Subsumtionen $ax \subseteq b$ und $cx \subseteq d$ als solche von derselben Form nach Peirce's Wahrnehmung *keine* Resultante (der Elimination des x) ergaben (es sei denn: $0 = 0$), die negirten oder Unsubsumtionen doch eine solche liefern und zwar, bis auf die Klausel, die nämliche Resultante, wie wenn die eine von ihnen in die andere Kategorie gehörte (das x nicht im Minor, sondern im Major gehabt hätte).

Ob es nun nach den bei dieser und der vorigen Aufgabe gemachten Wahrnehmungen (denen weitere betreffs der Elimination aus Sub- nebst Unsubsumtion anzureihen wären) möglich und lohnend sein würde, die in § 27 dargelegte Peirce'sche Methode nach des letzteren Absichten auch auf die durch Zulassung von Unsubsumtionen erweiterten Probleme auszudehnen, müssen wir noch dahin gestellt sein lassen.

12. Studie. Jevons[9] p. 207.

Von den Data:

Keines der a ist b ausser denjenigen (a), die c und d zugleich sind; von diesen aber sind *nur einige* b;

Entweder c oder d fehlt nie, ausgenommen wo a oder b vorliegt, in welchem Falle sie (d. h. c und d) beide fehlen

— verlangt Jevons blos die Einkleidung.

Dieser Aufgabe ist aber seine Symbolik, weil sie über ein negirtes Beziehungszeichen nicht verfügt und sich zum Aussagenkalkul noch nicht

emporgearbeitet, entfernt nicht gewachsen. Er begnügt sich darum auch mit blossen Andeutungen und Vermutungen.

Wir erhalten in möglichst engem Anschluss an den Worttext:

$$\{a(cd)_1 \mathrel{=\!\!\!\in} b_1\}(acdb \neq 0)(acdb_1 \neq 0)\,[(a+b)_1 \neq 0) \mathrel{=\!\!\!\in}$$

$$\mathrel{=\!\!\!\in} (c_1 = 0) + (d_1 = 0)]\,(a + b \mathrel{=\!\!\!\in} c_1 d_1).$$

Der erste Faktor, besagend: diejenigen a, welche nicht »c und d zugleich« sind, sind nicht-b (m. a. W. keines derselben ist b) wird sich in $ab(c_1 + d_1) = 0$ umschreiben lassen.

Ebenso der vierte Faktor welcher besagt: falls nicht »a oder b«, d. h. falls weder a nocb b vorliegt, so fehlt entweder c nie oder es fehlt b nie, in

$$(a_1 b_1 \neq 0) \mathrel{=\!\!\!\in} (c = 1) + (d = 1), \quad \text{resp.} \quad a_1 b_1 \mathrel{=\!\!\!\in} c + d \quad \text{oder} \quad a_1 b_1 c_1 d_1 = 0$$

— wozu jedocb nachher nocb eine Bemerkung vonnöten.

Endlich ist der letzte Faktor besagend, dass wo a oder b vorliegt, c und d beide fehlen, zu schreiben als $(a+b)(c+d) = 0$ und gibt die vereinigte Gleicbung der drei bisber erwähnten Faktorcn:

$$(a+b)(c+d) + ab(c_1 + d_1) + a_1 b_1 c_1 d_1 = 0,$$

oder

$$a(b+c+d) + a_1\{b(c+d) + b_1 c_1 d_1\} = 0,$$

noch besser, rechts auf 1 gebracbt:

$$ab_1 c_1 d_1 + a_1\{bc_1 d_1 + b_1(c+d)\} = 1.$$

Der zweite Faktor des Ansatzes besagte, dass einige acd (einige a die c und d zugleich sind) b seien, der dritte Faktor, dass einige acd aucb nicht-b seien, womit im ganzen wiedergegeben ist, dass *nur* einige acd auch b sind.

Schreibt man nun die vereinigte Aussage der Data innerlich nach allen Symbolen entwickelt wie folgt:

$$(ab_1 c_1 d_1 + a_1 b c_1 d_1 + a_1 b_1 cd + a_1 b_1 c d_1 + a_1 b_1 c_1 d = 1)(abcd \neq 0)(ab_1 cd \neq 0),$$

so ist dieselbe zur Elimination irgend einer Symbolgruppe vorbereitet.

Wir geben die volle Resultante der Elimination zunächst von a. Diese lautet:

$$(b_1 + c_1 d_1 = 1)(0 \neq 0)(0 \neq 0)$$

wo die 0 links im zweiten Faktor aus $bcd \cdot b_1 c_1 d_1$ im dritten aus $b_1 cd \cdot b_1 c_1 d_1$ entstanden ist — und lässt durcb ihre beiden letzten Faktoren erkennen, dass das System der Data ein *inkonsistentes* sein muss.

In der That garantirt der letzte Faktor des Ansatzes, dass unter anderm auch $abcd = 0$ sei im Widerspruch zum zweiten Faktor desselben.

Die Unverträglichkeit ist Jevons entgangen.

Bemerkt muss aber noch werden, dass die Fassung der Data an Unklarheit leidet, indem im ersten Absatz von a, b, c, d als Klassen oder Gattungsnamen die Rede ist, der Logik des Umfangs entsprechend im zweiten Alinea jedoch ebendavon als von (den) Merkmalen (welche solchen Gattungen zukommen) entsprechend einer Logik des Inhaltes.

13. Aufgabe, McColl Math. Quest. vol. 34, p. 40 und 41, gelöst von C. J. Monro.

Aus den Prämissen (die *aussagenrechnerisch* interpretirt zu denken sind)

$$abf \Subset cx + dey, \qquad af_1 y \Subset cx_1 + d_1 e$$

sollen x und y eliminirt werden.

Auflösung. Man findet nach irgend einer der zur Verfügung stehenden Methoden:

$$abf \Subset c + de. \text{ —}$$

Recht bequem ist hier McColl's Verfahren, Bd. 1, S. 591, ein wenig nach Peirce modifizirt: Man schreibt behufs Elimination des y die beiden Prämissen in Gestalt der drei Subsumtionen an:

$$abf(c_1 + x_1) \Subset \begin{cases} de \\ y \end{cases}, \qquad af_1(c_1 + x)(d + e_1) \Subset y_1.$$

Überschiebendes Multipliziren der beiden letzten gibt hier, wegen der links konkurrirenden Faktoren f und f_1, blos eine Identität $0 \Subset 0$. [Bei meiner Methode hätte man genau die gleiche Wahrnehmung an den Koeffizienten von y_1 und y in der rechts auf 0 gebrachten vereinten Gleichung zu machen gehabt.] Resultante nach y ist daher die erste der obigen drei Subsumtionen, welche zerfällt in die zweie

$$\left.\begin{array}{l} abfc_1 \\ abfx_1 \end{array}\right\} \Subset de$$

und da der letzteren von diesen: $abf(d_1 + e_1) \Subset x$ nur $0 \Subset x_1$ gegenübergestellt werden kann, so ist schon die erste von ihnen die gesuchte Resultante nach x.

14. Studie. (Nochmals McColl's Methode.)

Um zum Zweck der Methodenvergleichung McColl's Zuwerkegehen vollständig erläutert zu haben, will ich auch wenigstens *eine* komplizirtere Aufgabe hier genau in seiner Weise aussagenrechnerisch behandeln, wie solche Bd. 1, S. 592 im Kontexte bereits theoretisch von mir charakterisirt worden, und wähle ich dazu die 28. Aufgabe des § 25, ibid. S. 552, bei der aus dem Aussagenprodukte

$$F(x,y) = (abx \Subset cde)(bcy \Subset de)\{c + d + e_1 \Subset (a_1 + b + x)(b_1 + c + y)\}(a_1 x = b_1 y)$$

das Symbol y zu eliminiren, x zu berechnen gewesen.

Wenn man will, so kann man schon allgemein nach den Schemata μ) des § 32 diese ganze Aussage in ein *Klassen*symbol (in „ihre Gültigkeitsklasse") umschreiben wie folgt:

$$F(x, y) = (a_1 + b_1 + x_1 + ede)(b_1 + c_1 + y_1 + de)\{e_1 d_1 c + (a_1 + b + x)(b_1 + e + y)\} \cdot$$
$$\cdot \{a_1 b_1 xy + (a + x_1)(b + y_1)\}.$$

Wenn man es dagegen vorzieht — und dieses scheint Mc Coll zu thun — so braucht solches Umschreiben nur für die Werte 0 und 1 von x oder y nach Bedarf ausgeführt zu werden. Der Gang der Rechnung ist nämlich einfach dieser. Man hat:

$$xy \mathrel{\underline{\in}} F(1, 1) \qquad x_1 y \mathrel{\underline{\in}} F(0, 1)$$
$$xy_1 \mathrel{\underline{\in}} F(1, 0) \qquad x_1 y_1 \mathrel{\underline{\in}} F(0, 0)$$

woraus durch überschiebendes Addiren:

$$x \mathrel{\underline{\in}} F(1, 1) + F(1, 0), \qquad x_1 \mathrel{\underline{\in}} F(0, 1) + F(0, 0)$$

und sich mittelst Kontraposition die Lösung in Mc Coll'scher Ansatzweise ergeben wird als:

$$F_1(1, 1)\, F_1(1, 0) \mathrel{\underline{\in}} x_1, \qquad F_1(0, 1)\, F_1(0, 0) \mathrel{\underline{\in}} x.$$

Die Ausführung gestaltet sich im Hinblick auf die Theoreme 21) und 22) etc. wie folgt:

$$xy \mathrel{\underline{\in}} (a_1 + b_1 + cde)(b_1 + c_1 + de)(a_1 b_1 + ab) = a_1 b_1 + abcde,$$
$$xy_1 \mathrel{\underline{\in}} (a_1 + b_1 + cde)(c_1 d_1 e + b_1 + c)\, a = a\,(b_1 + cde),$$
$$x \mathrel{\underline{\in}} b_1 + acde, \qquad b\,(a_1 + c_1 + d_1 + e_1) \mathrel{\underline{\in}} x_1;$$
$$x_1 y \mathrel{\underline{\in}} (b_1 + c_1 + de)(c_1 d_1 e + a_1 + b)\, b = b\,(c_1 + de),$$
$$x_1 y_1 \mathrel{\underline{\in}} c_1 d_1 e + (a_1 + b)(b_1 + c) = a_1 b_1 + a_1 c + bc + c_1 d_1 e,$$
$$x_1 \mathrel{\underline{\in}} b + a_1 + c_1 d_1 e, \qquad ab_1\,(c + d + e_1) \mathrel{\underline{\in}} x.$$

So originell diese Methode ist, so sticht der behufs ihrer Anwendung geforderte Arbeitsaufwand doch unvorteilhaft ab schon gegen den bei seiner Lösung der vorstehenden Aufgabe (siehe l. c.) von Monro geforderten, obwol dieser sich noch der schwerfälligen Boole'schen Schemata bedient (auch abgesehen davon, dass er für die bekannten Parameter cde und $c + d + e_1$ des Problems von vornherein kürzere Zeichen einführt). —

Ich möchte hier übrigens das auf S. 559 des Bd. 1 von mir Gesagte in etwas modifiziren. Dort hatte ich diejenige Methode Herrn Mc Coll's im Auge, welche er allgemein schematisirt hat, wie S. 591 geschildert — welche er aber nicht anwendet!

Wogegen das praktisch von ihm bethätigte vorstehend illustrirte Verfahren (Kontext der S. 592) allerdings verdient, als eine *vierte* von den übrigen wesentlich verschiedene und obzwar selten, so doch zuweilen auch vorteilhaftere *Methode* anerkannt zu werden. —

15. Aufgabe, Mc Coll, Math. Questions, vol. 34, p. 69.

Unter welcher Voraussetzung dürfen wir auf Grund der drei Aussagensubsumtionen („implications"):

$$ab_1 + a_1 b \in dx, \qquad ax + by \in c, \qquad cd \in y$$

den Schluss ziehen, dass entweder x *oder aber* y gelten müsse.

Auflösung. Es handelt sich darum, das (von x und y freie) Subjekt zu dem gegebnen Prädikate $xy_1 + x_1 y$ zu finden.

Um dieses systematisch nach der im Zusatz 4 zu Th. 50) von Boole gegebnen Methode zu thun, adjungiren wir zu dem Prämissensysteme die Gleichung:

$$z = xy_1 + x_1 y,$$

eliminiren x und y aus demselben, beziehungsweise aus dessen vereinigter Gleichung und erhalten (nicht ohne einige Rechnung):

$$ab_1 c_1 + (ab_1 + a_1 b)\, d_1 = 0, \qquad \{ac_1 + (ab_1 + a_1 b)\, cd\}\, z + a_1 b c_1 z_1 = 0$$

wo dann der zweite Teil dieser Resultante nach z aufgelöst geben wird:

$$a_1 b c_1 \in z \in abc + a_1 (b_1 + c_1),$$

indem der Koeffizient von z durch den ersten zu $a(b_1 + c_1) + a_1 bc$ reduzirbar. Sonach gibt:

$$a_1 b c_1 \in xy_1 + x_1 y$$

die Antwort auf die gestellte Frage, d. h.: wenn b gilt während a und c nicht gelten, so muss x ohne y oder y ohne x gelten.

In McColl's Manier hätte man, da das gesuchte Subjekt zu z durch Kontraposition aus einem Prädikate von $z_1, = xy + x_1 y_1$, zu schliessen sein wird, zunächst die Ansätze zu machen:

$$xy \in (ab_1 + a_1 b \in d)(a + b \in c)(cd \in 1) = (ab + a_1 b_1 + d)(a_1 b_1 + c) = a_1 b_1 + abc + cd$$

$$x_1 y_1 \in (ab_1 + a_1 b \in 0)(0 \in c)(cd \in 0) = (ab + a_1 b_1)(c_1 + d_1), \quad \text{sonach:}$$

$$xy + x_1 y_1 \in a_1 b_1 + ab + cd, \quad \text{also} \quad (ab_1 + a_1 b)(c_1 + d_1) \in xy_1 + x_1 y.$$

Dies stimmt erst mit dem einfachern oben ermittelten Ergebniss überein, wenn man die oben vermerkte Resultante der Elimination von x, y mit berücksichtigt. Um diese auch mit McColl zu gewinnen, sind ausser vorstehenden auch noch die Ansätze nicht zu umgehen:

$$xy_1 \in (ab_1 + a_1 b \in d)(a \in c)(cd \in 0) = (ab + a_1 b_1 + d)(a_1 + c)(c_1 + d_1)$$

$$x_1 y \in (ab_1 + a_1 b \in 0)(b \in c)(cd \in 1) = (ab + a_1 b_1)(b_1 + c)$$

durch deren additive Überschiebung mit jenen entsteht:

$$1 \in ab + a_1 b_1 + cd + a_1 d_1 \quad \text{oder konvertirt:} \quad (ab_1 + a_1 b)(ac_1 + d_1) = 0.$$

Durch all' dies wird aber das Verfahren wieder umständlicher als das vorhergehende nach Boole von mir modifizirte.

16. Aufgabe, McColl, „Math. Questions", Vol. 33, p. 60, 61 mit Lösung von Monro und Elizabeth Blackwood.

Wann wird aus den (aussagenrechnerisch zu deutenden) Prämissen:

$$abx + a_1 b_1 x_1 \subseteq c_1 y + c y_1, \qquad dey + d_1 e_1 y_1 \subseteq a_1 x + a x_1$$

zu folgern sein, dass x oder y wahr ist?

Auflösung. Man adjungire dem Prämissensystem die Gleichung $z = x + y$, eliminire x und y und wird erhalten: $0 \cdot z + a_1 (b_1 c_1 + d_1 e_1) z_1 = 0$, eine Gleichung, deren Auflösung nach z:

$$a_1 (b_1 c_1 + d_1 e_1) \subseteq z \subseteq 1$$

das gesuchte Subjekt zu $x + y$ erkennen lässt.

In McColl'scher Manier schliesst man hier recht bequem — viel bequemer als vorstehend — und in der That wol am besten:

$$x_1 y_1 \subseteq (a_1 b_1 \subseteq c)(d_1 c_1 \subseteq a) = (a + b + c)(d + c + a) = a + (b + c)(d + e)$$

und daraus kontraponirend:

$$a_1 (b_1 c_1 + d_1 e_1) \subseteq x + y \; (= z). \text{ —}$$

Manches Verfahren hat also vor den übrigen keine *unbedingten* Vorzüge, vielmehr, von Fall zu Fall wechselnd, bald Vorzüge, bald Nachteile und es verdient alsdann, gleich diesen, beachtet zu werden. Von *jedem* Verfahren, allerdings, dürfte sich dergleichen doch nicht wol behaupten lassen. —

17. Aufgabe von W. B. Grove, „Math. Questions", Vol. 34, p. 80 sq., gelöst von Elizabeth Blackwood.

Wenn mein Sohn entweder Jurisprudenz oder Theologie studiren soll (is to enter either the law or the church), so muss er entweder nach Oxford oder nach Cambridge gehen. Geht er nach Oxford ohne Jus oder nach Cambridge ohne Theologie zu studiren, so fällt ihm ein Legat bei seines (offenbar etwas schrulligen!) Onkels Tode zu. Er wird desselben jedoch *nur* (höchstens)*) dann verlustig gehen, wenn er weder nach Oxford geht noch Theologie studirt sowie, wenn er weder nach Cambridge geht noch Jus studirt (if he will not go to .. and at the same time will not enter the ..). Ich bestimme, dass er entweder Jus oder Theologie studire. Wird er alsdann das Legat erhalten, oder nicht?

*) „under *no other* circumstances." Der Zusatz des Aufgabenstellers, welcher laut dessen Fassung der Aufgabe die positive Assertion enthält, dass der Sohn unter den Umständen $m_1 \beta_1 + n_1 \alpha_1$ auch sicher das Legat erhalten werde, ist überflüssig und auch von der Löserin nicht berücksichtigt. Derselbe würde dem $F(x)$ einen Faktor hinzufügen:

$$(m_1 \beta_1 + n_1 \alpha_1 \subseteq x_1) \quad \text{oder} \quad \{x \subseteq (m + \beta)(n + \alpha) = m\alpha + n\beta\}$$

der für $x = 0$ sich irrelevant erweist.

Auflösung. Es möge bezüglich α, β, m, n, x die Aussagen vorstellen: Er wird Jus resp. Theologie studiren, nach Oxford resp. Cambridge gehen, das Legat erhalten. So gilt $F(x)$, das heisst:

$$(\alpha + \beta \mathrel{=\!\!\!\!\in} m + n)(m\alpha_1 + n\beta_1 \mathrel{=\!\!\!\!\in} x)(x_1 \mathrel{=\!\!\!\!\in} m_1\beta_1 + n_1\alpha_1)(\alpha + \beta)(\alpha \mathrel{=\!\!\!\!\in} \beta_1)(m \mathrel{=\!\!\!\!\in} n_1)$$

indem die letzten beiden (Aussagen-)Faktoren, nämlich $(\alpha\beta + mn = 0)$, als selbstverständliche unterstellt werden obzwar sie im Problem nicht ausdrücklich statuirt worden. Gesucht das Subjekt (als der Bedingungssatz) zu x, welches durch Kontraposition aus dem Prädikate zu x_1 zu gewinnen. Es ist aber gemäss McColl: $x_1 \mathrel{=\!\!\!\!\in} F'(0)$, wo

$$F(0) = (\alpha_1\beta_1 + m + n)(m_1 + \alpha)(n_1 + \beta)(m_1\beta_1 + n_1\alpha_1)(\alpha + \beta)(\alpha_1 + \beta_1)(m_1 + n_1) = 0,$$

wie man sich überzeugt durch Ausmultipliziren. Dabei war der zweite, dritte und vierte Faktor aus $(m\alpha_1 + n\beta_1 \mathrel{=\!\!\!\!\in} 0)(1 \mathrel{=\!\!\!\!\in} m_1\beta_1 + n_1\alpha_1)$ entstanden, gleich den übrigen gemäss den Schemata § 32, μ).

Haben wir also $x_1 \mathrel{=\!\!\!\!\in} 0$, so folgt: $1 \mathrel{=\!\!\!\!\in} x$, d. h. er wird unfehlbar das Legat erhalten.

18. Aufgabe*), Christine Ladd-Franklin, „Math. Questions", Vol. 42, p. 66 u. 67, 1885. Lösung von Macfarlane, ihr, und Andern.

Für eine gewisse Klasse von Dingen (a certain lot of objects) gelten die Prämissen:

$$a = bx_1 + b_1y, \qquad c \neq d_1x + dy_1,$$

gesucht was über a, b, c, d ohne Rücksicht auf x, y ausgesagt werden kann.

Auflösung. Bringen wir gemäss Th. 39) die Gleichung rechts auf 1, die Ungleichung auf 0, so lautet die vereinigte Aussage der Data:

$$\{a(bx_1 + b_1y) + a_1(bx + b_1y_1) = 1\}\{c(d_1x_1 + dy) + c_1(d_1x + dy_1) \neq 0\}$$

und sind aus dieser x und y zu eliminiren. Anordnung nach y und x gibt leicht:

$$[\{(ab_1 + a_1b)x + ax_1\}y + \{a_1x + (ab + a_1b_1)x_1\}y_1 = 1] \cdot$$
$$\cdot [\{(cd + c_1d_1)x + cx_1\}y + \{c_1x + (cd_1 + c_1d)x_1\}y_1 \neq 0]$$

woraus nach dem Schema φ) des § 41 als Resultante von y fliesst:

$$\{(a_1 + b_1)x + (a + b_1)x_1 = 1\}.$$
$$\cdot\{(ab_1 + a_1b)(cd + c_1d_1)x + acx_1 + a_1c_1x + (ab + a_1b_1)(cd_1 + c_1d)x_1 \neq 0\}$$

und hieraus weiter als Resultante von x:

*) Bd. 1, S. 590, Mitte, sollte statt der 18. auf die 19. Studie verwiesen sein.

$(a_1+b_1)\{(ab_1+a_1b)(cd+c_1d_1)+a_1c_1\}+(a+b_1)\{ac+(ab+a_1b_1)(cd_1+c_1d)\} \neq 0,$
indem der Boole'sche Faktor der Resultante auf $(1=1)=1$ hinausläuft. Ausmultiplizirend erhalten wir zunächst:

$$(ab_1+a_1b)(cd+c_1d_1)+a_1c_1+ac+(ab+a_1b_1)(cd_1+c_1d) \neq 0$$

oder thunlichst reduzirt:

$$(a \neq c_1)+(ab_1+a_1b \neq cd_1+c_1d).$$

Dieses (zuverlässig richtige) Ergebniss stimmt *nicht* mit dem von den Lösern gewonnenen. Herr Macfarlane u. s. w. ersetzt die Ungleichung $A \neq B$ durch eine Gleichung $A+v=B+w$, wo v, w unbestimmt sein sollen aber nicht gleichzeitig 0 sein dürfen etc. Dies ist zwar ein Umweg, indessen angängig. Das unrichtige Resultat ergab sich ihm zufolge ungerechtfertigten Operirens mit dem *Minus*-Zeichen, dessen Gesetze aus der Arithmetik in den identischen Kalkul nicht ohne weiteres übertragen werden dürfen und dessen Anwendung daher im letzteren *besser ganz vermieden* wird. Wir haben schon beim Hauber'schen Satze Veranlassung gehabt, darauf aufmerksam zu machen, wie das gleiche Verfahren, vor welchem hier gewarnt wird, auch andere namhafte Autoren schon in Fehler führte. Herrn Macfarlane's und Frau Franklin's Ergebniss lautet:

$$a(bd_1+b_1d) \neq c_1(bd_1+b_1d).$$

Das unsrige kann auch geschrieben werden in der Gestalt:

$$(a \neq c_1)+(ab+a_1b_1 \neq cd+c_1d_1),$$

und ist dahin zu interpretiren: *entweder* die a sind nicht einerlei mit den Nicht-c, *oder* was a und b oder keins von beiden ist fällt nicht durchaus zusammen mit dem, was c und d oder keins von beiden ist.

Diese Aussage lässt sich indess noch weiter vereinfachen. Nach Th. $\overline{33}_+$) Zusatz können wir nämlich unsre Resultante auch schreiben:

$$(a \neq c_1)+(a=c_1)(ab+a_1b_1 \neq cd+c_1d_1).$$

Unter der Voraussetzung $a=c_1$ oder $c=a_1$, sonach in unserm letzten Aussagenfaktor, dürfen wir aber das Symbol c auch durch a_1 ersetzen. Wir erhalten, wenn wir auch den zugefügten Aussagenfaktor $(a=c_1)$ wieder unterdrücken:

$$(a \neq c_1)+(ab+a_1b_1 \neq a_1d+ad_1).$$

Nun lässt sich (als eine Bereicherung unsres § 19) das folgende allgemeine Theorem:

$$(ax+bx_1=cx+dx_1)=(ax=cx)(bx_1=dx_1)$$

unschwer nach Th. 24_+) und 39) rechnerisch beweisen.

Dasselbe lässt sich auch leicht auf beliebig viele Argumente ausdehnen zu dem noch allgemeinern Satze:

Wenn zwei Funktionen (im identischen Kalkul) *einander gleich sind*, und dieselben nach irgend welchen, aber beide nach den näm-

lichen Argumenten „entwickelt“ werden, *so müssen die gleichnamigen Glieder ihrer beiderseitigen Entwickelungen bezüglich je für sich schon übereinstimmen* (woraus aber nicht auf die Gleichheit von deren Koeffizienten geschlossen werden darf!) — ein Satz dessen Umkehrung auch, im Hinblick auf Th. 17_+), als selbstverständlich erscheint.

Am leichtesten beweist sich dieser Satz wol dadurch, dass man die Gleichung zwischen den beiden Funktionen durchmultiplizirt mit irgend einem Konstituenten ihrer Entwickelung, wo dann die mit diesem ungleichnamigen Glieder alle wegfallen werden.

Durch Kontraposition folgt aus obigem Theoreme:

$$(ax + bx_1 \neq cx + dx_1) = (ax \neq cx) + (bx_1 \neq dx_1).$$

Hiernach zerfällt der zweite Teil unsrer Resultante in:

$$(ab \neq ad_1) + (a_1b_1 \neq a_1d), \quad \text{oder} \quad \{a(bd + b_1d_1) \neq 0\} + \{a_1(bd + b_1d_1) \neq 0\},$$

was sich nach bekanntem Schema § 40, α) zusammenzieht in:

$$bd + b_1d_1 \neq 0 \quad \text{oder} \quad b \neq d_1.$$

In der That: wenn die b mit den Nicht-d sich nicht decken, sei es sofern sie unter a fallen, sei es sofern sie unter nicht-a fallen, so können sie überhaupt nicht mit ihnen zusammenfallen. Hienach ist:

$$(a \neq c_1) + (b \neq d_1)$$

der einfachst mögliche Ausdruck unsrer Resultante und leicht zu interpretiren. Behufs verbalen Ausdrucks mag man die Fassung vorziehen:

$$(ac \neq 0) + (a_1c_1 \neq 0) + (bd \neq 0) + (b_1d_1 \neq 0),$$

was besagt: entweder einige a sind c, oder es gibt Dinge die beides nicht sind, oder es gibt Dinge die sowol b als d oder keins von beiden sind.

Der McColl'schen Technik ist das vorstehende Problem überhaupt nicht zugänglich.

19. Studie. Um eine Idee zu geben, auf welche Weise es möglich ist, Probleme des Klassenkalkuls auch mittelst des Aussagenkalkuls schon einzukleiden und zu lösen, wollen wir die Art darlegen, wie McColl die Venn'sche Aufgabe unter σ_1) des § 18 in Angriff nimmt (siehe ebenda S. 392).

Wir sprechen im Folgenden von *irgend einem* aber *immer von demselben* Buche aus dem Haufen, und lassen A' die Aussage bedeuten: (die Person) A beansprucht *es* (claims it), B' die Aussage: B beansprucht *es*, C' die: C beansprucht *es;* und ferner a die Aussage: *es* ist deutsch, b die Aussage: *es* ist politisch, c die: *es* ist gebunden, d die Aussage: *es* ist eine Novelle.

Alsdann gibt Einkleidung der Data augenscheinlich die Gleichungen:

$$A' = ab + a_1cd, \qquad B' = bc + b_1ad, \qquad C' = ac + c_1bd$$

und zwar Gleichungen, weil sie als Aussagensubsumtionen vor- und rückwärts zu gelten haben.

Aus diesen folgen nun rechnerisch ganz dieselben Antworten auf die gestellten Fragen, welche wir l. c. bereits gegeben haben, mit dem kleinen Unterschied nur, dass hier die Buchstaben A, B, C einen Accent tragen. Zum Beispiel: $A'B' = bc(a + d)$, $A'B'C' = abc$, und interpretiren diese sich auch eben dahin — resp.: Wenn A und B *es* (ein Buch) zugleich beanspruchen, so ist *es* sicher politisch und gebunden, sowie deutsch oder Novelle, und umgekehrt, wenn *es* solcher Art ist, wird es von A und B beansprucht. Desgleichen wenn es deutsch, politisch und gebunden ist, dann und nur dann, dann ausschliesslich wird es von allen drei Personen beansprucht.

Suchen wir nun aber die Grenzen der Anwendbarkeit solchen Verfahrens zu erkennen.

Auf den ersten Blick scheint dasselbe auf den ganzen Klassenkalkul sich ausdehnen zu lassen, und in der That ist dies auch für seine erste Etappe der Fall, solange und insoweit der Kalkul sich blos mit universalen Urteilen abgibt, nämlich sich in lauter Subsumtionen oder Gleichungen bewegt.

Anstatt eine Subsumtion:

$a \Subset b$ oder die ihr äquivalente Gleichung $ab_1 = 0$ *als eine zwischen Klassen bestehende zu deuten*, statt sie mit „alle a sind b" zu übersetzen, *kann man sie allemal auch als eine Aussagensubsumtion auslegen:*

Man spreche nur *von irgend einem aber durchweg demselben* Objekte oder Individuum der den Betrachtungen zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit 1, und lasse a die Aussage bedeuten: „*es* gehört zur Klasse a" und b die Aussage: „*es* gehört zur Klasse b". Das hypothetische Urteil: wenn *es* zur Klasse a gehört, so gehört *es* auch zur Klasse b, das ist die *Aussagen*subsumtion $a \Subset b$ sagt dann offenbar genau dasselbe, wie die obige Klassensubsumtion, nämlich wie das Urteil: alle a sind b. Dasselbe gilt auch von der als Aussagenäquivalenz aufgefassten Gleichung: $ab_1 = 0$, regelrecht gedeutet als: es ist nie wahr, dass *es* (ein Individuum) zur Klasse a und zugleich nicht zur Klasse b gehöre.

Versuchen wir aber das gleiche Umdeutungsverfahren auch auf die verneinte Aussagensubsumtion oder die Ungleichung anzuwenden:

$$a \not\Subset b \quad \text{mit andern Worten:} \quad ab_1 \neq 0,$$

die uns im Klassenkalkul ein partikulares Urteil darstellt, besagend: einige a sind nicht b — ich will bei diesem Beispiel bleiben, da es ja

leicht ist, sich auch b noch durch b_1 ersetzt zu denken — so lässt es uns im Stiche (vergl. S. 274).

Nach bekannten Sätzen, vornehmlich ζ) des § 32, muss nämlich sein:

$$(a \not\subseteq b) = (ab_1 \neq 0) = (ab_1 = 1) = (a_1 + b = 0) =$$
$$= (a_1 = 0)(b = 0) = (a = 1)(b = 0)$$

und dies ist kein partikuläres Urteil mehr, sondern wiederum jetzt eine universale Aussage, und zwar eine „zerfallende", welche behauptet, dass alle Individuen der Mn. zur Klasse a, keines zur Klasse b gehöre („Alles ist a, nichts ist b" innerhalb der Mn.).

M. a. W. Für irgend ein gedachtes Individuum ist es stets wahr, dass „es" zur Klasse a, nie, dass *es* zur Klasse b gehört; uud so in der That muss es sein, wenn es dem Schema $ab_1 \neq 0$ gemäss nicht unrichtig (somit richtig) ist, dass *es* zur Klasse a, aber nicht zu der b gehöre.

Es dokumentirt sich also die Unfähigkeit des reinen Aussagenkalkuls, auch partikulare Urteile einzukleiden — unbeschadet dessen, dass er gerade hiezu dem Klassenkalkul unentbehrlich gewesen — für sich allein also die Probleme auf der zweiten Stufe („Etappe") der Logik mitumfassen oder auch nur in Angriff nehmen zu können.

Versuchte man etwa, um jenen auch dazu tauglich zu machen, Summen- und Produktzeichen Σ_ι, Π_ι, einzuführen, welche sich über alle Individuen ι der Mannigfaltigkeit 1 zu erstrecken hätten, so würde man ebendamit, weil solche Individuen ι irgendwelche Objekte und keine Aussagen mehr sind, aus dem Rahmen des Aussagenkalkuls heraus und in den des Klassenkalkuls über-treten.

Der Aussagenkalkul selbst muss dazu stets unfähig bleiben, da er eben als ein nur auf Aussagen konstanten Sinnes anwendbarer kein Mittelding zwischen *stets* und *nie* (wahr) kennt.

Mit Unrecht also glaubt McColl in dem Umstand, dass seine Symbole stets „statements" bedeuten — im Gegensatz zu Boole, wo sie „Dinge" vorstellten — einen Vorzug seiner Theorie vor der Boole'schen erblicken zu dürfen; es liegt in diesem Umstande vielmehr eine grosse Beschränkung, und ist von ihm, wie Venn[1] p. 372 ausführt, obendrein übersehen, dass auch Boole[4] schon in den mit „On secondary propositions" und „Methods in sec. prop." überschriebenen Kapiteln, die aussagenrechnerische Deutung seiner Propositionen als eine mit zulässige gegeben hat.

In der That bemerken wir auch, dass alle von McColl gerechneten Beispiele und gestellten Aufgaben nur der ersten Stufe der Logik angehören.

Und weiter ist es, als mit dem Gesagten übereinstimmend, von Interesse noch folgendes zu beachten.

McColl's in § 27 angegebene Regel zur Lösung des Eliminations-

problemes ist auch auf Systeme von Boole'schen Prämissen ausdehnbar, resp. noch anwendbar:

Nach Mitchell's in § 40 aufgestellter Form der allgemeinsten Gesamtaussage muss eine solche beim Wegfall aller partikularen oder Ungleichungs-Faktoren von der Gestalt sein — vergl. § 41, α):

$$\Sigma(ax + bx_1 = 1) \quad \text{und dies ist} \quad \Subset \Sigma(a + b = 1)$$

welch letztere Aussage die Resultante der Elimination des x aus jener vorstellt.

Um McColl's Regel zu proben, haben wir uns die Prämissenaussage als eine Subsumtion: $\varphi(x) \Subset \psi(x)$ angesetzt zu denken. Und da sie nach Th. $\bar{5}_+$) als: $\dot{1} \Subset \Sigma(ax + bx_1 = 1)$ ansetzbar ist, dürfen wir also unter $\varphi(x)$ die $\dot{1}$, unter $\psi(x)$ die Aussage rechterhand $\Sigma(ax + bx_1 = 1)$ uns vorstellen, müssen ebendamit die Symbole $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ hier identifiziren.

Da hienach

$$\varphi(0) = \dot{1}, \quad \varphi(1) = \dot{1}, \quad \varphi_1(0) = 0, \quad \varphi_1(1) = 0$$

sein wird, reduzirt sich McColl's in § 27 gegebene Resultante zu:

$$\psi_1(0)\,\psi_1(1) = 0 \quad \text{oder} \quad \psi(0) + \psi(1) = \dot{1}.$$

Nun ist:

$$\psi(0) = \Sigma(b = 1), \qquad \psi(1) = \Sigma(a = 1),$$

und wird mithin die nach McColl's Regel gebildete Resultante die Gültigkeit der Aussagen behaupten:

$$\Sigma(a = 1) + \Sigma(b = 1);$$

und dies *stimmt* mit dem Obigen, in Anbetracht, dass im Aussagenkalkul nach § 45, α_+) oder β_+) eben sein wird:

$$(a + b = 1) = (a = 1) + (b = 1)$$

wie denn vorstehend die 1 ohne Tupfen als einerlei mit $\dot{1}$ zu gelten hatte.

Identifizirte man dagegen $\psi(x)$ mit der allgemeineren Mitchell'schen Gesamtaussage:

$$\Sigma(ax + bx_1 = 1)(px + qx_1 \neq 0)(rx + sx_1 \neq 0)\cdots,$$

wonach wir hätten:

$$\psi(1) = \Sigma(a = 1)(p \neq 0)(r \neq 0)\cdots, \quad \psi(0) = \Sigma(b = 1)(q \neq 0)(s \neq 0)\cdots$$

so ergäbe sich als Resultante der Elimination von x aus $\dot{1} \Subset \psi(x)$ eine Aussage:

$$\dot{1} \Subset \psi(1) + \psi(0),$$

welche verglichen mit unsrer richtigen Resultante rechts in φ) des § 41:

$$\dot{1} \Subset \Sigma(a + b = 1)(pa + qb \neq 0)(ra + sb \neq 0)\cdots$$

viel zu viel behauptet, deren Geltung zwar durch diese als eine möglicherweise zutreffende nicht ausgeschlossen ist, welche jedoch *keineswegs zu gelten braucht.* —

20. Studie. Wenden wir uns zum Schlusse von der Betrachtung der Methoden in der Algebra der Logik nochmals zu derjenigen der daselbst geltenden Sätze oder Theoreme überhaupt, so ist die Zahl der letzteren und ihrer Ausdrucksformen bei der Mannigfaltigkeit zur Verfügung stehender Beziehungszeichen natürlich Legion.

Blos mit dem Subsumtions- und Gleichheitszeichen und ohne Einführung (Introduktion) neuer Terme kann doch eine Subsumtion schon in den folgenden einander äquivalenten Formen angesetzt werden, die wir zunächst aus § 19, Th. 43) Anmerkung 2 und § 18, Aufg. α_1) rekapitulirend in der Sprache des Aussagenkalkuls zusammenstellen, denselben noch einige weitere hinzufügend:

$$(a \subseteq b) = (b_1 \subseteq a_1) =$$
$$= (ab_1 \subseteq 0) = (1 \subseteq a_1 + b) = (a \subseteq ab) = (a + b \subseteq b) = (a_1 + b_1 \subseteq a_1) = (b_1 \subseteq a_1 b_1) =$$
$$= (ab_1 = 0) = (a_1 + b = 1) = (ab = a) = (a + b = b) = (a_1 + b_1 = a_1) = (a_1 b_1 = b_1) =$$
$$= (ab_1 \subseteq b) = (a \subseteq a_1 + b) = (b_1 \subseteq a_1 + b) = (ab_1 \subseteq a_1) =$$
$$= (ab_1 \subseteq a_1 b) = (ab_1 \subseteq a_1 + b) \doteq (a + b_1 \subseteq a_1 + b) =$$
$$= (ab_1 \subseteq ab + a_1 b_1) = (ab_1 + a_1 b \subseteq a_1 + b) = \text{etc.}$$

worin auch a mit b, oder b mit b_1, oder beides, vertauscht werden mag.

Hiezu beachte man, dass die Rückwärtsansetzung gewisser einfacheren von diesen Subsumtionen auf die Äquivalenzen führt:

$$(b \subseteq ab_1) = (a_1 + b \subseteq b_1) = (b = 0) = (b_1 = 1),$$
$$(a_1 \subseteq ab_1) = (a_1 + b \subseteq a) = (a_1 = 0) = (a = 1)$$

während ebendiese als Gleichungen angesetzt liefern:

$$(ab_1 = b) = (a_1 + b = b_1) = (a + b = 0) = (a = b = 0),$$
$$(a_1 = ab_1) = (a_1 + b = a) = (ab = 1) = (a = b = 1).$$

Hier mögen auch die von Rob. Grassmann [1] gegebenen Theoreme noch Erwähnung finden (S. 171 im Kontext schon implicite vorgekommen):

$$(a \subseteq b)(a \subseteq b_1) = (a = 0) \qquad | \qquad (b = a)(b_1 \subseteq a_1) = (a = 1),$$

welche leicht aus Def. (3) und Th. 30) nebst Th. 5) beweisbar.

Und ebenso haben wir — vergl. auch § 18, ϱ) — für eine Gleichung schon die Formen:

$$(a = b) = (a_1 = b_1) =$$
$$= (ab_1 + a_1 b \subseteq 0) = (1 \subseteq ab + a_1 b_1) = (a + b \subseteq ab) = (a_1 + b_1 \subseteq a_1 b_1) =$$
$$= (a_1 b + a_1 b = 0) = (ab + a_1 b_1 = 1) = (a + b = ab) = (a_1 + b_1 = a_1 b_1) =$$
$$= (ab_1 + a_1 b \subseteq ab) = (a + b \subseteq ab + a_1 b_1) = (a_1 + b_1 \subseteq ab + a_1 b_1) = (ab_1 + a_1 b \subseteq a_1 b_1)$$
$$= \text{etc.}$$

Zieht man aber gar noch andere Beziehungszeichen mit heran, so wächst die Menge der Sätze unabsehbar.

Zu den wichtigsten unter diesen gehören wol die auf *Ungleichungen* bezüglichen, von welchen wir eine Gruppe zu Anfang und Ende des § 40 zusammengestellt haben, denselben späterhin gelegentlich — § 41, δ), ε) und § 44, ζ) — noch weitere hinzufügend.

Demnächst aber möchten vor allem noch diejenigen Sätze Beachtung verdienen, welche die im Subsumtionszeichen mit zugelassene Beziehung der *Unterordnung* für sich, oder getrennt von der Gleichheit, betreffen.

Geht man die im § 29 übersichtlich zusammengestellten Sätze des identischen Kalkuls darauf hin durch, um zuzusehen, welche Modifikationen sie erfahren, wenn statt eines vorkommenden Subsumtionszeichens oder Zeichens der eventuellen Unterordnung ein solches der wirklichen oder definitiven Unterordnung eintritt, so wird man auf folgendes Tableau von Formeln oder Sätzen geführt, welchen wir die alte Chiffrirung belassen wollen, derselben nur — zur Unterscheidung — Accente beifügend.

$$\text{I}'.\quad (a \subset a) = 0.$$

$$\text{II}'.\quad (a \subseteq b)(b \subset c) \subseteq (a \subset c), \qquad \text{II}''.\quad (a \subset b)(b \subseteq c) \subseteq (a \subset c)$$

in welchen beiden Fällen die Konklusion zugleich die volle Resultante der Elimination von b aus der Prämisse ist; dagegen würde bei

$$\text{II}'''.\quad (a \subset b)(b \subset c) \subseteq (a \subset c)$$

sie es nicht sein, vielmehr die volle Resultante lauten: $(a \subset c)\,K$, wo die „Klausel“ K statuirt, dass a, und c nicht einunddasselbe Individuum sein dürfen — vergl. § 48. Ebenso geben wieder volle Resultanten die Schlüsse:

$$2)'\quad (a \subset b)(b = c) \subseteq (a \subset c), \qquad 3)'\quad (a = b)(b \subset c) \subseteq (a \subset c).$$

$$(1)'\quad (a \subset b)(b \subseteq a) = (a \subseteq b)(b \subset a) = (a \subset b)(b \subset a) = 0,$$

$$(1)''\quad (a \subset b) \subseteq (a \subseteq b), \qquad (1)'''\quad (a \subset b) \subseteq (a \neq b).$$

$$(2_\times)'\quad (a \neq 0) = (0 \subset a) \quad\Big|\quad (2_+)'\quad (a \neq 1) = (a \subset 1).$$

$$5)'\quad (a \subset 0) = 0 = (1 \subset a).$$

$$(3_\times)'\quad (c \subset ab) \subseteq (c \subset a)(c \subset b) \subseteq (c \subseteq ab) \;\Big|$$

$$(3_+)'\quad \Big|\; (a + b \subset c) \subseteq (a \subset c)(b \subset c) \subseteq (a + b \subseteq c)$$

wo

$$(c \subseteq a)(c \subset b) \quad\Big|\quad (a \subseteq c)(b \subset c)$$

$$(c \subset a)(c \subseteq b) \quad\Big|\quad (a \subset c)(b \subseteq c)$$

für die mittlere Aussage bezüglich auch eintreten dürfte. Eine Äquivalenz etwa zwischen dieser und der ersten Aussage findet jedoch hier nicht statt.

$15_\times)'\ (a \subset b) \mathrel{=\!\!\!\in} (ac \mathrel{=\!\!\!\in} bc)$	$15_+)'\ (a \subset b) \mathrel{=\!\!\!\in} (a + c \mathrel{=\!\!\!\in} b + c)$
$17_\times)'\ (a \subset b)(\alpha \mathrel{=\!\!\!\in} \beta) \mathrel{=\!\!\!\in} (a\alpha \mathrel{=\!\!\!\in} b\beta)$	$17_+)' \cdot (a \subset b)(\alpha \mathrel{=\!\!\!\in} \beta) \mathrel{=\!\!\!\in} (a+\alpha \mathrel{=\!\!\!\in} b+\beta)$
$17_\times)''\ (a \subset b)(\alpha \subset \beta) \mathrel{=\!\!\!\in} (a\alpha \mathrel{=\!\!\!\in} b\beta)$	$17_+)''(a \subset b)(\alpha \subset \beta) \mathrel{=\!\!\!\in} (a+\alpha \mathrel{=\!\!\!\in} b+\beta)$
$18_\times)'\ (a \subset b)(\alpha = \beta) \mathrel{=\!\!\!\in} (a\alpha \mathrel{=\!\!\!\in} b\beta)$	$18_+)'(a \subset b)(\alpha = \beta) \mathrel{=\!\!\!\in} (a+\alpha \mathrel{=\!\!\!\in} b+\beta)$

in welchen acht Sätzen rechts keineswegs $\subset$ für $\mathrel{=\!\!\!\in}$ geschrieben werden dürfte!

$$37)' \qquad (a \subset b) = (b_1 \subset a_1);$$

auch für die Unterordnung ist also die *Kontraposition* rein zulässig.

$$38)' \quad \left.\begin{matrix}(ab_1 = 0)(a_1 b \neq 0) \\ (a_1 + b = 1)(a_1 b \neq 0)\end{matrix}\right\} = (a \subset b) = \left\{\begin{matrix}(a_1 + b = 1)(a + b_1 \neq 1) \\ (ab_1 = 0)(a + b_1 \neq 1)\end{matrix}\right.$$

$40)'\ (ac \mathrel{=\!\!\!\in} bc)(a + c \subset b + c)$, desgleichen $(ac \subset bc)(a + c \mathrel{=\!\!\!\in} b+c)$,

desgl. $\qquad (ac \subset bc)(a + c \subset b + c) \mathrel{=\!\!\!\in} (a \subset b);$

dagegen findet zwischen den modifizirten Aussagen des Peirce'schen Zusatzes 2) zu Th. 40):

$$(ac \mathrel{=\!\!\!\in} b)(a \subset b + c), \qquad (ac \subset b)(a \mathrel{=\!\!\!\in} b + c), \qquad (ac \subset b)(a \subset b + c)$$

mit $(a \subset b)$ *keine* Einordnung oder Folgebeziehung statt, und ebensowenig eine zwischen denen

$$(ab \subset c), \qquad (a \subset b_1 + c), \qquad (b \subset a_1 + c)$$
$$(a \subset b + c), \qquad (ab_1 \subset c), \qquad (ac_1 \subset b)$$

seines Theorems 41), welche als Subsumtionen — d. h. noch nicht zu Unterordnungen modifizirt — in jeder Zeile einander äquivalent gewesen. —

Für sich steht noch der Satz da:

$$(a \subset a_1) = (a = 0), \qquad (a_1 \subset a) = (a = 1),$$
$$0 \subset 1.$$

Vorstehendes ist die ganze Ausbeute.

Zu rechtfertigen sind die Sätze leicht im Hinblick auf die erste Gleichung 38)'

$$(a \subset b) = (ab_1 = 0)(a_1 b \neq 0)$$

und zum Teil auch schon auf Grund von (1)'', und mag ihren Beweis zu liefern dem Leser zur Übung überlassen sein.

Demnächst würden wol Hervorhebung zu verdienen scheinen die Eigenschaften der von uns als „Schnittigkeit", Sekanz, hingestellten Beziehung

$$a \between b.$$

F. A. Lange will Urteile von dieser Form *„reziprok-partikulare"* genannt wissen, was wir als hinreichend ausdrucksvoll und ganz zutreffend nur anerkennen könnten, wenn (wie im gemeinen Leben, aber nicht in der exakten Logik) „einige" ausschlösse „alle", m. a. W. wenn das partikulare Urteil $ab \neq 0$ das universale $a \not\in b$ oder $ab_1 = 0$ gar nicht zuliesse. —

Da wir von auf diese Urteilsform bezüglichen Sätzen keinen Gebrauch zu machen haben werden, überlassen wir die nicht undankbare Aufgabe ihrer Aufsuchung zur Selbstbethätigung dem Leser.

Zweiundzwanzigste Vorlesung.

§ 47. Definitionen des Individuums, Punktes, und ihre Zurückführung auf einander. Auf Individuen bezügliche Sätze. Duales Gegenstück zum Individuum.

Um zur *Motivirung* der Definitionen und von da zur Aufstellung der Gesetze unsres identischen Kalkuls zu gelangen, sind wir ausgegangen von der Betrachtung von *Punkt*gebieten unsrer bevorzugten Mannigfaltigkeit (der Ebene der Tafel) sowie auch vom Studium der Klassen (von *Individuen*), die aus einer gewöhnlichen Mannigfaltigkeit hervorgehoben werden können.

Wir setzten damit den landläufigen Begriff des „mathematischen Punktes“, sowie den des „Individuums“ einer Klasse, anscheinend von vornherein voraus — indessen, wie man bei genauerem Zusehen, bei nur einiger Sorgfalt erkennen wird: doch *immer nur unwesentlich* — so in der That z. B. bei manchen Betrachtungen in unsrer Einleitung, so auch vielleicht gelegentlich bei kritischen Auseinandersetzungen, bei den Betrachtungen betreffend die Übertragung von Ansätzen des Klassenkalkuls aus der Zeichensprache in die Wortsprache und bei den Anwendungsbeispielen.

Gewissenhaft enthielten wir uns jedoch jeglichen *„Argumentirens auf die Individuen“* bei allen wesentlichen Teilen unsrer Theorie, wo immer deren Auf- und Weiterbau in Frage kam, und *nie* — wird man finden — dass hierbei vorausgesetzt, statuirt oder Berufung darauf genommen wurde, dass ein Symbol — a zum Beispiel — ein Individuum vorstelle.*)

Die Buchstaben selbst freilich, und andre Zeichen, behandelten wir jederzeit als *individuelle* Symbole in unsrer Zeichensprache.

Zum Aufbau des Gebietekalkuls (jedoch) bedurften wir bislang

*) Ausgenommen, wie gesagt, da, wo wir die Ungültigkeit gewisser Sätze exemplifizirten — oder bei vorgreifendem Hinweis auf die „Klausel“.

den Begriff des Punktes nicht. Was ein Punkt ist, braucht man noch gar nicht zu wissen und es würde die Fundamente unsres Kalkuls unerschüttert lassen, wenn meinethalben jemand den Punkt z. B. erklären wollte „für einen Winkel, dem die Schenkel ausgerissen sind", oder wenn gar der „Punkt" als ein Unding sich erwiese! Falls jemand nur begriffen was zu verstehn ist unter einem System, *Gebiete* (z. B. einer Fläche, einem Körper), und was die Einordnung eines solchen Gebietes in ein anderes, des *Teiles* in ein *Ganzes*, bedeutet, so konnte er der ganzen Entwickelung des Kalkuls folgen.

Sicher haben wir damit den erdenklich einfachsten Ausgangspunkt erwählt, oder — um das Wort „. . punkt" auch hier zu vermeiden: unserm Kalkul die greifbarste und erdenklich einfachste Grundlage gegeben; und sind wir damit all' den metaphysisch-geometrischen Spekulationen und endlosen Erörterungen über die unsäglich vielfach ventilirte Frage, das Wesen des Punktes betreffend, aus dem Wege gegangen. „Punkt" und „Individuum" erschienen als noch gar nicht rezipirt, noch nicht aufgenommen in unsre Theorie.

Nachdem solchergestalt aber eine Formelsprache gewonnen und naturgemäss begründet ist, welche sich als fähig erwies, alle erdenklichen Beziehungen zwischen Gebieten oder zwischen Klassen exakt zum Ausdruck zu bringen, kann man sich die Frage vorlegen, welche Eigenschaften nun ein Gebiet haben muss, damit es ein „Punkt" zu nennen sei, und welche eine Klasse, wofern sie, als eine „singulare" in ein einziges „Individuum" zusammenschrumpfen soll.

Diese Frage ist eine theoretisch wichtige und interessante. Ohne ihre Erledigung könnte unsre Theorie nicht zur Vollendung kommen, müsste sie hinfort doch eine Lücke aufweisen. Daher stellen wir uns jetzt die Aufgabe, wenn wenigstens der Begriff des Gebietes, der Klasse überhaupt als bekannt gilt und das Verständniss der Formelsprache des Kalkuls vorausgesetzt werden darf, zur *Definition des Punkts und Individuums* herabzusteigen.

Der Punkt lässt sich auch als „Individuum" der Punktmannigfaltigkeit hinstellen*); ich wähle deshalb den Buchstaben i zur Bezeichnung des zu definirenden Gebildes, und sollten mehrere Individuen in Betracht kommen, so unterscheide ich dieselben mittelst oberer Indices, sie mit i^1, i^2, i^3, . . . benennend.

Um nicht alles doppelt aussprechen zu müssen — einmal für Punkte, und dann nochmals, mutatis mutandis, für Individuen — halte

*) Wogegen meistens es weniger passend erschiene, das Individuum einen „Punkt" in seiner Klasse zu nennen.

ich mich hier vorwiegend wieder an das geometrische Substrat unsrer „bevorzugten" Mannigfaltigkeit.

Die fragliche Definition lässt sich in sehr verschiedenen Ausdrucksformen geben, deren eine von Peirce herrührt. Ich möchte eine andere an die Spitze stellen, und werden wir die eine auch auf die andre zurückzuführen haben.

Auf das charakteristische Merkmal des Individuums weist schon der Name hin. Zunächst will er „*etwas*" bezeichnen, nicht „nichts". Es wird also

$$i \neq 0$$

zu gelten haben.

Sodann fordert der Name die *Unteilbarkeit* des Individuums: der Punkt kann nicht gespalten werden; er kann nicht in zwei getrennte (disjunkte) Gebiete zugleich hineinragen (wie dies andere Gebiete sehr wohl können).

Ragt ein Gebiet a mit einem Teile in ein Gebiet x hinein, so kommt dies in unsrer Formelsprache dadurch zum Ausdruck, dass wir die Ungleichung $ax \neq 0$ anzuerkennen haben. Ebenso wenn a in y hineinragt, wird $ay \neq 0$ zu gelten haben. Schliessen die Gebiete x und y einander aus, so kann doch beides noch zugleich der Fall sein. Soll aber a ein Individuum, einen Punkt i vorstellen, so kann es nicht zugleich der Fall sein, d. h. wir haben:

$$\alpha) \qquad (xy = 0) \Subset \{(ix \neq 0)(iy \neq 0) = 0\}$$

und zwar dieses für *jedes* Wertepaar x, y aus der Mannigfaltigkeit unsrer Gebiete.

Hiernach gelangen wir zu der folgenden Definition des „Individuums" oder „Punktes" i:

$$(\alpha) \qquad (i \neq 0) \prod_{x,y} [(xy = 0) \Subset \{(ix \neq 0)(iy \neq 0) = 0\}] = 1.$$

Es lässt sich indessen zeigen, dass es nicht nötig ist, die Definition in solcher Allgemeinheit zu fassen.

Statt des beliebigen Paares disjunkter Gebiete x, y genügt es, ein Paar x, x_1 zu nehmen, von denen blos das eine willkürlich anzunehmen ist, das andre hernach als dessen Negation bestimmt erscheint. Die beiden Gebiete x und x_1 erfüllen die in der Definition zu machende Voraussetzung, dass ihr Produkt verschwinde, immer, erfüllen sie schon von selber, ohne dass man nötig hätte dies erst noch ausdrücklich zu postuliren, indem nach Th. $30_\times$) ja $x_1 x = 0$ sein muss.

Wir werden so schon einfacher als *Definition eines Individuums, Punktes* i hinstellen können:

$$(\beta) \qquad (i \neq 0) \prod_x \{(ix \neq 0)(ix_1 \neq 0) = 0\}, = 1$$

und diese möchte ich als die maassgebende Definition *hier zu Grunde legen.*

In Worten könnte man etwa sagen: Ein Gebiet i ist immer dann und nur dann ein „Punkt" zu nennen, wenn es ohne doch zu verschwinden oder ein leeres zu sein, nie zugleich mit einem Gebiete und dessen Negation Teile gemein haben kann.

Das „Nullgebiet" hat diese letztere Eigenschaft auch: was auch x für ein Gebiet vorstellen möge, wird es mit x und x_1 nie gleichzeitig teilgemein sein, indem es als ein „nichts" enthaltendes ohnehin mit keinem Gebiete „etwas" gemein haben kann. Hieraus erhellt, dass der Aussagenfaktor $(i \neq 0)$ in der Def. (β) nicht fortgelassen werden darf ansonst sie uns nicht i, sondern „0 oder i" definiren würde. Bei Unterdrückung dieses ersten Faktors würde (β) ausdrücken: die Definition des Begriffes *„entweder ein Individuum oder gar Nichts"*.

Zunächst sieht man leicht, dass diese Definition (β) aus der (α) notwendig mit folgt, oder dass:

$$(\alpha) \Subset (\beta).$$

Man braucht sich in der That in (α) nur zu jedem x das zugehörige y gleich x_1 vorzustellen, so geht die Prämisse, Bedingung unter dem Produktzeichen über in $(xx_1 = 0) = 1$, und da nach Th. $\overline{5}_+$) die Einordnung von 1 unter eine Aussage) Gleichheit ist, nach § 32, ε) aber $(1 = A) = A$ gesetzt werden kann, so erhalten wir — unter A den Ausdruck in der geschweiften Klammer $\{\,\}$ von (α) somit nun auch von (β) verstehend — die durch (β) dargestellte Vereinfachung der linken Seite von (α).

Die linke Seite von (β) hebt aber nur gewisse Faktoren aus derjenigen von (α) hervor und lässt die Faktoren beiseite, bei welchen y von x_1 verschieden genommen wird. Nach Th. $\overline{6}_\times$) ist das Produkt in seinem Faktor enthalten, die linke Seite von (α) somit $\Subset$ der von (β), und da die erstere gleich 1 ist, so muss nach Th. $\overline{5}_+$) auch die letztere es sein, q. e. d.

Damit die Äquivalenz der Definitionen (α) und (β) erwiesen sei, ist aber jetzt noch zu zeigen, dass auch umgekehrt:

$$(\beta) \Subset (\alpha),$$

d. h. dass wenn (β) für ein gewisses i erfüllt ist, für eben dieses auch (α) stets erfüllt sein muss.

Dieser Nachweis kann so geliefert werden. Gilt (β), so muss nach Th. $\overline{24}_\times$) auch jeder Faktor des Produktes linkerhand $= 1$ sein, gelten. Wir haben also:

$$\beta) \qquad (ix \neq 0)(ix_1 \neq 0) = 0$$

für irgend ein x. In dieser allgemeinen Formel mögen wir auch xy_1 für x somit $x_1 + y$ für x_1 setzen; sonach gilt für beliebige x, y:

$$(ixy_1 \neq 0)(ix_1 + iy \neq 0) = 0.$$



Der linken Seite eingeordnet, und somit — cf. Th. $\bar{5}_\times$) — ebenfalls gleich 0, ist aber das Produkt $(ixy_1 \neq 0)(iy \neq 0)$, indem nach § 40, α') S. 194 sein muss: $(iy \neq 0) \in (ix_1 + iy \neq 0)$. Nehmen wir jetzt aber $xy = 0$ an, so folgt:

$$xy_1 = xy_1 + xy = x$$

und entsteht:

$$(ix \neq 0)(iy \neq 0) = 0$$

unter der genannten Annahme. Nimmt man die Subsumtion, die dieses ausdrückt:

$$(xy = 0) \in \{(ix \neq 0)(iy \neq 0) = 0\}$$

welche also gilt, d. h. $= \dot{1}$ ist, gleichzeitig für alle Wertepaare x, y in Anspruch, oder — mathematisch zu reden — nimmt man das Produkt Π nach x und y von derselben und multiplizirt das $= \dot{1}$ gesetzte noch überschiebend mit $(i \neq 0) = \dot{1}$, so hat man aber die Gleichung (α) gewonnen, sie als Folgerung aus (β) abgeleitet, q. e. d.

Damit ist gezeigt, dass (β) die Forderung der Unteilbarkeit des Individuums in der That hinlänglich zum Ausdruck bringt.

Die Gleichung β), welche „allgemeiner Faktor“ des Produktes Π in (β) ist, kann man nun aber noch verschiedentlichst umgestalten, und analog auch die (noch allgemeinere) Subsumtion α).

Solche Umwandlungen beruhen grossenteils auf spezifischen Sätzen über das Individuum, die aus der Def. (β) fliessen, und erscheint es darum angezeigt, zunächst eine Gruppe solcher Sätze aufzustellen. Diese will ich — anstatt in den Symbolen x oder x_1 und y — nun in den Klassensymbolen a, b anschreiben.

Wir hatten bereits als

α) $$(ab = 0) \in \{(ia \neq 0)(ib \neq 0) = 0\}$$

β) $$(ia \neq 0)(ia_1 \neq 0) = 0.$$

Da letztrer Satz sich als eine Inkonsistenz darstellt, so kann er nach Th. $\overline{38}$) Zusatz oder § 31 auch angesetzt werden in den beiden Formen:

β') $(ia \neq 0) \in (ia_1 = 0)$, β'') $(ia_1 \neq 0) \in (ia = 0)$

womit wir auch zwei neue Formen (β') und (β'') für die Def. (β) durch Einsetzung erhalten würden.

Auch der Satz α) lässt als eine Inkonsistenz sich anschreiben:

α') $$(ab = 0)(ia \neq 0)(ib \neq 0) = 0,$$

wie man am schnellsten erkennt, indem man das letzte in ihm vorkommende Gleichheitszeichen kraft Th. $\bar{5}_\times$) in $\in$ verwandelt und alsdann von dem

Schema § 45, $\vartheta_\times$) Gebrauch macht, die Einordnung unter 0 wieder in Gleichheit verwandelnd. [Man kann jedoch auch zuerst den Major von α) in eine Subsumtion β') oder β'') umschreiben, dann von dem genannten Schema Gebrauch machen und die so gewonnene Subsumtion in die Inkonsistenz zurücktransformiren.] Durch Kontraposition der rechten Seite von α) oder auch durch Umformung der Inkonsistenz α') mit Rücksicht auf Th. 36) ergibt sich unter anderm:

α'') $$(ab = 0) \Subset (ia = 0) + (ib = 0).$$

Durch Kontraposition erhalten wir ferner aus β):

γ) $$(ia = 0) + (ia_1 = 0) = 1$$

als eine der β) *stets äquivalente* Aussage.

Bei deren Einsetzung in (β) kann man die Abkürzung eintreten lassen, für $(A = 1)$ blos A zu schreiben, und erhält:

(γ) $$(i \neq 0) \prod_x \{(ix = 0) + (ix_1 = 0)\} = 1$$

als eine bemerkenswerte Form der Individuumsdefinition.

γ) lehrt: Ist i Individuum, Punkt, so muss für irgend ein Gebiet a entweder sein $ia = 0$ *oder* $ia_1 = 0$.

Analog liesse sich die Inkonsistenz α') verschiedentlich als Subsumtion anschreiben, wie wir dies bereits durch α'') exemplifizirt haben.

Auch gibt dieselbe durch Kontraposition den Satz:

δ) $$(ab \neq 0) + (ia = 0) + (ib = 0) = 1,$$

welcher leicht zu deuten. Und diesem entspricht die Definitionsform:

(δ) $$(i \neq 0) \prod_{x,y} \{(xy \neq 0) + (ix = 0) + (iy = 0)\}, = 1.$$

Etc.

Bemerkenswert erscheint nun aber, dass bei der vorstehenden verbalen Fassung des Satzes γ) das „*oder*" hingestellt werden darf als das in § 8, η) erläuterte „oder *aber*", indem hier beide Fälle einander ausschliessen, nicht gleichzeitig eintreten können.

Dies beruht auf dem Satze:

ε) $$(ia = 0)(ia_1 = 0) = 0$$

welchen man leicht beweist, indem man die linke Seite gemäss Th. 24_+) zusammenzieht in $(ia + ia_1 = 0)$, welches $= (i = 0) = 0$ ist, wie aus $(i \neq 0) = 1$ durch Kontraposition folgt.

Es ist hienach unmöglich, dass ein Punkt i unsrer Mannigfaltigkeit weder einem Gebiet a noch seiner Negation angehöre.

Da auch ε) eine Inkonsistenz ist, lässt sich der Satz wieder in Subsumtionenform anschreiben als

ε') $\quad (ia = 0) \subseteq (ia_1 \neq 0)$ sowie ε'') $(ia_1 = 0) \subseteq (ia \neq 0)$

und ergibt sich aus ihm noch durch Kontraposition:

$$\zeta) \qquad (ia \neq 0) + (ia_1 \neq 0) = 1$$

— mit ε) zusammen ein gewisses Gegenstück zu β) und γ).

Kraft Definition (1) der Gleichheit zieht aber die Subsumtion β') mit ε'') und β'') mit ε') sich zusammen zu der *Gleichung:*

$$\eta) \qquad (ia \neq 0) = (ia_1 = 0) \quad \text{resp.} \quad (ia = 0) = (ia_1 \neq 0)$$

die auch direkt aus β) und ε) durch Berufung auf Th. $\overline{24_+}$), und $\overline{39_+}$) als $(AB + A_1B_1 = 0) = (A = B_1)$, gefolgert werden könnte, desgleichen mittelst der Th. $\overline{30}$).

Und diese Gleichung bildet nun das Band durch welches die folgenden Aussagen vollends verknüpft erscheinen, deren Äquivalenz wir in a sowol als in a_1 mithin sozusagen doppelt statuiren wollen:

$$\vartheta)\begin{cases}(ia \neq 0) = (ia = i) = (i \subseteq a) = (ia_1 = 0) = (i \not\subseteq a_1) = (a_1 \not\subseteq i_1) = \text{etc.}\\(ia = 0) = (ia_1 = i) = (i \subseteq a_1) = (ia_1 \neq 0) = (i \not\subseteq a) = (a \not\subseteq i_1) = \text{etc.}\end{cases}$$

Es sind nämlich die heiden zwischen die Aussagen von η) eingeschalteten Aussagen in der ersten Zeile von ϑ) lediglich Umschreibungen (nach hekannten Sätzen) der letzteren von ihnen, genauer: $i \subseteq a$ ist eine Transscription von $ia_1 = 0$ nach Th. $38_\times$) und $ia = i$ eine Umwandlung von $i \subseteq a$ gemäss Th. $20_\times$). Hienach hleibt von den Formeln des Tableaus ϑ) nur etwa noch die folgende zu rechtfertigen, welche einen hemerkenswerten Satz vorstellt:

$$\iota) \qquad (i \not\subseteq a) = (i \subseteq a_1).$$

Dieselbe läuft aber, wenn man die Subsumtion rechts und die Subsumtionenverneinung links auf den Typus der Gleichung resp. Ungleichung reduzirt, d. h. sie in rechts auf 0 gebrachte Propositionen dieser Gattung umschreibt — cf. Th. $38_\times$) — direkt auf die zweite Gleichung η) hinaus und erscheint als mit dieser schon hewiesen.

Der Satz ι) ist der erste von den beiden, auf welche schon in § 15 vorgreifend hingewiesen wurde und von welchem wir ausführlich gezeigt haben, dass er für eine ganz beliehige Klasse i nicht zutreffen würde. Er besagt:

Sobald das Subjekt eines verneinenden Urteils ein Individuum ist, muss es einerlei sein, ob die Negation „zur Kopula", oder ob sie zum Prädikate geschlagen wird.

Kraft ϑ) lassen sich die darnach auf *einen* hinauslaufenden Sätze

β), ε) und γ), ζ) noch in mannigfachster Weise anschreiben, und seien hervorgehoben:

$$\varkappa)\quad (i \not\in a)(i \not\in a_1) = 0, \qquad (i \not\in a) + (i \not\in a_1) = 1,$$
$$(ia = i)(ia_1 = i) = 0, \qquad (ia = i) + (ia_1 = i) = 1,$$
$$\begin{cases}(ia = i)(ia_1 \neq 0) = 0, & (ia = i) + (ia_1 \neq 0) = 1,\\ (ia \neq 0)(ia_1 = i) = 0, & (ia \neq 0) + (ia_1 = i) = 1,\end{cases}$$
$$(i \not\in a)(a \not\in i_1) = 0, \qquad (i \not\in a) + (a \not\in i_1) = 1,$$

etc. Doch darf nicht übersehen werden, dass dieselben nicht mehr gleichermassen für das Individuum charakteristisch sein werden. So z. B. gelten die Relationen der zweiten Zeile auch dann, wenn man unter i kein Individuum sondern 0 versteht — wie denn auf dem betretenen Wege, durch Berücksichtigung der Relationen ϑ), teilweise sich reine Identitäten, wie $(ia = 0)(ia \neq 0) = 0$ etc. ergeben.

Ersetzt man demnach in den Definitionen (β) oder (γ) des i als eines Individuums den allgemeinen Faktor hinter dem Π durch einen *erst kraft solcher Definition* ihm äquivalenten Ausdruck, so kann man zwar sicher darauf rechnen, einen richtigen vom Individuum i geltenden Satz zu erhalten, allein dieser wird sich nicht ohne weiteres, er wird für sich allein nicht immer schon als eine ausreichende Definition des Individuums sich hinstellen lassen.

Nur wenn die Umformungen jenes allgemeinen Faktors ohne solchen Zirkel einer Benutzung der Definition selbst und namentlich also der aus ihr geflossenen Relationen η), nach allgemeinen Schemata des identischen Kalkuls erfolgt, erhalten wir unfehlbar wieder eine Definition von i — in erneuter Gestalt.

Z. B. da $(ia = 0) = (i \not\in a_1)$ bereits gilt, wenn i auch eine beliebige Klasse vorstellte, so wird

$$(\lambda)\qquad (i \neq 0)\,\Pi_x\{(i \not\in x) + (i \not\in x_1)\} = 1$$

uns eine *vollkommne* Definition des i als eines „Individuums" vorstellen — und zwar ist diese von allen wol die durchsichtigste und am meisten zum Citiren geeignet. Man könnte sie auch in der Form ansetzen:

$$(\lambda')\qquad (i \neq 0)\,\Pi_x\{(i \not\in x) + (x \not\in i_1)\} = (i \text{ ist ein Individuum}).$$

Lehrreich dürften in beregter Hinsicht auch noch diese Betrachtungen sein.

Da die Glieder in γ) wegen ε) disjunkt sind, so kann man kraft Th. $\overline{33_+}$) die Summe $A + B$ dortselbst, welche $= AB_1 + A_1B + AB$ ist,

hier, wo nun $AB = 0$ folgte, vereinfachen zu $AB_1 + A_1B$, dem bereits erwähnten *A oder aber B* entsprechend, und hat den Satz:

$$\mu) \qquad (ia = 0)(ia_1 \neq 0) + (ia \neq 0)(ia_1 = 0) = 1$$

oder auch, sozusagen (ausdrucks-)„voller“:

$$\nu) \qquad (ia = 0)(ia_1 = i) + (ia = i)(ia_1 = 0) = 1$$

insofern hier sogleich die von 0 verschiednen Terme des vorigen Ansatzes mit ihrem Werte i angegeben erscheinen.

Benutzt man μ) — in x statt a angesetzt — als allgemeinen Faktor zu einer Individuumsdefinition so ist bemerkenswert, dass alsdann der Faktor $(i \neq 0)$ in dieser fortgelassen werden darf, dass nämlich als „Definition“ auch genommen werden kann:

$$(\mu) \qquad \prod_x \{(ix = 0)(ix_1 \neq 0) + (ix \neq 0)(ix_1 = 0)\}.$$

Dass alsdann $i \neq 0$ sei, folgt schon von selbst, indem nach § 40, α'):

$$(ix_1 \neq 0) \Subset (i \neq 0), \qquad (ix \neq 0) \Subset (i \neq 0)$$

somit kraft Th. $\overline{20_\times}$):

$$(ix_1 \neq 0) = (i \neq 0)(ix_1 \neq 0), \qquad (ix \neq 0) = (i \neq 0)(ix \neq 0)$$

ist, wonach denn bei (μ) sich $(i \neq 0)$ als gemeinsamer und von selbst stets mit vorhandener Faktor ohnehin vorziehen liesse. Auch im übrigen wäre es nicht schwer von (μ) vollends auf (γ) zurückzuschliessen.

Benutzte man dagegen als allgemeinen Faktor den in x angesetzten Ausdruck ν), so dürfte die ausdrückliche Beisetzung des Faktors $(i \neq 0)$ nicht unterbleiben; wohl aber wäre es zulässig, den Ansatz zu vereinfachen zu:

$$(\nu) \qquad (i \neq 0) \prod_x \{(ix = i) + (ix_1 = i)\},$$

indem $(ix = i) = (ix_1 = 0)$ etc., und $AA = A$ zu nehmen ist. —

Auf eine mit der meinigen (β), (γ) oder (λ) wesentlich zusammenfallende Definition des Individunms ist selbständig auch Herr Voigt [1] (zwar lange nach mir) gekommen, mit deren Veröffentlichung jedoch mir selbst zuvorgekommen; ebenso trifft derselbe in der Aufstellung von manchen auf das Individuum bezüglichen Sätzen mit mir zusammen. Ich habe an meiner einschlägigen Darstellung, seit ich von seiner Arbeit Kenntniss genommen, nichts mehr geändert.

Herr Peirce [5] p. 43 definirt das Individuum i selbständig, und zwar, sofern wir seine Definition ganz in Formeln setzen, auf die folgende Weise*):

$$(\xi) \qquad (i \neq 0) \prod_x \{(x \subset i) \Subset (x = 0)\} = 1.$$

*) Er fällt damit eigentlich aus der Rolle des Aussagenkalkuls, in welchem sich seine ganze Abhandlung [5] bewegt — wol ihm unbewusst — heraus, über-

Dies ist, wenn wir die vorkommende *Unterordnung* gemäss § 36 auf den Typus der Gleichung und Ungleichung zurückführen, äquivalent mit:

(o) $$(i \neq 0) \prod_x \{(i_1 x = 0)(ix_1 \neq 0) \Subset (x = 0)\} = 1.$$

Man begreift zunächst intuitiv die Berechtigung auch dieser Definition: Soll eine Klasse x dem Individuum i wirklich untergeordnet (und nicht gleich demselben) sein, also weniger als dieses eine Individuum enthalten, so muss sie gar nichts enthalten, völlig leer sein; und umgekehrt wird dieses Verhalten von i jeder beliebigen Klasse x gegenüber in Verbindung mit der Auflage, selber $\neq 0$ zu sein, charakteristisch für das Individuum sein. Ein Gebiet muss ein Punkt sein, wenn es ohne selbst zu verschwinden, echte Teile überhaupt nicht enthalten kann.

Wir stellen uns aber auch die Aufgabe, systematisch die Äquivalenz der beiden Definitionen (ξ) oder (o) und (β) nachzuweisen, was auf den ersten Blick zwar nicht ganz naheliegend erscheint, indessen gleichwol nicht schwer ist.

Um (o) aus (β) zu folgern, ist blos zu zeigen, dass auf Grund von (β) die Voraussetzung $(i_1 x = 0)(ix_1 \neq 0)$ die Konsequenz haben muss: $x = 0$. Nach Th. $6_\times$) ist nun aber:

$$(i_1 x = 0)(ix_1 \neq 0) \Subset (ix_1 \neq 0)$$

und nach der aus (β) bereits gewonnenen Subsumtion β'') ist:

$$(ix_1 \neq 0) \Subset (ix = 0),$$

sodass aus jener Voraussetzung auch $ix = 0$ a fortiori folgt. Sonach ist dann $x = ix + i_1 x = 0 + i_1 x = i_1 x$ und da nach dem andern Teil,

schreitet die von ihm sich selbst gesteckten Grenzen und begibt sich auf das Gebiet des weiteren oder Klassenkalkuls. Der Aussagenkalkul wäre blos imstande, die Einheit 1 als „*das* Individuum" zu erklären, vermöchte aber für sich allein ein „Individuum überhaupt" gar nicht zu definiren. Und zwar deshalb, weil sein Hinausgreifen über den Boole'schen Kalkul zufolge vermeintlichen Besitzes einer verneinenden Kopula, kraft Formel ξ) S. 66 ein *illusorisches* ist, vielmehr in ihm schon *jede* Ungleichung, sowie Subsumtions-Verneinung auf eine Gleichung oder Subsumtion sich denknotwendig reduzirt, sonach auch in ihm die echte Unterordnung (deren Zeichen $\subset$ ja oben verwendet wird) unfähig ist, sei es so, wie Peirce [5] p. 21 es versucht, sei es überhaupt nur, definirt zu werden! Für Aussagen A, B müsste in der That, wie *leicht*, auch nach S. 120, zu sehen:

$$(A \subset B) = (A = 0)(B = 1)$$

schon gelten.



oder Faktor, jener Voraussetzung ebendieses $i_1 x = 0$ zu denken ist, so ist durch Vergleichung — cf. Th. 4) — auch $x = 0$ nachgewiesen, q. e. d. —

Sonach ist erkannt, dass

$$(\beta) \Subset (\xi).$$

Um umgekehrt auch (β) aus (ξ) oder (o) abzuleiten, zu zeigen, dass auch

$$(\xi) \Subset (\beta)$$

ist, erscheint es bequem, sich des indirekten Beweisverfahrens zu bedienen — über welches § 46, 1 zu vergleichen. Ich thue dies um so lieber, als schon wiederholt bemerkt und als auffallend verzeichnet worden ist, dass gerade in der Logik von diesem Beweisverfahren niemals Gebrauch gemacht worden sei.

Es ist darzuthun, dass auf Grund von (o) die Inkonsistenz β) bestehen muss.

Gesetzt nun, sie bestehe nicht, d. h. es gebe ein x, für welches $ix \neq 0$ und zugleich $ix_1 \neq 0$ ist, so lässt sich, wenn (o) gilt, aus dieser Annahme ein Widerspruch ableiten.

Gilt nämlich $ix_1 \neq 0$, so ist ix ein solches X, welches von der in (o) mitenthaltenen Forderung:

$$(i_1 X = 0)(iX_1 \neq 0) \Subset (X = 0)$$

die Voraussetzung linkerhand erfüllt, indem für $X = ix$ sicher

$$i_1 X = i_1 ix = 0 \quad \text{und} \quad iX_1 = i\,(i_1 + x_1) = ix_1 \neq 0$$

ist, und welches demnach von ihr auch die Folgerung rechterhand: $X = 0$ erfüllen muss. Auf diese Weise gelangen wir aber zu dem Ergebniss: $ix = 0$ entgegen der andrerseits gemachten Annahme $ix \neq 0$. Es war demnach die Annahme unzulässig, d. h. es muss sein:

$$(ix \neq 0)(ix_1 \neq 0) = 0,$$

und dieses allgemein für jedes x, womit (β) gewonnen ist.

Auch ohne die apagogische Beweisform lässt sich dies zeigen, indem man in der eben geschilderten Weise aus (o) folgert, dass:

$$(ix_1 \neq 0) \Subset (ix = 0),$$

sonach die Inkonsistenz unter dem Zeichen Π bei (β') oder (β) allgemein bestehen muss.

Ungeachtet ihres so verschiedenen Ansehens sind demnach die Definitionen (β) und (ξ) nur Umschreibungen von einander.

Der allgemeine Faktor in der Def. (o) lässt sich übrigens auch als eine Inkonsistenz ansetzen, wodurch entsteht:

$$(\pi) \qquad (i \neq 0) \prod_x \{(x \neq 0)(ix_1 \neq 0)(i_1 x = 0) = 0\} = 1$$

und durch Vergleichung mit (β) zu sehen ist, dass auf den Typus der Gleichung und Ungleichung reduzirt die Def. (β) *einfacher* ist als die (ξ).

Durch Kontraposition dieser Inkonsistenz entsteht noch als Gegenstück zu (γ):

$$(\varrho) \qquad (i \neq 0) \prod_x \{(x = 0) + (ix_1 = 0) + (i_1 x \neq 0)\} = 1.$$

Auch mag bemerkt werden, dass in (ξ) das Subsumtionszeichen ersetzt werden dürfte durch ein Gleichheitszeichen. Überhaupt dürfen wir die Sätze registriren, die in den Definitionen (ξ) bis (ϱ) als allgemeine Faktoren mitenthalten sind, sich aber aus ihnen herausgeschält viel einfacher präsentiren:

$$\sigma) \qquad (a \subset i) = (a = 0),$$
$$(i_1 a = 0)(ia_1 \neq 0) = (a = 0),$$
$$(a \neq 0)(ia_1 \neq 0)(i_1 a = 0) = 0,$$
$$(a = 0) + (ia_1 = 0) + (i_1 a \neq 0) = 1. \text{ —}$$

Soviel über die Definitionsweisen des Individuums, deren Gleichwertigkeit und die beim Nachweis der letzteren in Betracht kommenden Sätze. —

Von auf das Individuum bezüglichen Sätzen überhaupt wurde aber bei den verbalen Betrachtungen des § 15 vorgreifend auf zweie hingewiesen, deren einen erst wir unter ι) gerechtfertigt haben. Schuldig sind wir es noch, auch den andern in die Theorie aufzunehmen und zu beweisen. Ihn drückt die Formel aus:

$$\tau) \qquad (i \in a + b) = (i \in a) + (i \in b)$$

welche zu gelten beansprucht für ganz beliebige Klassen a, b und irgend ein Individuum i.

Auch Ende § 12 bei einem vorgreifenden (Schein-)Beweise des Distributionsgesetzes wurde an diesen Satz appellirt, und ist dessen Formelausdruck geradeso beschaffen, wie wenn a, b und i beliebige Aussagen wären — cf. § 45, α_+). Er besagt:

Wenn ein Individuum »a oder b« ist, so muss entweder dasselbe a sein, oder dasselbe muss b sein. M. a. W.

Sobald das Subjekt ein Individuum ist, kann ein disjunktiv (desgl.

ein alternativ) prädizirendes Urteil immer als ein disjunktives (resp. alternatives) Urteil angesehen werden.*

Der Beweis ergibt sich wie folgt. Die zu beweisende Gleichung zerfällt nach Def. (1) in zwei Subsumtionen. Von diesen muss die eine:

$$(i \neq\!\!\!\in a) + (i \neq\!\!\!\in b) \neq\!\!\!\in (i \neq\!\!\!\in a + b)$$

ohnehin gelten, unabhängig davon, ob i ein Individuum vorstellt oder nicht.

Auch für eine beliebige Klasse c haben wir nämlich:

$$(c \neq\!\!\!\in a) = (c \neq\!\!\!\in a) \cdot 1 = (c \neq\!\!\!\in a)(a \neq\!\!\!\in a + b) \neq\!\!\!\in (c \neq\!\!\!\in a + b)$$

und ebenso: $$(c \neq\!\!\!\in b) \neq\!\!\!\in (c \neq\!\!\!\in a + b),$$

woraus durch überschiebendes Addiren mit Rücksicht auf das Tautologiegesetz, oder kürzer noch kraft Def. $(\bar{3}_+)$ folgt:

$$(c \neq\!\!\!\in a) + (c \neq\!\!\!\in b) \neq\!\!\!\in (c \neq\!\!\!\in a + b).$$

Es muss demnach nur noch die umgekehrte Subsumtion:

$$(i \neq\!\!\!\in a + b) \neq\!\!\!\in (i \neq\!\!\!\in a) + (i \neq\!\!\!\in b),$$

oder:

$$(ia_1 b_1 = 0) \neq\!\!\!\in (ia_1 = 0) + (ib_1 = 0)$$

dargethan werden. Letztere ergibt sich aber nach dem Schema der für x, y in Anspruch genommenen Subsumtion α''):

$$(xy = 0) \neq\!\!\!\in (ix = 0) + (iy = 0)$$

sobald man nur in dieser sich $x = ia_1$, $y = ib_1$ denkt, wobei ja auch $xy = ia_1 b_1$ und $ix = iia_1 = ia_1$, ebenso iy wieder $= ib_1$ sein wird.

Von zwei Gliedern ist selbstverständlich das Th. τ) auch auf beliebig viele Terme auszudehnen:

$$(i \neq\!\!\!\in a + b + c + \cdot\cdot) = (i \neq\!\!\!\in a) + (i \neq\!\!\!\in b) + (i \neq\!\!\!\in c) + \cdot\cdot$$

oder

$$(i \neq\!\!\!\in \sum_a a) = \sum_a (i \neq\!\!\!\in a)$$

über welches Gebiet von Werten a sich auch immer die Summe beiderseits erstrecken möge.

Untersuchen wir noch, ob auch die zu τ) gebietsduale Gleichung:

?) $$(ab \neq\!\!\!\in i) = (a \neq\!\!\!\in i) + (b \neq\!\!\!\in i)$$

*) Das *„alternative"* Urteil ist, wie schon erwähnt, allgemeiner als das „disjunktive" (aufgefasst im Sinne der traditionellen Logik) insofern es nicht ausdrücklich fordert (indessen es doch auch mit zulässt), dass die Glieder der Alternative einander gegenseitig ausschliessen, „disjunkt" seien.

für ein Individuum gelten muss, ganz ebenso, als ob — vergl. § 45, $\alpha_\times$) — a, b, i drei Aussagen wären.

Da

$$(a \Subset c) = (ab \Subset a)(a \Subset c) \Subset (ab \Subset c)$$

und ebenso

$$(b \Subset c) \qquad\qquad \Subset (ab \Subset c)$$

ist, so muss nach Def. ($\bar{3}_+$) ohnehin sein:

$$(a \Subset c) + (b \Subset c) \Subset (ab \Subset c)$$

und dies bleibt natürlich auch bestehen, wenn die beliebig zu denken gewesne Klasse $c = i$ eine singuläre sein sollte.

Für letztre lässt es sich auch so beweisen. Wir haben — vergl. § 35, S. 109:

$$(a \Subset b) = (a \subset b) + (a = b), \quad \text{und nach } \sigma) \quad (a \subset i) = (a = 0),$$

sonach gilt der Satz:

v) $$(a \Subset i) = (a = 0) + (a = i).$$

Desgleichen ist

$$(b \Subset i) = (b = 0) + (b = i)$$

und

$$(ab \Subset i) = (ab = 0) + (ab = i).$$

Die zu beweisende Relation $(a \Subset i) + (b \Subset i) \Subset (ab \Subset i)$ läuft also hinaus auf:

$$(a = 0) + (b = 0) + (a = i) + (b = i) \Subset (ab = 0) + (ab = i).$$

Nun ist schon bekanntermassen:

$$(a = 0) \Subset (ab = 0) \quad \text{sowie} \quad (b = 0) \Subset (ab = 0).$$

Ferner haben wir:

$$(a = i) = (a = i)\{(ab = 0) + (ab \neq 0)\} \Subset (ab = 0) + (a = i)(ab \neq 0);$$

aber:

$$(a = i)(ab \neq 0) \Subset (ib \neq 0) = (ib = i) = (ab = i),$$

sonach:

$$(a = i) \Subset (ab = 0) + (ab = i), \quad \text{ebenso} \quad (b = i) \Subset (ab = 0) + (ab = i)$$

und durch überschiebendes Addiren der vier (Subsumtionen-)Ansätze gewinnen wir die behauptete Subsumtion.

Es wäre nun also noch die umgekehrte Subsumtion:

$$(ab \Subset i) \Subset (a \Subset i) + (b \Subset i)$$

zu prüfen.

Dass diese aber *nicht* zu gelten braucht, zeigt ein Beispiel. Nehmen wir

$$a = i + c = i + ci_1 \quad \text{und} \quad b = i + d = i + di_1, \quad \text{wo} \quad cd = 0$$

ist, an, so ist $ab = i$, also die Prämisse links erfüllt; dagegen ist weder

$a \subseteq i$ noch $b \subseteq i$, wofern nur $c i_1$ und $d i_1$ von 0 verschieden, also a und b dem i wirklich übergeordnet genommen werden — eine Anforderung, welche in Verbindung mit der $cd = 0$ für Gebiete im Allgemeinen leicht zu erfüllen ist (wofern nämlich nur die Mannigfaltigkeit 1 neben i noch mindestens zwei Individuen enthält wo dann schon die Annahme: $a = i + i^2$, $b = i + i^3$ genügen wird). Die Konklusion also zeigt sich als gleichwol nicht erfüllt und der Satz kann keine Geltung haben.

Der Umstand, dass hienach vom Individuum i der Satz τ) gilt, der dazu gebietsduale Satz ?) aber *nicht* gilt, lässt erkennen, dass der Begriff des Individuums gebietsdual sich selber nicht entsprechen kann.

Dies zeigt auch die Inspektion, genauere Ansicht der Def. (β) selber.

Sehen wir in der That zu, was dieser Definition — oder, noch besser, der (λ) — gebietsdual für eine Definition entsprechen würde, d. h. schreiben wir dieselbe einmal gebietsdual um! Das hiebei einzuhaltende Verfahren ist vom Schlusse des § 30 in Erinnerung zu bringen.

Dasselbe würde uns liefern:

$$(\lambda^\backprime) \qquad (\hat{i} \neq 1) \prod_x \{(x \subseteq \hat{i}) + (x_1 \subseteq \hat{i})\} = \mathrm{i}.$$

Wir haben gleichzeitig $\hat{i}$ für i gesagt, weil es nicht mehr ein Individuum i zu sein braucht, welches die in ($\lambda^\backprime$) dual umgeschriebene Definition (λ) zu erfüllen braucht. Was vielmehr $\hat{i}$ bedeuten, welches Gebilde die Definition ($\lambda^\backprime$) bestimmen wird, bleibt eben erst zu untersuchen.

Wir behaupten, dass es die *Negation eines Individuums* sein wird, dass man also für $\hat{i}$ geradezu i_1 sagen kann.

Aus der für das Individuum i geltenden Ungleichung $i \neq 0$ folgt durch beiderseitiges Negiren: $i_1 \neq 1$, und vice versa.

Die „Kontraposition" ist nämlich auch bei Ungleichungen gestattet, d. h. nach bekannten Sätzen haben wir schematisch:

$$(a \neq b) = (a = b)_1 = (a_1 = b_1)_1 = (a_1 \neq b_1)$$

und sonach insbesondere:

$$(i \neq 0) = (i_1 \neq 1).$$

Wir können ferner die beiden Subsumtionen in (λ) vermittelst Kontraposition umschreiben wie folgt:

$$(i \subseteq x) = (x_1 \subseteq i_1), \qquad (i \subseteq x_1) = (x \subseteq i_1)$$

sodass die Definition (λ) auch in die Form gesetzt werden mag:

$$(\lambda') \qquad (i_1 \neq 1) \prod_x \{(x_1 \subseteq i_1) + (x \subseteq i_1)\} = \mathrm{i}$$

in welcher sie die Mission erfüllt, anstatt das Individuum selbst nunmehr die *Individuumsnegation* direkt zu *definiren*, sintemal in ihr gar nicht mehr von i, sondern blos noch von i_1 die Rede ist, mit dem Begriff des Individuums zugleich aber derjenige seiner Negation bestimmt oder gegeben sein musste.

Stellen wir noch in (λ') die beiden Glieder der unter dem Zeichen Π stehenden Summe gemäss dem Kommutationsgesetze 12_+) der Addition um, so zeigt die Vergleichung dieser Definition von i_1 mit derjenigen (λ') von i', dass die beiden Definitionen *bis auf den Namen des zu Definirenden* vollkommen, sozusagen Wort für Wort, übereinstimmen, weshalb der von beiden definirte Begriff denn auch derselbe sein muss; ein i' welches die erste Def. erfüllt, wird, wenn mit i_1 bezeichnet, auch die zweite erfüllen, und umgekehrt — q. e. d. —

Auch wenn wir uns jedoch jener Gliederumstellung enthalten, lässt sich dasselbe Resultat gewinnen, obzwar auf einem Umwege. Dieser bietet indessen einige lehrreiche Momente dar:

Ohne die Berücksichtigung des Th. 12_+) geht aus der Vergleichung des allgemeinen Faktors in (λ') mit dem von (λ') hervor, dass — auch abgesehn von dem einmal accentuirten, einmal mit Suffix versehenen i — die beiden noch nicht übereinstimmen, sondern dass in ihnen x und x_1 obendrein noch ausgetauscht erscheinen.

Nach § 30 war indessen bei einem mittelst des Zeichens Π in Abkürzung zusammengefassten Produkte die Bezeichnung der Produktationsvariabeln gleichgültig. Folglich können wir (um ganz penibel zuwerke zu gehen) in (λ') rechts auch y für x schreiben, wodurch entsteht:

$$(i+0)\prod_y \{(y_1 \neq\!\!\!\in i_1) + (y \neq\!\!\!\in i_1)\} = 1$$

und hierin mögen wir nach demselben Prinzip auch x_1 für y schreiben, wodurch wir als Def. von i_1 erhalten:

$$(i+0)\prod_{x_1} \{(x \neq\!\!\!\in i_1) + (x_1 \neq\!\!\!\in i_1)\} = 1.$$

Es war m. a. W. nach genanntem Prinzip gestattet, in (λ') auch x mit x_1 zu vertauschen.

Die letzte Fassung stimmt nun mit der obigen (λ') auch im allgemeinen Faktor überein, unterscheidet sich aber dadurch noch von ihr, dass hier $\prod\limits_{x_1}$, dort $\prod\limits_{x}$ vor besagten Faktor gesetzt erscheint.

Solcher Umstand aber muss überall da gleichgültig sein, wo wir — wie hier — mit einem „absoluten“ Produkte zu thun haben, d. h. mit einem solchen, welches über alle erdenklichen Werte der Produktationsvariabeln (aus der Mn. 1) sich zu erstrecken hat:

Wir haben, mag $F(x, x_1)$ eine „Gebietsfunktion“ von x, oder mag es, noch allgemeiner, eine „Aussagenfunktion“ vorstellen, offenbar:

$$\prod_{x_1} F(x, x_1) = \prod_{x} F(x, x_1)$$

— auch dann, wenn die Funktion F nicht, wie in dem obigen Beispiele, symmetrisch hinsichtlich ihrer beiden Argumente ist, indem, wenn x alle denkbaren Gebietwerte durchläuft, auch x_1 dies thut, und umgekehrt.

Solches ist nicht etwa ein eigenes Prinzip, sondern läuft auf das Kommutationsgesetz $\overline{12}_{\times}$) der Aussagenmultiplikation, sonach im Grunde auf das Prinzip $\overline{\mathrm{I}}$ hinaus, in Anbetracht dass für irgend ein bestimmtes x sowol $F(x, x_1)$, als auch $F(x_1, x)$ Faktor in jedem der beiden obigen Produkte sein wird, jedoch in der umgekehrten Ordnung zwischen die übrigen Faktoren eingeschaltet, wofern wir beiderseits genau dieselbe Wertenreihe von der betreffenden Variabeln durchlaufen lassen.

Ergebniss der Betrachtung ist also: *Gebietsdual entspricht der Definition und dem Begriffe des Individuums die Definition und der Begriff der Negation eines Individuums.*

Unzweifelhaft hat dies schon Herr Peirce richtig gefühlt, wenn er es auch nicht ausdrücklich ausspricht, wie in [5] p. 42 sq. aus seiner Gegenüberstellung von „individual“ und „simple“ zu erkennen ist.

Die Negation eines Individuums nennt Herr Peirce „a simple“ — doch leuchtet ein, dass wir einer fatalen Nebenbedeutung halber das Wort „ein Simpel“ nicht in die deutsche Sprache herübernehmen können.

Eher möchten wir die Benennung insoweit adoptiren, dass wir den entfernteren Anklang weniger scheuend, dafür ein „*Simplum*“ sagen (sollten wir uns dadurch auch der Neubildung eines lateinischen Hauptwortes schuldig machen).

Für unsre bevorzugte Mannigfaltigkeit bedeutet das Individuum einen Punkt der Tafelfläche, das (zugehörige) Simplum *die ganze Tafelfläche, einen einzigen* (diesen einen) *Punkt derselben ausgenommen.*

Es wird sich zeigen, dass wir auf die Simpla nicht weiter Rücksicht zu nehmen brauchen, indem alle Forderungen, welche sich künftig auf Individuen beziehen sollten — wie z. B. die bei der „Klausel“ zu erörternden — ihre dualen Gegenstücke von selbst finden. Nämlich wenn eine Anforderung bezüglich Verteilung von Individuen auf gewisse Klassen erfüllt sein wird, so muss auch deren duales Gegenstück durch die zugehörigen Simpla ohnehin erfüllt sein, und vice versā — vorausgesetzt nur, dass man *über die bisherige Gepflogenheit hinausgehend* bei der Herstellung solchen Gegenstücks *auch alle Klassen in ihre Negationen verwandle.* Man erhält hiebei „ein“ duales Gegenstück im weiteren Sinne, sozusagen nur „der Art nach“ von der jene Anforderung statuirenden Aussage — nennen wir es: die ihr „kontrapositionell“, oder „*kontrapositiv*“ entsprechende Aussage. Und diese muss mit jener

in der That immer gleichzeitig erfüllt sein, weil beide Aussagen einander im Grunde äquivalent sind und kraft der Theoreme 36) eben durch Kontraposition in einander übergehen.

Zur Erläuterung sei bemerkt: (gebietsdual) einander kontrapositiv entsprechende Aussagen können als „der Art nach" einander schlechthin gebietsduale hingestellt werden, sobald man die in sie eingehenden Buchstabensymbole als völlig allgemeine Klassensymbole deutet, und zwar bei jeder von den beiden Aussagen für sich, ohne Rücksichtnahme auf die andere, d. h. absehend von den Beziehungen, welche durch etwaige Übereinstimmung der Namen festgelegt erscheinen zwischen den Elementen der beiden Aussagen. So ist z. B. $(b + c \mathrel{\overline{\in}} a)$ exakt das duale Gegenstück zur Aussage $(a \mathrel{\overline{\in}} bc)$; aber $(b_1 + c_1 \mathrel{\overline{\in}} a_1)$ ist es wenigstens der Form oder Art nach, ist es ebenfalls *unter dem Vorbehalte*, dass man gleichwie a, b, c, so auch a_1, b_1, c_1 als schlechthin allgemeine, völlig unbestimmte oder willkürliche Gebietssymbole auffasst, unbekümmert darum, dass a_1 gerade die Negation von a uns darzustellen hatte, b_1 die von b, etc.

Diese Aussage $b_1 + c_1 \mathrel{\overline{\in}} a_1$ nun ist als das kontrapositive Gegenstück äquivalent der Aussage $a \mathrel{\overline{\in}} bc$. Etc.

Stellt nun z. B. als *Bedingung* für die Zulässigkeit einer gewissen Folgerung sich (die) heraus, dass eine Klasse a keine singuläre sein, kein Individuum vorstellen dürfe, dass also $\prod_i (a \neq i)$ gelte, so ist von selbst auch als Bedingung ebendafür hinstellbar, was der Art nach das duale Gegenstück der vorigen ausmacht, dass $\prod_i (a_1 \neq i_1)$ gelte, d. h. dass die Negation von a kein Simplum vorstelle. Denn diese Bedingung fällt als kontrapositives Gegenstück mit jener zusammen und braucht die eine nicht mehr ausgesprochen zu werden sofern die andre es wurde.

Oder — um noch eines der häufigst vorkommenden Beispiele aus der technischen Praxis unsres Kalkuls anzuführen — involvirt eine Konklusion etwa die Forderung dass zwei Klassen a und b_1 *nicht* in ein und dasselbe Individuum zusammenschrumpfen dürfen, gehört mithin zu unsern *Folgerungen* diese, dass $\prod_i \{(a = i)(b_1 = i) = 0\}$ gelten müsse, so wird hiezu auch deren der Art nach duales, nämlich kontrapositives Gegenstück:

$$\prod_i \{(a_1 = i_1)(b = i_1) = 0\}$$

als Folgerung gelten müssen — die Produkte natürlich allemal nur ausgedehnt über alle diejenigen Klassen i, welche der Definition des Individuums genügen. Etc.

Macht also auch der *durch den ganzen identischen Kalkul sich hindurchziehende „Gebietsdualismus"* keineswegs halt vor der Definition und Theorie des Individuums, so zeigen sich doch in der letzteren die beiden einander dual zugeordneten Zweige stets in *einen* verwachsen oder wenigstens der Art nach verschmolzen. Und so ist es denn als eine erfreuliche Thatsache zu verzeichnen, dass wir uns mit den Simplen überhaupt nicht herumzuschlagen brauchen, weshalb denn

auch solch aparte Benennung für die Individuumsnegation als kein sehr dringendes Bedürfniss erscheint. —

Im Bisherigen wurde — wie ich hoffe der Hauptsache nach — die Theorie der Eigenschaften des Individuums erledigt insoweit es nötig fällt, *ein* solches in's Auge zu fassen. Wir könnten freilich dieser noch manche Sätze zufügen, wie z. B.:

$$(i \between a) = 0,$$

etc. wollten wir noch andere Beziehungszeichen, als die bisher verwendeten, mit in den Kreis der Betrachtungen ziehen.

Systematisch hätte sich dieser nunmehr anzureihen die Theorie derjenigen Sätze welche handeln von *mehreren* Individuen zugleich.

Solche Sätze, wie:

$$\varphi) \qquad (i^1 \subset i^2) = 0, \qquad (i^1 \between i^2) = 0,$$

$$(i^1 ⋹ i^2) = (i^1 = i^2), \qquad (i^1 \neq i^2) = (i^1 i^2 = 0),$$

$$(i^1 ⋹ i^2 + i^3 + \cdots) = (i^1 = i^2) + (i^1 = i^3) + \cdots$$

lassen sich auf dem nunmehr gewonnenen Standpunkte jeweils mit grosser Leichtigkeit — und ohne je ein neues Prinzip, Postulat oder Axiom erforderlich zu machen — auf die Grundlagen des bisherigen Kalkuls zurückführen, aus diesen selbst *beweisen*.

Sie pflegen jedoch auch ohne solche Zurückführung einen ungeheuren Grad von unmittelbar einleuchtender *Evidenz* zu besitzen.

Was den Beweis der vorstehenden betrifft, so gibt auf den Typus der Gleichung und Ungleichung gemäss § 36 reduzirt:

$$(i^1 \subset i^2) = (i^1 i_1{}^2 = 0)(i_1{}^1 i^2 \neq 0)$$

und kann nach η) — darin a mit $i_1{}^2$ resp. $i_1{}^1$ identifizirt — der erste Faktor in $(i^1 i^2 \neq 0)$, der zweite in $(i^1 i^2 = 0)$ umgeschrieben werden, wo dann beide einander direkt widersprechen, die Inkonsistenz

$$(i^1 i^2 \neq 0)(i^1 i^2 = 0) = 0$$

zusammensetzend. Man mag indess auch nach der ersten Formel σ): $(i^1 \subset i^2)$ in $(i^1 = 0)$ umschreiben, was mit dem zufügbaren Faktor $1, = (i^1 \neq 0)$ die Inkonsistenz liefern, das Produkt 0 geben wird. Ähnlich läuft $(i^1 \between i^2)$ auf eine Inkonsistenz hinaus.

Ferner ist nun

$$(i^1 ⋹ i^2) = (i^1 \subset i^2) + (i^1 = i^2),$$

worin die erste Glied-Aussage rechts soeben als $= 0$ erwiesen worden.

Nachdem so auch die dritte Formel φ) bewiesen, haben wir nach dieser mittelst Kontraposition: $(i^1 \neq i^2) = (i^1 \not⋹ i^2)$, und dies ist nach ι) gleich $(i^1 ⋹ i_1{}^2)$ mithin $= (i^1 i^2 = 0)$, q. e. d.

Endlich braucht man behufs Beweises der letzten Formel φ) nur von dem Satze τ) Gebrauch zu machen und rechts die dritte Formel φ) anzuwenden.

Nachdem wir aber eingangs das Individuum definirt haben, ist die Frage zu diskutiren, *ob denn das Definirte auch denknotwendig existirt*, ob oder unter welchen Bedingungen der Definition ein Sinn, eine Bedeutung zukommt? Ich halte die vorstehende für eine der allerschwierigsten Fragen, und weiss mir nicht anders zu helfen, als indem ich ihre Beantwortung im bejahenden Sinne axiomatisch fordere, dieselbe (vorerst) als ein *Postulat* hinstelle. Und zwar genügt es anscheinend *nicht*, etwa blos die *Anerkennung* zu verlangen:

Postulat ((4)) *dass in jeder Klasse a, die nicht* 0 *ist, Individuen* (genauer: mindestens *ein* Individuum als ihr eingeordnete Unterklasse) *enthalten sein müssen*, m. a. W. dass wir immer ein solches anzugeben *vermögen*.

Wird freilich ein solches i^1 als unter a enthalten zugegeben, sodass $i^1 \mathrel{=\!\!\in} a$, so können wir die Ergänzung dieses einen Individuums zur Klasse a als eine neue Klasse ai_1^1 in's Auge fassen, und für dieselbe das nämliche Postulat abermals in Anspruch nehmen. Auch sie muss, wenn sie nicht 0 ist, wieder mindestens ein Individuum i^2 enthalten, sodass $i^2 \mathrel{=\!\!\in} ai_1^1$.

Dieses muss von i^1 notwendig verschieden sein, denn wenn es damit zusammenfiele, so gelangten wir zu dem Widerspruch mit der Def. (α), dass i^1 den beiden einander ausschliessenden Klassen $x = i^1$ und $y = ai_1^1$ gleichzeitig eingeordnet wäre [m. a. W. dass *innerhalb der Mannigfaltigkeit a* — die mit 1 bezeichnet werden könnte — dann i^1 eingeordnet sein müsste den beiden einander negirenden Klassen $x = ai^1$ und $x_1 = ai_1^1$, im Widerspruch zu β)]. Auf diese Weise ergäbe sich also die Nötigung, i^2 so, wie wir es gethan, verschieden von i^1 zu bezeichnen.

Auf die Ergänzung $ai_1^1 i_1^2$ von i^2 zur Klasse ai_1^1 lässt sich dasselbe Postulat dann wiederum anwenden: sie muss, sofern sie nicht 0 ist, abermals ein Individuum i^3 enthalten, sodass $i^3 \mathrel{=\!\!\in} ai_1^1 i_1^2$ ist, und zwar ein Individuum, welches von den bisherigen i^1 und i^2 verschieden.

In dieser Weise fortschliessend kämen wir zu der Darstellung:

$$a = i^1 + ai_1^1 = i^1 + i^2 + ai_1^1 i_1^2 = i^1 + i^2 + i^3 + ai_1^1 i_1^2 i_1^3 = \cdots =$$
$$a = i^1 + i^2 + i^3 + \cdots + i^r + ai_1^1 i_1^2 i_1^3 \cdots i_1^r,$$

oder:

$$\chi) \qquad a = \sum_{1}^{r} {}_{\varkappa}\, i^{\varkappa} + a \prod_{1}^{r} {}_{\varkappa}\, i_1^{\varkappa},$$

behufs deren rechnerischer Verifikation man lediglich von den Theoremen Th. 33_+) Zusatz, und mit Rücksicht auf die Voraussetzungen:

$$i^1 \Subset a, \quad i^2 \Subset a i_1^1, \quad i^3 \Subset a i_1^1 i_1^2, \ldots \quad i^r \Subset a i_1^1 i_1^2 i_1^3 \ldots i_1^{r-1}$$

auch von dem in Th. 20_+) mitenthaltenen Satze:

$$(b \Subset a) \Subset (b + a = a)$$

Gebrauch zu machen hätte.

Nennen wir nun das letzte Glied der obigen allgemeinen Darstellung χ) von a für den Augenblick „das r^{te} *Residuum* der Klasse a“, so würde doch auf Grund des Postulates ((4)) *allein* niemals der Nachweis zu erbringen sein, dass *bei hinreichend weit getriebener, nötigenfalls unbegrenzter* Fortsetzung des vorstehend geschilderten Folgerungsverfahrens (oder Prozesses des Schliessens) das Residuum der Klasse schliesslich*) $= 0$ werden müsse.

Wir dürften uns daher wol genötigt sehen, dem obigen Postulate ((4)) noch ein zweites hinzuzufügen, welches als die *Anerkennung* formulirt werden kann:

Postulat ((5)): *dass das identische Produkt jeder Klasse in die Negationen sämtlicher in ihr enthaltenen Individuen verschwindet*, m. a. W. dass wir imstande seien, bei irgend einer vorgelegten Klasse, einem Gebiete, den Prozess der Residuenbildung *wenigstens in der Idee* (wenn auch nicht in der Praxis) solange fortzusetzen, bis wir auf das Residuum 0 kommen.

Darnach wird denn in der That das Residuum der Klasse, welches nach Absonderung von mehr und mehrern ihrer Individuen von ihr übrig bleibt, zuletzt zu vernachlässigen sein, und mögen wir auch unsre beiden Postulate in das eine zusammenfassen:

Postulat ((4)). ((5)): *Jede von 0 verschiedene (nicht inhaltsleere) Klasse lässt sich darstellen als eine identische Summe von lauter (unter sich verschiedenen) Individuen.*

Jedes *räumliche Gebiet* insbesondere kann angesehen werden als ganz und gar *zusammengesetzt aus mathematischen Punkten* — desgleichen jedes *zeitliche* Gebiet aus *Augenblicken* [und jede („stetige“) Mannigfaltigkeit (auch) überhaupt aus ihren Elementen].

Und zwar erscheint der „mathematische Punkt“ hierselbst als ein *wohldefinirter* Begriff: Als bekannt sollte ja gelten, was unter einem *räumlichen Gebiete, Raumteil* zu verstehen ist. Ich sage hiefür mit Ab-

*) NB. Was heisst jedoch in dem letzteren Falle, auf den mit „nötigenfalls“ hingewiesen ist, dieses „schliesslich“?

sicht nicht geometrischer „Körper“, weil dieser Begriff mit zu engem Umfange, als im Gegensatz zu Fläche, Linie sowie Punkt stehend gebraucht zu werden pflegt — weit eher wäre die Bezeichnung des räumlichen Gebietes als eine „Figur“ zulässig. Der „Raum*teil*“ ist nun Punkt zu nennen, dann und nur dann, wenn er, mit i bezeichnet, der Definition (λ) genügt, in welcher dem Symbole x alle erdenklichen räumlichen Gebiete oder Raumteile innerhalb des ganzen Raumes 1 als Bedeutung untergelegt werden müssen.

Wir mögen hienach schreiben:

$$\psi) \qquad a = i^1 + i^2 + i^3 + \cdots$$

Die Forderung, für die Logik der Begriffsumfänge dies anzuerkennen, scheint in der That in der ganzen Natur unsres Denkens begründet.

Unter einer *Klasse* können wir uns nur denken: das, was vorstellen wird ein *zusammenfassender* oder kollektiver *Name für verschiedene einzelne Dinge*, wenn derselbe durch die Vorschrift *distributiver* Verwendung zu einem „generellen“ oder „Gattungsnamen“ gestempelt wird (und dadurch unterschieden wird von dem „Kollektivnamen“ im engeren Sinne, bei welchem solche Verwendung ausgeschlossen oder wenigstens nicht gefordert ist, bei welchem besagte Vorschrift wegfällt, fehlt).

Die Klasse, als dargestellt durch einen Gemeinnamen oder vieldeutigen Term, kann selbst wieder in weitere*) Unterklassen zerfallen und so fort. Als auf deren letzte Elemente müssen wir aber bei einer jeden gedachten Klasse schliesslich kommen auf eindeutige Terme, die Individuen der Klasse repräsentirend, deren Namen eben als Eigennamen ganz bestimmte Objekte des Denkens bezeichnen. Denn ursprünglich von den letzteren ausgehend haben wir uns historisch erst zu dem Begriff der Klasse erhoben.

Umgekehrt allerdings ist der genetische Gang bei den Gebieten einer „stetigen“ Mannigfaltigkeit. Ist diese z. B. räumlicher Natur, so erscheint die Vorstellung des Raumteils, *Körpers* (hernach analog die des Flächen- und des Linienteils) als die ursprünglichere, derjenigen des Punktes gegenüber, und muss von da erst zum Begriffe des mathematischen Punktes herabgestiegen werden!

Obwol ich damit aus dem Rahmen der mir hier gesetzten Aufgabe

*) Selbstverständlich „*engere*“ — man wolle „weitere“ hier als „fernere“ oder „neue“ verstehen.

ein wenig heraustrete, will ich den schwierigen Versuch wagen, die Art, wie meines Erachtens solches auszuführen ist, genauer darzulegen, und zwar sowol in *streng-wissenschaftlicher* Hinsicht als auch in *didaktischer* Hinsicht im Hinblick auf die Schwierigkeiten des ersten Elementarunterrichts in der *Geometrie* und die an diesen zu stellende Anforderung, sich wenigstens nicht in Widerspruch mit der strengen Wissenschaft zu setzen.

In jener erstgenannten Hinsicht liegt die Sache ziemlich einfach. Beim streng wissenschaftlichen Verfahren ist die Logik, gleichwie allen andern Disziplinen, so anch der Geometrie *voran*geschickt zu denken, und zwar mit Einschlnss auch der Betrachtungen des gegenwärtigen Paragraphen. „Punkt“ haben wir dann wie oben erwähnt ein räumliches Gebiet, einen Raumteil zn nennen, der eben (mit i bezeichnet) unsrer Definition (λ) genügt.

Dass einerseits solche Definition *zulässig* oder *denkmöglich* ist, dass sie mit den sonstigen Gesetzen des menschlichen Denkens keinen Widerspruch in sich schliessen kann, vielmehr mit ihnen konsistent, verträglich ist, zeigt das Substrat der „Individuen“ bei den wohldefinirten Klassen (von Objekten des menschlichen Denkens), welche wir als etwas uns Gegebenes reklamiren dürfen, über das wir verfügen. Die Deutungsfähigkeit des durch (λ) definirten i als eines Individnums einer gewöhnlichen Mannigfaltigkeit, innerhalb deren beliebige Klassen x resp. x_1 sich bilden lassen, thnt die *Existenz* des also Definirten (auf einem gewissen Felde wenigstens) unleugbar dar, nnd schliesst die Möglichkeit eines verkappten Widerspruchs solcher Definition mit den Gesetzen des logischen Denkens ebendamit aus.

Da (resp. solange) aber andrerseits die Existenz des durch (λ) zu Definirenden auf dem *hier* vorliegenden Felde — für das räumliche Substrat, in der Geometrie — nicht bewiesen ist, ja unbeweisbar erscheint, so wird allen an die adoptirte Definition des Punktes weiterhin zu knüpfenden Folgerungen, allen Sätzen der Geometrie, in denen von „Punkten“ die Rede ist, hinfort zuzuerkennen sein: ein „hypothetischer“ Charakter, der Charakter von Schlüssen, unter deren Prämissen die Geltung jener Definition, die Existenz von etwas ihr Genügendem eben als „Punkt“ zu Bezeichnenden, wesentlich mit figurirt. Die Geometrie wird sich gegenüber dem Pnnkte gerade ebenso verhalten, wie die Geomechanik zu den absolut starren Körpern. Und sie büsst damit gar nichts ein von ihrer Erhabenheit und Strenge.

Beim geometrischen Elementarunterricht kann indess jener streng wissenschaftliche Weg begreiflich nicht beschritten werden.

Nach meinem (subjektiven) Erachten dürfte hier am besten in folgender Weise vorzugehen sein, wobei man auf Grund gewisser axiomatisch anzuerkennender Eigenschaften des *Raumes* zu einer genetischen Begriffserklärung von Pnnkt, Ort, Bewegung, Körper, Fläche, Linie, *und Grenze*, gelangen wird.

Wie üblich denken wir den *Raum* uns definirt als eine Form der Materie, nämlich des der Erscheinnngswelt zugrunde liegend gedachten Wirklichen, und zwar als den Komplex derjenigen Merkmale dieser (raumerfüllenden) Substanz, welcher übrig geblieben, nachdem man von allen den

sogenannten „physikalischen" Merkmalen dieser letzteren, als Farbe, Gewicht, Kräften, ... abgesehen oder abstrahirt hat.

Man gehe nun aus von der Thatsache der „*Teilbarkeit* des Raumes". Anzuerkennen ist: dass der Raum ein Mannigfaltiges ist, an (oder *in*) welchem sich Teile unterscheiden lassen.

[Gemeinhin wird ja ein Raumteil durch seine Begrenzung erst „bestimmt"; dass die Vorstellung einer Grenze aber nicht unerlässlich ist zur Konzeption eines Raumteiles überhaupt, scheint mir das schon einmal gebrachte Beispiel eines Landstrichs oder einer Himmelsgegend, des Schauplatzes einer Handlung, etc. darzuthun. Jedenfalls wird, wer über den Begriff der Grenze noch nicht verfügt, diesen vielmehr erst erklären soll, vorerst auch nicht von Flächen oder Linien reden dürfen, für den wird der Raumteil zunächst immer ein geometrischer „Körper" sein.]

Zwei Raumteile müssen sich durch (mindestens) ein Merkmal von einander unterscheiden, ansonst sie identisch (einerlei, der nämliche, nur *ein* Raumteil) wären, zusammenfielen, sich „deckten".

Dasjenige Merkmal (oder der Komplex derjenigen Merkmale) durch welches sich ein Raumteil von allen andern unterscheidet, heisst seine *Lage* (sein *Ort*) im Raume. [Auch von zwei konzentrischen Kugeln von verschiedener Grösse, z. B. ist hienach zu sagen, dass sie sich durch ihre Lage, den von ihnen eingenommenen Platz, noch unterscheiden.] Die Existenz eines solchen Merkmalkomplexes scheint postulirt werden zu müssen. [Das Postulat läuft hinaus auf die Anerkennung des Nichtverschwindens des identischen Produkts von all den Merkmalkomplexen durch welche sich der gedachte Raumteil einzeln von je einem andern und zwar so von jedem unterscheidet.]

(Postulat:) Es gibt Raumteile, die sich *nur* durch ihre Lage unterscheiden; diese heissen „*kongruent*".

Geht man (mit der Aufmerksamkeit) von einem Raumteil zu einem andern ihm kongruenten über, so wird gesagt, der erstre habe seinen Platz gewechselt, sich in die Lage des zweiten begeben, oder „bewegt". [Genauer bewegt sich in der Erscheinungswelt die den Raumteil erfüllende und durch diese Erfüllung denselben charakterisirende Materie *in* dem — samt seinen Teilen — als ruhend zu bezeichnenden Raume.] Kongruente Raumteile sind also solche, die durch „Bewegung" zur Deckung gebracht werden können, und ist „Bewegung" im Raume möglich. —

Auch an irgend einem Raumteile lassen immer noch weitere Teile sich unterscheiden, und ebenso an dessen Teilen, oder die Teilbarkeit des Raums ist eine unbegrenzte, der Raum ist ohne Ende teilbar — eine Thatsache, deren Anerkennung wir einstweilen als das Postulat von der „Kontinuität" des Raumes bezeichnen. Der (echte) Teil mag kleiner als das Ganze genannt werden.

Für die Sinne erreicht man durch fortgesetzte Teilung, Hervorhebung von immer kleinerem Teile eines Raumteiles, sehr bald eine sog. Grenze: die Grenze der Wahrnehmbarkeit des hervorgehobnen Raumteils. In der Idee kann aber dieser Prozess fortschreitender Teilung immer noch weiter

fortgesetzt werden. Gleichwol wird man auch hier *aus Ermüdung* irgendwo stehen bleihen, und das Ergehniss ist der vorgestellte Punkt.

„Mathematischen Punkt" nennen wir dagegen einen solchen Raumteil, bei welchem wir den erwähnten Teilungsprozess solange fortgesetzt annehmen his sich an dem zuletzt hervorgehohnen Teile keine weiteren Teile mehr unterscheiden lassen würden. Einen solchen kann man sich wohl „denken" aber nicht mehr vorstellen und er hleiht ein *Ideal,* das wir mit unsrer Vorstellung nur mehr heliebig nahe zu erreichen vermögen.

Nennen wir „ausgedehnt" ein jedes Mannigfaltige, an welchem sich noch (verschiedene) Teile unterscheiden lassen, so wird also anzuerkennen sein, dass der Punkt „*keine* Ausdehnung" hahe. Zur Definition des Punktes kann aber dieses negative Merkmal in der That nur verwendet werden indem man es verhindet mit der positiven Anforderung, dass der Punkt einen Raumteil vorzustellen hahe. Erklärte man in der thatsächlich noch fast allgemein verbreiteten Weise für einen „Punkt" schlechtweg das, was keine Ausdehnung besitzt, so müsste in der That auch das Nichts, ein Augenblick, ein (cum grano salis) Pfiff, Schreck(!), und dergleichen mehr, als Raumpunkt anerkaunt werden. Jedenfalls sollte der Raumpunkt doch etwas Räumliches sein, etwas *an* oder *in* dem Raume, und solange es nicht gelungen, den Punkt in wissenschaftlich hefriedigender Weise als ein blosses *Merkmal* des Raums zu definiren — „Merkmal" hier als im Gegensatz zu „Teil" verstanden (die Teile eines Dinges sind ja auch Merkmale desselhen) — wird man in der That den Punkt als einen „Teil" des Raumes zu charakterisiren haben.

Ein jeder Punkt kann frei im Raume bewegt und in die Lage jedes andern Punktes gebracht werden. Jedenfalls: bringt man zwei Punkte mittelst Lagenänderung des einen, oder heider, in eine solche Lage, dass sie ein räumliches Gebiet, einen Raumteil gemein hahen (und die Möglichkeit scheint postulirt werden zu müssen), so werden sie zusammenfallen, sich decken müssen, denn das ihnen gemeinsame räumliche Gehiet muss mit dem einen sowol als mit dem andern von ihnen identisch sein, ansonst wir zu dem Widerspruch mit dem Begriffe des Punktes gelangen würden, an diesem echte Teile (als den gemeinsamen und den nicht gemeinsamen Teil) unterschieden zu hahen. M. a. W.: Alle Raumpunkte sind einander kongruent, unterscheiden sich von einander lediglich durch ihre Lage; der Punkt markirt *nur* einen „Ort" im Raume, und hesitzt ausser diesem einen kein weiteres Merkmal. [Dieses „eine" ist dann freilich noch ein sehr zusammengesetztes Merkmal, sodass sich als mit ihm gegehen gleichwol noch unbegrenzt viele Merkmale für einen bestimmten Punkt schon hervorhehen lassen.]

Es wurde schon darauf hingedeutet, dass wir einen Raumteil „schlechtweg", welcher *nicht* als das ideale Ergebniss eines Prozesses von unbegrenzt fortgesetzten Raumteilungen zu hezeichnen ist, einen geometrischen *Körper* zu nennen haben.

Analysiren wir nun aber unsre Anschauung von einem ganz bestimmten geometrischen Körper, so nehmen wir wahr, dass sich an ihm solche Punkte

vorfinden, von welchen wir mit der Anschauung*) nicht zu unterscheiden vermögen, ob sie zu gedachtem (Raumteil oder) Körper, oder ob sie zum übrigen Raume gehören.

Die Gesamtheit, das System, den Inbegriff ebendieser Punkte nennen wir die *„Grenze"* des Körpers. Dieselbe scheidet die zum Körper gehörigen Punkte von den nicht zu ihm gehörigen, und ist, weil solche Scheidung gegenseitig, ihrem Begriffe gemäss auch zugleich als die Grenze des Aussenraumes (gegen den Körper) zu bezeichnen.

Wir nennen sie eine *Fläche*. Es sind an ihr zwei „Seiten" zu unterscheiden: ein Punkt wird auf der einen oder auf der andern Seite von ihr liegen, jenachdem er dem von ihr begrenzten Körper oder aber dem Aussenraume angehört (in demselben „liegt"). Wir sagen: der Raum sei ausgedehnt zu beiden Seiten der Fläche und schreiben (was zuerst noch eine vague Redensart) der Fläche eine Ausdehnung (Dimension) weniger als dem Raume zu. Der so gewonnene Flächenbegriff ist freilich noch nicht der allgemeinste.

Auch die Fläche erweist sich wieder als ein Mannigfaltiges, an welchem sich weitre Teile unterscheiden lassen; auch sie ist noch „ausgedehnt". Vergegenwärtigen wir uns einen bestimmten Teil der Fläche (schlechtweg), so werden wir dessen inne, dass an ihm sich Punkte vorfinden, bezüglich deren unsre Anschauung nicht zu unterscheiden vermag, ob sie zu dem Flächenteile oder ob sie zur Aussenfläche gehören. Ihre Gesamtheit bildet die „Grenze" der Fläche, heisst eine *Linie* (Kurve); und wird der letztern eine Ausdehnung weniger, als der (zu ihren beiden Seiten ausgedehnten) Fläche zugeschrieben.

Wieder offenbart sich uns die Linie als ein Mannigfaltiges, das Teile besitzt, noch ausgedehnt ist, und wenn ein bestimmter Teil der Linie in's Auge gefasst wird, so muss auch dieser eine „Grenze" haben, die ihn von der Aussenlinie scheidet. Dieser Grenze ist eine Ausdehnung weniger, als der Linie, zuzuschreiben.

In der Thatsache nun dass letztere Grenze allemal als ein System (im einfachsten Falle: Paar) von Punkten sich herausstellt, wo dann am Punkte keine Teile mehr unterscheidbar sind, gibt sich erstmals die „dreifache Ausdehnung" des Raumes kund.

Es wäre nun die Reihe der so gewonnenen geometrischen Gebilde, als: Körper, Fläche, Linie und Punkt, genetisch nochmals in der umgekehrten Ordnung durchzugehen, vom Punkt aus nämlich durch (die erst als eine physikalisch mögliche einzuführende) „stetige" Bewegung zu erzengen.

Wird *„Bahn"* eines geometrischen Gebildes das System, die Gesamtheit seiner successiven Lagen bei einer Bewegung genannt, so wäre zunächst zu konstatiren, dass die Linie auch erzeugt werden kann als die

*) Diese Verklausulirung ist wesentlich, indem sie den Vorbehalt einschliesst, dass es gleichwol — nach Schöpfung des Zahlenreiches, mittelst Fixirung der Raumpunkte durch Zahlensysteme — gelingen mag, auch die zur Begrenzung des Körpers beitragenden Punkte von ihm selbst und von dem Aussenraume zu unterscheiden.



Bahn eines sich bewegenden Punktes; die Fläche als Bahn einer Linie, wenn bei der Bewegung der letzteren jedoch auch gestaltliche Änderungen, Deformationen zugelassen werden, bei welchen sie nur ihren Charakter als Linie zu wahren hat, etc. Und wie umgekehrt die Bahn einer Linie entweder selbst wieder nur eine Linie (z. B. bei dem sich in sich herumschwingenden Kreise) oder aber eine Fläche ist, ebenso die Bahn einer Fläche selbst wieder nur eine Fläche (wie bei der auf der Kugelfläche gleitenden Haube derselben) oder aber ein Körper, so würde endlich darauf hinzuweisen sein, wie in der Thatsache, dass die Bahn eines Körpers stets wieder nur ein Körper ist, wiederum die Dreidimensionalität des Raumes zutage tritt (ein Faktum, dem man später auch noch einen schärferen Ausdruck wird zu geben vermögen). —

Ich schliesse hiermit die begonnene Skizze, bei der ich lediglich den Zweck verfolgte die vier Arten der geometrischen Gebilde auf eine mit der (über allem Zweifel erhabenen) wissenschaftlichen Punktdefinition harmonirende Weise in die Elementargeometrie einzuführen.

Ob es mir vorstehend gelungen, wenigstens anzudeuten, wie dies in einer *haltbaren* Weise geschehen könnte, wage ich keineswegs zu entscheiden, vielmehr würde ich es begrüssen, wenn durch Kritik und Verbesserungsvorschläge etwaige Schwächen, Inkonsequenzen oder Lücken in diesen Überlegungen an den Tag gebracht und behoben werden sollten.

Möglich auch, dass alle derartigen Versuche ein blosser Notbehelf (auf Kosten der Wissenschaftlichkeit zugunsten der Didaktik) bleiben, und dass wir eben erst nach (und vermittelst) Schöpfung des Reiches der *Zahlen* — gemäss Dedekind [1] — in den Stand gelangen, die Natur unsrer Raumanschauung zu untersuchen, dieselbe völlig zu verstehen, angemessen zu beschreiben und aus den mit ihr so enge verwachsenen Axiomen streng logisch zu konstruiren. —

Es muss als wünschenswert erscheinen, dass wir über ein angemessen kurzes Symbol verfügen, welches ausdrückt, dass ein Gebiet a ein Punkt sei, resp. dass die Klasse a eine singuläre, nämlich a ein Individuum bedeute. Wählen wir als solches etwa das Symbol:

$$J^a$$

so wird nach (λ) diesem der Wert der nachstehend rechts ihm gleichgesetzten Aussage zukommen:

$$(\omega) \qquad J^a = (a \neq 0) \prod_x \{(a \not\Subset x) + (a \not\Subset x_1)\}.$$

Dasselbe wird $= 1$ sein, falls a wirklich ein Punkt ist, und $= 0$ in jedem andern Falle. Und zugleich damit ist dann auch

$$J_1^a$$

erklärt als die Verneinung von J^a, besagend, dass a nicht singulär

kein Punkt sei — eine Aussage in Bezug auf deren Werte 0 und 1 es sich gerade umgekehrt verhält, wie im vorigen Falle.

Als Produktationsvariable in (ω) ist allemal (eventuell an Stelle des x) ein noch disponibler, nicht schon anderweitig in der Untersuchung vergebener Buchstabe verwendet zu denken, sodass z. B. J^x zu bedeuten hätte:

$$J^x = (x \neq 0) \prod_y \{(x \not\in y) + (x \not\in y_1)\}. \text{ —}$$

Dies vorausgesetzt wollen wir unsre Zeichensprache noch dahin auszubilden suchen, dass wir imstande sein werden, ein identisches Produkt, eine identische Summe, auszudehnen, zu erstrecken über alle Individuen i einer gegebenen Klasse a (oder über alle Punkte solchen Gebietes) und gerade nur über diese.

Zu dem Ende empfiehlt es sich, ja ist es unerlässlich, eine Festsetzung zu treffen, die sich auch für spätere Untersuchungen wichtig erweisen wird, über das *„Produkt“ aus einer Klasse* (resp. einem Gebiete) *a und einer Aussage A.*

Die letztere A als eine Aussage von festem Sinne (dergleichen für uns ja immer nur in Betracht kommen) hat entweder den Wert $\dot{0}$ oder den Wert $\dot{1}$, jenachdem sie falsch oder wahr ist — wenn wir für den Augenblick auch die Nullaussage mittelst übergesetzten Tupfens von dem Nullgebiete, der Nullklasse 0 unterscheiden.

Wir machen nun aus, dass uns

$$(\alpha_1) \qquad a \cdot \dot{0} = \dot{0} \cdot a = 0 \quad \text{und} \quad a \cdot \dot{1} = \dot{1} \cdot a = a$$

bedeuten solle. Hiernach wird denn auch der Sinn des Produktes

$$aA \quad \text{oder} \quad Aa$$

auf alle Fälle feststehen. Das Produkt einer Klasse in eine Aussage ist erstere selber, wenn die letztere wahr ist, dagegen die Nullklasse, sobald sie falsch ist (stets ist es also wieder eine Klasse, und nicht eine Aussage).

Wichtigster Anwendungsfall ist dieser, wo die Aussage A gedachte Klasse a selbst betrifft. Um dies hervortreten zu lassen, wollen wir jene mit A^a bezeichnen.

Indem wir alsdann einem etwa als Glied einer Summe auftretenden Klassenterme a solchen Aussagenfaktor A^a beifügen, werden wir hingebracht haben, dass jene Klasse in der Summe

$$(\beta_1) \qquad \Sigma a A^a$$

wirklich vertreten ist, sobald sie die Voraussetzung A^a erfüllt, dagegen

thatsächlich unvertreten ist, als Glied faktisch fehlt, sobald in Bezug auf sie jene Voraussetzung nicht zutrifft!

Von ferne streift auch einmal Herr Peirce [9a] p. 188 durch Einführung sonderbarer numerischer Koeffizienten an unsre Abmachung (α_1).

Der erste Teil dieser Konvention scheint übrigens gar nichts Neues zu sein, vielmehr mit dem Th. $22_\times$) $a \cdot 0 = 0$ ohnehin zusammenzufallen, sintemal wir ja den Punkt über der Aussagennull stets fortzulassen pflegten. Ein wenig Sorgfalt lässt jedoch erkennen, dass solches zu glauben eine Täuschung wäre, und dass Produkte aus Klassen und Aussagen bis jetzt nie vorgekommen sind.

Um zunächst zur Erläuterung und Übung ein Beispiel zu bringen, so wird man sich leicht auf Grund der Tautologie und Absorptionsgesetze der Addition überzeugen, dass allgemein:

$$\gamma_1) \qquad \sum_b (b \Subset a)\, b = a$$

ist — die Summe über alle erdenklichen Gebiete b unsrer bevorzugten Mannigfaltigkeit erstreckt gedacht.

Denn unter diesen b figurirt auch a selber, welches links multiplizirt erscheint in die Aussage $(a \Subset a)$, $= \dot{1}$, sodass zunächst a selbst ein Glied jener Summe ist; fernere Glieder sind alle b, welche in a enthalten sind, weil auch für diese $b \Subset a$ gelten, $= \dot{1}$ sein wird; diese aber werden von dem a verschluckt. Jedes b dagegen, welches nicht in a enthalten, erscheint in $(b \Subset a)$, $= 0$ multiplizirt und fällt somit aus der Summe heraus.

Stellt nun i ein variables Gebiet unsrer Mannigfaltigkeit vor, und bedeutet $f(i)$ eine gegebene *Klassen*funktion, so wird J^i die Forderung ausdrücken, dass i ein Punkt sei und gibt von den beiden Ausdrücken:

$$\delta_1) \qquad \sum_i J^i f(i), \qquad \sum_i J^i (i \Subset a) f(i)$$

der erste an: die Summe der $f(i)$ gebildet für alle Punkte i unsrer Mannigfaltigkeit 1, und nur für solche — obzwar man das i (wie früher die Summationsvariabele stets) *alle* Gebiete der Mannigfaltigkeit überhaupt im Geiste durchlaufen zu lassen hat. Und ebenso wird der zweite Ausdruck darstellen: die Summe der $f(i)$ erstreckt über alle diejenigen Individuen i, welche der Klasse a angehören — und nur über solche.

Sobald i kein Punkt ist, wird nämlich der Faktor J^i, sobald es nicht in a enthalten ist, wird der Faktor $(i \Subset a)$ verschwinden und damit der Term aus der Summe herausfallen. Die Deutung findet sonach ganz in der gleichen Weise statt; wie sie [auch ohne eine spezifische Abmachung, wie (α_1)] ohnehin zu erfolgen hätte gemäss den Regeln des reinen Aussagenkalkuls, falls $f(i)$ etwa eine *Aussagen*funktion, Aussage über i, vorstellte.

Wir haben damit das eine der uns vorgesetzten Ziele erreicht, sofern nämlich Summen dabei in Betracht kamen.

Um auch für die Produkte Analoges zu verwirklichen, müssen wir die zu (α_1) dual entsprechende Festsetzung treffen:

(ε_1) $$a + \dot{0} = \dot{0} + a = a, \qquad a + \dot{1} = \dot{1} + a = 1,$$

durch welche auch die *Summe*

$$a + A \quad \text{oder} \quad A + a$$

aus einer Klasse a und einer Aussage A als eine Klasse erklärt wird für alle (erdenklichen) Fälle (der Gültigkeit sowol als Ungültigkeit der Aussage).

Fügen wir darnach dem Faktor a eines Produktes eine (ihn betreffende) Aussage A_1^a als Summanden hinzu, so wird die letztere und damit die genannte Summe den Wert Eins annehmen sobald die Voraussetzung A^a von a *nicht* erfüllt ist; und somit bleibt in solchem Falle der Faktor ohne allen Einfluss auf den Wert des Produktes, fällt sozusagen aus diesem heraus. Dagegen wird der Faktor a ungeändert bleiben, indem nur A_1^a, gleich null, zu ihm hinzutritt, er wird mithin schlechtweg im Produkte vertreten sein, sobald die Forderung A^a von dem a erfüllt ist; dergestalt, dass

$\zeta_1)$ $$\prod_a \{a + A_1^a\}$$

das Produkt vorstellt von allen denjenigen Klassen resp. Gebieten a, welche die Bedingung A^a erfüllen und nur von diesen — obzwar die Variable a doch alle erdenklichen Gebiete der Mn. durchläuft.

Beispielsweise mag man sich überzeugen, dass, analog zu γ_1) gilt:

$\eta_1)$ $$\prod_b \{b + (a \not\Subset b)\} = a,$$

wobei der zweite Term aus $(a \not\Subset b)_1$ entstanden ist.

Hiernach wird uns von den beiden Ausdrücken

$\vartheta_1)$ $$\prod_i \{f(i) + J_1^i\}, \qquad \prod_i \{f(i) + J_1^i + (i \not\Subset a)_1\}$$

der erste vorstellen: das Produkt der Funktionswerte $f(i)$ gebildet für alle Punkte der Mn. 1, und der zweite: gebildet für alle Punkte des Gebietes a selbst — und ausschliesslich für diese. Wir haben damit auch unser zweites Vorhaben verwirklicht.

Überhaupt dürfte klar geworden sein, wie sich unsre Schemata β_1) und ζ_1) nochmals verallgemeinern lassen, indem man das Operationsglied a durch $f(a)$ in ihnen ersetzt. Es stellt:

$\iota_1)$ $$\sum_a f(a)\, A^a \quad \text{resp.} \quad \prod_a \{f(a) + A_1^a\}$$

die Summe resp. das Produkt der $f(a)$ vor, *ausschliesslich erstreckt* über alle diejenigen a, welche die Bedingung A^a erfüllen — und zwar einerlei, ob $f(a)$ ein Klassenterm ist, oder ob es selbst eine Aussage über a, wie B^a, bedeutet.

Hievon wollen wir endlich eine Anwendung machen, um unsre Individuen betreffende Postulate ((4)) und ((5)) ganz in Formeln zu setzen.

Es lautet Postulat

((4)) $$(a \neq 0) \mathrel{\underline{\in}} \sum_i J^i (i \mathrel{\underline{\in}} a)$$

was auch geschrieben werden kann als:

$$1 = (a = 0) + \sum_i J^i (i \mathrel{\underline{\in}} a)$$

und Postulat

((5)) $$a \prod_i \{i_1 + J_1^i + (i \mathrel{\underline{\in}} a_1)\} = 0.$$

Bei genauerem Zusehen werden dieselben ohne weiteres verständlich sein, nur ist bezüglich des letztern zu bemerken, dass die Negation von $(i \mathrel{\underline{\in}} a)$ kraft ι) eben durch $(i \mathrel{\underline{\in}} a_1)$ ersetzt werden durfte.

Als Ausdruck des Satzes ψ), zu welchem beide Postulate sich vereinigten, erhalten wir zudem:

((4)) · ((5)) $$a = \sum_i i J^i (i \mathrel{\underline{\in}} a)$$

eine Formel, die vor ψ) den Vorzug besitzt, analytische Geltung zu haben, nämlich die Klasse a als die identische Summe *aller ihrer* Individuen allgemeingültig darzustellen. —

Obwohl ich der Meinung bin, dass schon die Logik der Individuen allein noch einer reichen Weiterentwickelung fähig sein wird, müssen wir hier abbrechen, uns begnügend nur das Elementarste dargestellt zu haben, was sich bei einer ersten Inangriffnahme ergeben.

In Bezug auf dieses vermag ich nicht zu sagen, ob und wie weit ich vielleicht in Einzelnem mit Herrn Peano's [2,3] Ergebnissen wesentlich zusammengetroffen, da mir noch nicht die Musse zuteil geworden, mich in die scharfsinnigen Arbeiten dieses Autor's hinlänglich zu vertiefen.

Auf dem Individuumsbegriffe fusst ja namentlich auch der Begriff der *Anzahl!* Und leicht ist es z. B. zunächst die *Null*zahl und die *Ein*zahl nunmehr exakt zu definiren.

Nennen wir Numerus von a, in Abkürzung num. a, die „Anzahl“ der Individuen einer Klasse a, so definirt der Ansatz:

$$(\text{num. } a = 0) = (a = 0)$$

die *Zahl* 0 (linkerhand) vermittelst des als bekannt vorausgesetzten Begriffes der identischen Null (welche rechts vorkommt) oder des Nichts. Der Ansatz:

$$(\text{num. } a = 1) = J^a,$$

wozu (ω) nachzusehen ist, gibt die exakte Definition der Einzahl.

Auch die Zahl 2 könnte als Anzahl (der Individuen einer Klasse a) in unsrer Zeichensprache unschwer definirt werden z. B. durch den Ansatz:

$$(\text{num. } a = 2) = \sum_{x,y} J^x J^y (x \neq y)(a = x + y)$$

etc.; doch werden für die höheren Anzahlen statt solcher speziellen besser wol generelle Definitionen — vielleicht in „rekurrenter“ Weise — aufgestellt. —

Dreiundzwanzigste Vorlesung.

§ 48. **Erweiterte Syllogistik.**

Am Schlusse des § 39 haben wir die grösste Erweiterung angedeutet, deren die Theorie der „einfachen" Syllogismen (mit zwei Prämissen und einem Mittelgliede) überhaupt fähig wäre. Da es nun unthunlich ist, die eine Viertel-Milliarde übersteigende Menge der möglichen Prämissenkombinationen auf ihre jeweilige Konklusion prüfend durchzugehen, so wollen wir uns auf ein kleines Feld innerhalb dieser ungeheuren Mannigfaltigkeit beschränken und als solches ein möglichst interessantes auswählen.

Vor allem wollen wir die von Gergonne — vergl. § 34 — angeregte Idee der „Dialectique rationelle" verfolgen und zusehen, *wie unser Schliessen sich gestalten würde, wenn wir* (möglichst) *immer nur in „Elementarbeziehungen" dächten und urteilten.*

Eine ähnliche Untersuchung kann dann auch für die 4 *„primitiven"* resp. die 8 Beziehungen De Morgan's und endlich für unsre *„Grund*beziehungen" durchgeführt werden — wo nicht für alle fundamentalen und „urwüchsigen" Umfangsbeziehungen überhaupt (vergl. S. 135).

Um diese Untersuchungen vorbereitend zu erleichtern wollen wir die Benennungen für die urwüchsigen Umfangsbeziehungen *zwischen A und B*, wie sie in der 17. und 18. Vorlesung eingeführt und gebraucht wurden, beibehalten, denselben aber noch der grösseren Deutlichkeit zuliebe, das Gebietepaar A, B als Exponenten beisetzen.

Ein Partie von diesen Beziehungen ist in Tafel IV° des § 36, S. 120, bereits auf den Typus der Gleichung und Ungleichung reduzirt angegeben worden. Für die Zwecke der uns obliegenden Eliminationen empfiehlt es sich aber, die in diesen Darstellungen auftretenden Gleichungen als die Boole'schen Bestandteile jener Aussagen rechterhand auf 1 (anstatt wie dort auf 0) gebracht anzusetzen. Durch Einbezug auch der negirten Gebiete A_1, B_1 kam ferner zu

jenen in Tafel IV⁰ berücksichtigten Beziehungen noch eine weitere Partie hinzu, die wir uns ebenso auf Gleichungen und Ungleichungen reduzirt darzustellen haben werden (was früher als nur implicite geleistet zu erachten).

Aus diesen Gründen müssen wir uns eine neue Zusammenstellung der etwa in Betracht zu ziehenden einfachen Umfangsbeziehungen anlegen. Als solche empfiehlt sich die nachfolgende Tafel, die eines weiteren Kommentars nicht mehr bedürfen wird:

Tafel der fundamentalen Beziehungen zwischen A, B, A_1, B_1.

Hülfsbeziehungen.

$1'$. $h = h^{A,B} = h^{A,B_1} = m^{A_1,B_1} = m^{A_1,B} = (A_1 = 1)$

$2'$. $k = k^{A,B} = k^{A_1,B} = n^{A_1,B_1} = n^{A,B_1} = (B_1 = 1)$

$3'$. $m = m^{A,B} = m^{A,B_1} = h^{A_1,B_1} = h^{A_1,B} = (A = 1)$

$4'$. $n = n^{A,B} = n^{A_1,B} = k^{A_1,B_1} = k^{A,B_1} = (B = 1)$

Negation derselben.

$1_1'$. $h_1 = h_1^{A,B} = h_1^{A,B_1} = m_1^{A_1,B_1} = m_1^{A_1,B} = (A \neq 0)$

$2_1'$. $k_1 = k_1^{A,B} = k_1^{A_1,B} = n_1^{A_1,B_1} = n_1^{A,B_1} = (B \neq 0)$

$3_1'$. $m_1 = m_1^{A,B} = m_1^{A,B_1} = h_1^{A_1,B_1} = h_1^{A_1,B} = (A_1 \neq 0)$

$4_1'$. $n_1 = n_1^{A,B} = n_1^{A_1,B} = k_1^{A_1,B_1} = k_1^{A,B_1} = (B_1 \neq 0)$.

Beziehungen, welche nur Grundbeziehungen sind.

$5'$. $d = d^{A,B} = d^{A_1,B_1} = (AB + A_1B_1 = 1)$

$6'$. $d^{A,B_1} = d^{A_1,B} = (AB_1 + A_1B = 1)$

$7'$. $e = e^{A,B} = f^{A_1,B_1} = (A + B_1 = 1)(AB_1 \neq 0)$

$8'$. $e^{A,B_1} = f^{A_1,B} = (A + B = 1)(AB \neq 0)$

$9'$. $f^{A,B_1} = e^{A_1,B} = (A_1 + B_1 = 1)(A_1B_1 \neq 0)$

$10'$. $f = f^{A,B} = e^{A_1,B_1} = (A_1 + B = 1)(A_1B \neq 0)$

Ihre Verneinungen.

$5_1'$. $d_1 = d_1^{A,B} = d_1^{A_1,B_1} = (AB_1 + A_1B \neq 0)$

$6_1'$. $d_1^{A,B_1} = d_1^{A_1,B} = (AB + A_1B_1 \neq 0)$

$7_1'$. $e_1 = e_1^{A,B} = f_1^{A_1,B_1} = (A_1 + B = 1) + (A_1B \neq 0)$

$8_1'.\qquad e_1^{A, B_1} = f_1^{A_1, B} = (A_1 + B_1 = 1) + (A_1 B_1 \neq 0)$

$9_1'.\qquad f_1^{A, B_1} = e_1^{A_1, B} = (A + B = 1) + (AB \neq 0)$

$10_1'.\qquad f_1 = f_1^{A, B} = e_1^{A_1, B_1} = (A + B_1 = 1) + (AB_1 \neq 0).$

Beziehungen, welche zugleich Grund-, Elementar- und primitive Beziehungen sind (zusammen mit ihren Negationen die 8 Beziehungen De Morgan's).

$11'.\qquad a = a^{A, B} = c^{A, B_1} = b^{A_1, B} = l^{A_1, B_1} = (A_1 + B_1 = 1)$

$12'.\qquad c = c^{A, B} = a^{A, B_1} = b^{A_1, B_1} = l^{A_1, B} = (A_1 + B = 1)$

$13'.\qquad b = b^{A, B} = a^{A_1, B} = c^{A_1, B_1} = l^{A, B_1} = (A + B_1 = 1)$

$14'.\qquad l = l^{A, B} = a^{A_1, B_1} = c^{A_1, B} = b^{A, B_1} = (A + B = 1)$

Negationen derselben.

$11_1'.\qquad a_1 = a_1^{A, B} = c_1^{A, B_1} = b_1^{A_1, B} = l_1^{A_1, B_1} = (AB \neq 0)$

$12_1'.\qquad c_1 = c_1^{A, B} = a_1^{A, B_1} = b_1^{A_1, B_1} = l_1^{A_1, B} = (AB_1 \neq 0)$

$13_1'.\qquad b_1 = b_1^{A, B} = a_1^{A_1, B} = c_1^{A_1, B_1} = l_1^{A, B_1} = (A_1 B \neq 0)$

$14_1'.\qquad l_1 = l_1^{A, B} = a_1^{A_1, B_1} = c_1^{A_1, B} = b_1^{A, B_1} = (A_1 B_1 \neq 0)$

(Nicht-primitive, resp.) Die übrigen Beziehungen, welche zugleich Grund- und Elementarbeziehungen sind.

$15'.\qquad g = g^{A, B} = (AB \neq 0)(AB_1 \neq 0)(A_1 B \neq 0) = \alpha^{A, B} = \alpha$

$16'.\qquad g^{A, B_1} = (AB \neq 0)(AB_1 \neq 0)(A_1 B_1 \neq 0) = \alpha^{A, B_1}$

$17'.\qquad g^{A_1, B} = (AB \neq 0)(A_1 B \neq 0)(A_1 B_1 \neq 0) = \alpha^{A_1, B}$

$18'.\qquad g^{A_1, B_1} = (AB_1 \neq 0)(A_1 B \neq 0)(A_1 B_1 \neq 0) = \alpha^{A_1, B_1}$

Verneinungen derselben.

$15_1'.\quad g_1 = g_1^{A, B} = (A_1 + B_1 = 1) + (A_1 + B = 1) + (A + B_1 = 1) = \alpha_1^{A, B} = \alpha_1$

$16_1'.\qquad g_1^{A, B_1} = (A_1 + B_1 = 1) + (A_1 + B = 1) + (A + B = 1) = \alpha_1^{A, B_1}$

$17_1'.\qquad g_1^{A_1, B} = (A_1 + B_1 = 1) + (A + B_1 = 1) + (A + B = 1) = \alpha_1^{A_1, B}$

$18_1'.\qquad g_1^{A_1, B_1} = (A_1 + B = 1) + (A + B_1 = 1) + (A + B = 1) = \alpha_1^{A_1, B_1}$

Die Beziehungen, welche nur Elementarbeziehungen sind.

$19'.\qquad \beta = \beta^{A, B} = (A + B_1 = 1)(AB \neq 0)(AB_1 \neq 0)$

$20'.\qquad \beta^{A, B_1} = (A + B = 1)(AB \neq 0)(AB_1 \neq 0)$

21'. $\beta^{A_1, B} = (A_1 + B_1 = 1)(A_1 B \neq 0)(A_1 B_1 \neq 0)$

22'. $\beta^{A_1, B_1} = (A_1 + B = 1)(A_1 B \neq 0)(A_1 B_1 \neq 0)$

23'. $\gamma = \gamma^{A, B} = (A_1 + B = 1)(A B \neq 0)(A_1 B \neq 0)$

24'. $\gamma^{A, B_1} = (A_1 + B_1 = 1)(A B_1 \neq 0)(A_1 B_1 \neq 0)$

25'. $\gamma^{A_1, B} = (A + B = 1)(A B \neq 0)(A_1 B \neq 0)$

26'. $\gamma^{A_1, B_1} = (A + B_1 = 1)(A B_1 \neq 0)(A_1 B_1 \neq 0)$

27'. $\delta = \delta^{A, B} = (A B + A_1 B_1 = 1)(A B \neq 0)$

28'. $\delta^{A, B_1} = (A B_1 + A_1 B = 1)(A B_1 \neq 0)$

29'. $\delta^{A_1, B} = (A B_1 + A_1 B = 1)(A_1 B \neq 0)$

30'. $\delta^{A_1, B_1} = (A B + A_1 B_1 = 1)(A_1 B_1 \neq 0)$

Verneinungen ebendieser.

$19_1'$. $\beta_1 = \beta_1^{A, B} = (A_1 + B_1 = 1) + (A_1 + B = 1) + (A_1 B \neq 0)$

$20_1'$. $\beta_1^{A, B_1} = (A_1 + B_1 = 1) + (A_1 + B = 1) + (A_1 B_1 \neq 0)$

$21_1'$. $\beta_1^{A_1, B} = (A + B_1 = 1) + (A + B = 1) + (A B \neq 0)$

$22_1'$. $\beta_1^{A_1, B_1} = (A + B_1 = 1) + (A + B = 1) + (A B_1 \neq 0)$

$23_1'$. $\gamma_1 = \gamma_1^{A, B} = (A_1 + B_1 = 1) + (A + B_1 = 1) + (A B_1 \neq 0)$

$24_1'$. $\gamma_1^{A, B_1} = (A_1 + B = 1) + (A + B = 1) + (A B \neq 0)$

$25_1'$. $\gamma_1^{A_1, B} = (A_1 + B_1 = 1) + (A + B_1 = 1) + (A_1 B_1 \neq 0)$

$26_1'$. $\gamma_1^{A_1, B_1} = (A_1 + B = 1) + (A + B = 1) + (A_1 B \neq 0)$

$27_1'$. $\delta_1 = \delta_1^{A, B} = (A_1 + B_1 = 1) + (A B_1 + A_1 B \neq 0)$

$28_1'$. $\delta_1^{A, B_1} = (A_1 + B = 1) + (A B + A_1 B_1 \neq 0)$

$29_1'$. $\delta_1^{A_1, B} = (A + B_1 = 1) + (A B + A_1 B_1 \neq 0)$

$30_1'$. $\delta_1^{A_1, B_1} = (A + B = 1) + (A B_1 + A_1 B \neq 0)$.

Hiezu ist hervorzuheben, dass die nach A und B *unsymmetrischen* Beziehungen als paarweise auftretende wie folgt auf einander zurückkommen:

$$k^{A, B} = h^{B, A}, \quad n^{A, B} = m^{B, A}, \quad e^{A, B} = f^{B, A}, \quad b^{A, B} = c^{B, A}, \quad \beta^{A, B} = \gamma^{B, A}$$

(desgleichen, A und B vertauscht), wogegen:

$$d^{B, A} = d^{A, B}, \quad a^{B, A} = a^{A, B}, \quad l^{B, A} = l^{A, B}, \quad g^{B, A} = g^{A, B} \quad \text{oder} \quad \alpha^{B, A} = \alpha^{A, B},$$
$$\delta^{B, A} = \delta^{A, B}$$

symmetrische Beziehungen sind. Und analog auch deren Negationen.

Eine nach A und B unsymmetrische Beziehung kann indess nach A und B_1 symmetrisch sein.

Ferner mag erinnert werden, dass man, um alle Propositionen nach A und B „entwickelt" zu besitzen, nur nötig haben wird, in 1' bis 4_1' die folgenden Symbole durch die ihnen gleichgesetzten zu ersetzen:

$$A_1 = A_1 B + A_1 B_1, \quad B_1 = AB_1 + A_1 B_1, \quad A = AB + AB_1, \quad B = AB + A_1 B,$$

desgleichen in 7' bis 10', 7_1' bis 14', 15_1' bis 26' und 19_1' bis 30_1' die folgenden Ausdrücke:

$$A_1 + B_1 = AB_1 + A_1 B + A_1 B_1, \quad A_1 + B = AB + A_1 B + A_1 B_1,$$
$$A + B_1 = AB + AB_1 + A_1 B_1, \quad A + B = AB + AB_1 + A_1 B. \text{ —}$$

Mit vorstehenden 30 Paaren von Beziehungen, sind diejenigen erschöpft, welche man im Hinblick auf ihre unmittelbar intuitive Anschaulichkeit als die *„fundamentalen"* Beziehungen bezeichnen mag.

Die 8 ersten von ihnen: 1' .. 4_1' sind freilich nicht als eigentliche Beziehungen (Relationen *zwischen* A und B) zu bezeichnen, indem sie augenscheinlich je nur über *eines* dieser beiden Symbole für sich etwas aussagen oder eine Information geben. Nach einem Vorgang aus der Lehre von den höheren algebraischen Kurven und Gleichungen müssten sie, als Beziehungen aufgefasst, *„zerfallende"* genannt, unter diese eingerechnet werden. „Zerfallend" haben wir S. 158 eine Beziehung zwischen A und B genannt, wenn sie (additiv oder) multiplikativ (oder irgendwie) zerlegbar ist (nach den Gesetzen des Aussagenkalkuls) in lauter solche Teilaussagen, deren jede nur von einem dieser beiden Symbole handelt ohne Erwähnung des andern — Beispiele:

$$(A = 1)(B \neq 0), \qquad (A = 1) + (B \neq 0), \qquad (A = 1)(B \neq 0) + (A = 0).$$

Die oben vorliegenden Hülfsbeziehungen zerfallen nun, wenn man will, in eine Aussage, die nur das eine der beiden Symbole — z. B. A — betrifft, von diesem aber wirklich etwas aussagt, und eine Aussage, das andre Symbol — dann B — betreffend, die über dieses aber vollkommen nichtssagend, eine leere Aussage ist — wie es z. B. die Angabe, dass $0 \cdot B = 0$ ist, sein würde. Solche Angabe kann man sich zu der andern jederzeit als Faktor hinzugefügt denken; am besten wird man sie unterdrücken. — Übrigens können auch die Hülfsbeziehungen formell als solche, als scheinbar wirkliche Beziehungen angesetzt werden, indem man z. B. nach oben gegebener Andeutung „entwickelnd" schreibt:

$$h = (A_1 B + A_1 B_1 = 1), \quad \text{etc.}$$

Die erwähnte Analogie von gewissen Beziehungen mit den zerfallenden („degenerate") Kurven oder reduziblen algebraischen Gleichungen hat bei einer andern Gelegenheit auch Herr Peirce [8] p. 180 bemerkt.

Unsre 60 Propositionen (unter denen ihre Negationen eingerechnet sind) erweisen sich als von 14erlei Art, wenn wir zu *einer* „*Art*" immer diejenigen Propositionen zählen, welche durch blosse Vertauschungen unter den Buchstaben A, B, A_1, B_1 aufeinander zurückführbar wären. Und zwar werden die 7 positiven von diesen 14 Arten konstituirt durch die Systeme der Propositionen:

$$1'..4',\ 5'..6',\ 7'..10',\ 11'..14',\ 15'..18',\ 19'..26',\ 27'..30',$$

und analog — den Negationstrich beigesetzt — die 7 negativen.

Als typische Repräsentanten für diese Arten fundamentaler Beziehungen können die folgenden Symbole dienen:

h (oder k, m, n); d; (e oder) f; (a oder) c (oder b, l); g resp. α; γ (oder β); δ

nebst ihren Negationen. Auch genügen die hervorgehobenen, wenn mit geeignetem Gebietepaar als Exponenten versehen, zur Darstellung aller einschlägigen Beziehungen. Den sechs letzteren entsprechen die Beziehungszeichen:

$$=,\ \subset,\ \in\!\!\!=,\ \between,\ \mathring{\subset},\ \mathring{=},$$

wo für das Subsumtionszeichen — bei Bevorzugung von a anstatt c als Repräsentanten auch $\subseteq\!\!\!\supseteq$ zu nehmen gestattet. —

Als „*einfache*" Beziehungen im Sinne des § 40, nämlich als aus den 8 De Morgan'schen 11' bis $14_1'$ in Gestalt von lediglich multiplikativen Kombinationen (oder „monomisch") zusammengesetzte, sind von den 75 überhaupt möglichen vorstehend nur die 34 folgenden vertreten:

$$1'..4',\ 5'..10',\ 11'..14',\ 11_1'..14_1',\ 15'..18',\ 19'..30'. —$$

Nunmehr ist es keine Kunst, sich unsre 60 fundamentalen Propositionen wie in den Buchstaben A, B, so auch in denen B, C hinzuschreiben.

Kombinirte man jede der 60 Propositionen in A, B mit der ihr gleichnummerigen und jeder folgenden in B, C multiplikativ zu einer Simultanaussage — indem man Sorge trägt, je zwei simultane Gleichungen in eine einzige solche als Boole'schen Bestandteil des Prämissensystems zu vereinigen gemäss dem Schema

$$(a = 1)(b = 1) = (ab = 1),$$

dies Produkt ab jeweils nach dem Eliminanden B entwickelnd — so ergäben sich die $\frac{60 \times 61}{2} = 1830$ Prämissen(systeme), welche bei der

zuletzt angedeuteten Erweiterung der Syllogistik auf ihre vom „Mittelgliede“ B unabhängige Konklusion zu untersuchen wären (durch Vertauschung von B und B_1 jedoch noch um nahe die Hälfte vermindert werden könnten).

Ein reiner Syllogismus läge vor, so oft die Konklusion sich wieder als eine Fundamentalbeziehung zwischen A und C darstellt.

Kein Schluss wäre zulässig, sooft die Konklusion auf $(1=1)(1\neq 0)$ hinausliefe. Und widersprechend, inkompatibel würden die Prämissen zu nennen sein, falls $(0=1)$ oder $(0\neq 0)$ als Faktor in der „ganzen“ Konklusion aufträte (wogegen „andernfalles“ blos einzelne Glieder der letztern zu unterdrücken sein würden).

Die Konklusion ergibt sich allemal zunächst als *Resultante aus dem Rohen* mit der grössten Leichtigkeit und rein mechanisch durch Elimination von B nach der Regel φ) des § 41 — S. 212.

Diese Resultante aus dem Rohen ist zugleich schon die volle Resultante und bedarf keiner „Klausel“ mehr zu ihrer Ergänzung, in allen den Fällen, wo in der Prämisse selbst, resp. in den Gliedern ihrer vereinigten Aussage, nirgends mehr als *eine* Ungleichung auf einmal als Faktor auftritt.

Eine Klausel *kann* nur erforderlich werden (als Zusatzfaktor zum entsprechenden Glied der rohen Resultante) da, wo in einem Glied der Prämissenaussage zwei oder mehrere *Ungleichungen* in das Produkt eingehen. Jedoch wie die Untersuchungen des nächsten Paragraphen darthun, wird eine Klausel in solchem Falle auch dann *nicht* erforderlich, wenn die zusammentretenden Ungleichung-Faktoren den Eliminanden B durchweg in der gleichen Weise enthalten, nämlich entweder nur unnegirt, als $B, B, B, \ldots$ oder nur negirt als $B_1, B_1, \ldots$

Unerlässlich wird in der Regel eine gewisse Klausel erst da, wo Ungleichungen, die B als solches enthalten, zusammentreten mit solchen Ungleichungen, in denen B_1 explicite vorkommt.

Wie aus dem Anblick von 15' bis 18' erhellt, können bis zu sechs Ungleichungen in unsern Prämissensystemen zusammentreten, und sind in Hinsicht der Klausel diejenigen Prämissensysteme am ungünstigsten gestellt (sofern deren Ermittelung eben nicht leicht erscheint), welche Annahmen vom Typus g oder α enthalten.

Obwol die Theorie noch nicht so weit entwickelt ist, um für eine so grosse Menge von teilweise heterogenen Ungleichungsfaktoren schon systematisch die Klausel mit Zuverlässigkeit als eine vollständige aufstellen zu können, gelingt indess ihre Ermittelung doch bei den vorliegenden Problemen nicht allzuschwer vermittelst des gemeinen

Verstandes zufolge des günstigen besonderen Umstandes, dass in unsern Ungleichungen als Koeffizienten von B oder B_1 nur A, A_1, C, C_1 auftreten werden, sonach nur zweierlei von einander unabhängig beliebige Gebietsymbole in Betracht zu ziehen sind.

Man sieht: welche Fülle von Aufgaben zur Bethätigung des Anfängers, die einzeln schon nicht ohne Reiz sein werden und in ihrer Gesamtheit für die Erkenntnisslehre von Belang sein müssen!

Auch dieses Feld von nahe tausend Untersuchungen, welches sich somit aus der erwähnten Überviertel-Milliarde möglicher hevorhebt, ist uns hier noch allzu ausgedehnt.

Behufs fernerer Einschränkung desselben wollen wir einerseits die 8 Pseudorelationen oder Hülfsbeziehungen als minderen Interesses beiseite lassen, und andrerseits (sofern sie nicht vom Typus a, mithin zugleich auch Grundbeziehungen sind) die Negationen der Elementarbeziehungen. *Die Verneinungen der Elementarbeziehungen sind* selber *keine Elementarbeziehungen*, sie bieten also auch nicht das Interesse von diesen dar.

(Verneinte Grundbeziehungen dagegen, wie Ungleichung und Unsubsumtion wird man besser den Grundbeziehungen zuzählen.)

Auf diese Weise wird von unsrer Tafel der Anfang 1' bis 4_1' und das Ende 19_1' bis 30_1' weggeschnitten; es fallen 28 Propositionen ausser Betracht und beschränkt sich unser Untersuchungsfeld auf die 32 dazwischenliegenden Propositionen 5' bis 30', das ist auf wenig mehr als die Hälfte von den ursprünglichen 60.

Von den verbleibenden beiden Hauptabteilungen der Grundbeziehungen (mit der Unterabteilung der De Morgan'schen) und der (unverneinten) Elementarbeziehungen hat es auch wieder mehr Interesse, nur diejenigen jeweils als Prämissen zu kombiniren, die zur selben Abteilung gehören — damit allfällig zutage trete, welches Angesicht die Syllogistik zeigen würde für ein Denken, das sich konsequent nur in dem Rahmen dieser einen Sorte von Beziehungen bewegte. Und somit sind unsre Aufgaben uns auf das klarste vorgezeichnet.

Als die leichteste wollen wir zuerst die

Syllogistik der De Morgan'schen Relationen

erledigen. Hier sind etwa $\frac{8 \times 9}{2} = 36$ Prämissenpaare durchzugehen, die wir durch multiplikatives Nebeneinanderstellen ihrer Nummern andeuten. Die erste Aussage aber ist allemal in A, B, die zweite in B, C angesetzt zu denken, was wir der Druckersparniss wegen nicht ausdrücklich markiren. Die Konklusion folgt hinter dem freien Subsumtionszeichen.

$11' \cdot 11' = (A_1 + B_1 = 1)(B_1 + C_1 = 1) = (A_1 C_1 B + B_1 = 1) ⋹ (1 = 1) = \mathbf{i}.$

$11' \cdot 12' = (A_1 + B_1 = 1)(B_1 + C = 1) = (A_1 C B + B_1 = 1) ⋹ (1 = 1) = \mathbf{i}.$

$11' \cdot 13' = (A_1 + B_1 = 1)(B + C_1 = 1) = (A_1 B + C_1 B_1 = 1) ⋹ (A_1 + C_1 = 1) = a^{A,C},$

Camestres, Calemes, desgleichen in C, A angesetzt: Celarent und Cesare.

$11' \cdot 14' = (A_1 + B_1 = 1)(B + C = 1) = (A_1 B + C B_1 = 1) ⋹ (A_1 + C = 1) = c^{A,C}.$

$11' \cdot 11_1' = (A_1 + B_1 = 1)(BC \neq 0) = (A_1 B + B_1 = 1)(CB \neq 0) ⋹$

$⋹ (CA_1 \neq 0) = b_1^{A,C},$

in C, A angesetzt: Ferio, Festino, Ferison, Fresison.

$11' \cdot 12_1' = (A_1 + B_1 = 1)(BC_1 \neq 0) = (A_1 B + B_1 = 1)(C_1 B \neq 0) ⋹$

$⋹ (C_1 A_1 \neq 0) = l_1^{A,C}.$

$11' \cdot 13_1' = (A_1 + B_1 = 1)(B_1 C \neq 0) = (A_1 B + B_1 = 1)(CB_1 \neq 0) ⋹ (C \neq 0).$

$11' \cdot 14_1' = (A_1 + B_1 = 1)(B_1 C_1 \neq 0) = (A_1 B + B_1 = 1)(C_1 B_1 \neq 0) ⋹ (C_1 \neq 0).$

$12' \cdot 12' = (A_1 + B = 1)(B_1 + C = 1) = (CB + A_1 B_1 = 1) ⋹ (C + A_1 = 1) = c^{A,C},$

Barbara.

$12' \cdot 13' = (A_1 + B = 1)(B + C_1 = 1) = (B + A_1 C_1 B_1 = 1) ⋹ (1 = 1) = \mathbf{i}.$

$12' \cdot 14' = (A_1 + B = 1)(B + C = 1) = (B + A_1 C B_1 = 1) ⋹ (1 = 1) = \mathbf{i}.$

$12' \cdot 11_1' = (A_1 + B = 1)(BC \neq 0) = (B + A_1 B_1 = 1)(CB \neq 0) ⋹ (C \neq 0).$

$12' \cdot 12_1' = (A_1 + B = 1)(BC_1 \neq 0) = (B + A_1 B_1 = 1)(C_1 B \neq 0) ⋹ (C_1 \neq 0).$

$12' \cdot 13_1' = (A_1 + B = 1)(B_1 C \neq 0) = (B + A_1 B_1 = 1)(CB_1 \neq 0) ⋹$

$⋹ (CA_1 \neq 0) = b_1^{A,C},$

in C, A angesetzt: Baroco.

$12' \cdot 14_1' = (A_1 + B = 1)(B_1 C_1 \neq 0) = (B + A_1 B_1 = 1)(C_1 B_1 \neq 0) ⋹$

$⋹ (C_1 A_1 \neq 0) = l_1^{A,C}.$

$13' \cdot 13' = (A + B_1 = 1)(B + C_1 = 1) = (AB + C_1 B_1 = 1) ⋹ (A + C_1 = 1) = b^{A,C},$

in C, A: Barbara.

$13' \cdot 14' = (A + B_1 = 1)(B + C = 1) = (AB + CB_1 = 1) ⋹ (A + C = 1) = l^{A,C}.$

$13' \cdot 11_1' = (A + B_1 = 1)(BC \neq 0) = (AB + B_1 = 1)(CB \neq 0) ⋹$

$⋹ (CA \neq 0) = a_1^{A,C},$

Disamis, Dimatis, desgleichen in C, A: Darii und Datisi.

$13' \cdot 12_1' = (A + B_1 = 1)(B C_1 \neq 0) = (AB + B_1 = 1)(C_1 B \neq 0) \mathrel{\underline{\in}}$

$\mathrel{\underline{\in}} (C_1 A \neq 0) = c_1^{A,C}$,

Bocardo.

$13' \cdot 13_1' = (A + B_1 = 1)(B_1 C \neq 0) = (AB + B_1 = 1)(C B_1 \neq 0) \mathrel{\underline{\in}} (C \neq 0)$.

$13' \cdot 14_1' = (A + B_1 = 1)(B_1 C_1 \neq 0) = (AB + B_1 = 1)(C_1 B_1 \neq 0) \mathrel{\underline{\in}} (C_1 \neq 0)$.

$14' \cdot 14' = (A + B = 1)(B + C = 1) = (B + ACB_1 = 1) \mathrel{\underline{\in}} (1 = 1) = 1$.

$14' \cdot 11_1' = (A + B = 1)(BC \neq 0) = (B + AB_1 = 1)(CB \neq 0) \mathrel{\underline{\in}} (C \neq 0)$.

$14' \cdot 12_1' = (A + B = 1)(BC_1 \neq 0) = (B + AB_1 = 1)(C_1 B \neq 0) \mathrel{\underline{\in}} (C_1 \neq 0)$.

$14' \cdot 13_1' = (A + B = 1)(B_1 C \neq 0) = (B + AB_1 = 1)(CB_1 \neq 0) \mathrel{\underline{\in}}$

$\mathrel{\underline{\in}} (CA \neq 0) = a_1^{A,C}$.

$14' \cdot 14_1' = (A + B = 1)(B_1 C_1 \neq 0) = (B + AB_1 = 1)(C_1 B_1 \neq 0) \mathrel{\underline{\in}}$

$\mathrel{\underline{\in}} (C_1 A \neq 0) = c_1^{A,C}$.

$11_1' \cdot 11_1' = (AB \neq 0)(CB \neq 0) \mathrel{\underline{\in}} (A \neq 0)(C \neq 0)$.

$11_1' \cdot 12_1' = (AB \neq 0)(C_1 B \neq 0) \mathrel{\underline{\in}} (A \neq 0)(C_1 \neq 0)$.

$11_1' \cdot 13_1' = (AB \neq 0)(CB_1 \neq 0) \mathrel{\underline{\in}} (A \neq 0)(C \neq 0)\, x$,

wo x fordert, dass A und C nicht dasselbe Individuum sein dürfen.

$11_1' \cdot 14_1' = (AB \neq 0)(C_1 B_1 \neq 0) \mathrel{\underline{\in}} (A \neq 0)(C_1 \neq 0)\, x$

wo x verlangt, dass A und C_1 nicht das nämliche Individuum seien.

$12_1' \cdot 12_1' = (AB_1 \neq 0)(C_1 B \neq 0) \mathrel{\underline{\in}} (A \neq 0)(C_1 \neq 0)\, x$

wo x desgleichen.

$12_1' \cdot 13_1' = (AB_1 \neq 0)(CB_1 \neq 0) \mathrel{\underline{\in}} (A \neq 0)(C \neq 0)$.

$12_1' \cdot 14_1' = (AB_1 \neq 0)(C_1 B_1 \neq 0) \mathrel{\underline{\in}} (A \neq 0)(C_1 \neq 0)$.

$13_1' \cdot 13_1' = (A_1 B \neq 0)(CB_1 \neq 0) \mathrel{\underline{\in}} (A_1 \neq 0)(C \neq 0)\, x$,

wo x verlangt, dass A_1 und C nicht einerlei Individuum seien.

$13_1' \cdot 14_1' = (A_1 B \neq 0)(C_1 B_1 \neq 0) \mathrel{\underline{\in}} (A_1 \neq 0)(C_1 \neq 0)\, x$

wo kraft x jetzt A_1 und C_1 nicht einunddasselbe Individuum sein dürfen.

$14_1' \cdot 14_1' = (A_1 B_1 \neq 0)(C_1 B_1 \neq 0) \mathrel{\underline{\in}} (A_1 \neq 0)(C_1 \neq 0)$. —

Das ganze Tableau ist nicht symmetrisch in Bezug auf A und C, auch nicht in Bezug auf die Konklusionen von einerlei Typus; es kommt z. B. $c^{A,C}$ einmal öfter als Konklusion vor, als die übrigen Relationen vom gleichen Typus. Die mangelnden Symmetrieen würde das

Tableau obiger 36 Schlüsse aber erlangen, wenn man ihm noch diejenigen hinzufügte, welche sich durch Vertauschung von A und C in den nicht ohnehin bezüglich beider symmetrischen der angegebenen Schemata ergeben. Das so ergänzte Tableau von $8 \times 8 = 64$ Schlussfolgerungen würde die *„erweiterte Syllogistik“* im engeren Sinne repräsentiren.

In der That enthalten aber auch schon die angegebenen 36 Schemata alle 15 gültigen Modi der verbalen Logik wenigstens der Art nach unter sich — wir haben sie durch Beifügung ihrer Namen aus § 43 kenntlich gemacht — und ausserdem enthalten sie *noch mehr*.

Sie enthalten zunächst auch solche vollgültige Syllogismen, in welche als Prämisse eingeht oder wo als Konklusion resultirt eine Aussage von der Form 14' oder 14_1' der l oder l_1-Sorte.

Dergleichen Urteile, wie $A + B = 1$ oder, was dasselbe sagt: $A_1 B_1 = 0$, und ferner $A_1 B_1 \neq 0$, konnte die Wortsprache nicht in Berücksichtigung ziehen, da sie in Gestalt der Aussagen:

„Alle Nicht-A sind B“ oder „Kein Nicht-A ist nicht B“

resp. „Einige Nicht-A sind nicht B“ (oder auch A und B vertauscht) sich ja genötigt gesehen hätte, die Verneinung auch beim Subjekte zuzulassen. Und auf der andern Seite passten doch die korrekten Formen der Aussage:

„Alles ist A oder B“ oder „Nichts ist weder A noch B“

resp. „Etwas (Einiges) ist weder A noch B“, „Es gibt Dinge, die weder A noch B sind“ nicht in den Rahmen der gebräuchlichen Urteilsschablone.

Nur die bis jetzt angeführten Schlüsse, wo die Konklusion auf eines der Symbole a, c, b, l (oder Negation davon) hinausläuft, sind hier als reine Syllogismen zu bezeichnen, in Anbetracht, dass nur in ihnen auch die Konklusion wieder eine De Morgan'sche Relation zwischen A und C ist.

Im ganzen kommen *sechs*erlei Arten von Schlüssen und ebensoviele Formen der Konklusion vor, falls wir den Fall des nichtssagenden Schlusses, wo eigentlich gar kein Schluss sich ziehen lässt, miteinrechnen. Bei diesen ist die Konklusion von einer der folgenden Formen:

$$1=1,\quad C\neq 0,\quad A+C=1,\quad AC\neq 0,\quad (A\neq 0)(C\neq 0)\ \text{und}\ (A\neq 0)(C\neq 0)x,$$

oder auch irgendwelches Gebietsymbol durch seine Negation ersetzt.

Die erste Art beiseite zu lassen ist man berechtigt. Im übrigen berücksichtigt die verbale Logik nur Schlüsse der dritten und vierten Art, diese aber wie wir gesehen haben nicht vollzählig, die von ihr

berücksichtigten dafür meistens in umschreibenden Wiederholungen aufführend.

Überraschen wird es, dass nur bei so wenig Prämissenkombinationen *kein* Schluss zulässig ist — von unsern 36 Fällen nur in fünfen. Dass für die andern Fälle Schlüsse ziehbar und wie sie beschaffen sind, hat die verbale Logik übersehen, was ihr wenigstens so weit zur Last fällt, als sich deren Prämissen noch schablonenmässig in Worte fassen liessen.

Beispielsweise (bei $12_1' \cdot 12_1'$) aus den Prämissen:

„Einige A sind nicht B“ und „einige B sind nicht C“

folgt keineswegs *nichts* — ohne Rücksicht auf B; vielmehr lässt in Bezug auf A und C sich vollgültig schliessen:

Erstens: es gibt A; zweitens: es gibt Dinge die nicht C sind; drittens: alles, was A ist und alles was nicht C ist kann unmöglich blos aus *einem und demselben* Individuum bestehen.

Reichlich wird durch unsre Ergebnisse illustrirt und exemplifizirt, *dass die beiden Regeln der traditionellen Logik:*

„Ex mere particularibus nil sequitur“, sowie

„Ex mere negativis nil sequitur“ —

vergl. z. B. Ueberweg[1], Inhaltsverzeichniss — vor dem Richterstuhl der exakten Logik *für falsch zu erklären sind!*

Vorstehend hatten wir vollberechtigte Konklusionen sogar aus Prämissen, die beides: partikular und verneinend zugleich sind! Und wie unsre dritte Konklusion zeigt, lässt sich die traditionell behauptete Regel, dass aus solchen Prämissen *nichts* folge, selbst dann nicht aufrecht erhalten, wenn man mit Voigt[1] p. 32 dieselbe dahin auslegt: dass die Konklusion aus dergleichen Prämissen nicht mehr besage, als was schon direkt aus den einzelnen Urteilen zu entnehmen ist. Stimmt dies auch in der That hier für die beiden ersten von unsern Konklusionen, so stimmt es doch augenscheinlich nicht für die dritte, wird es bei einer „Klausel“ doch niemals zutreffen!

Man möge Konklusionen von der Form eines bejahenden oder verneinenden Existenzialurteils, wie sie hier mit in Berücksichtigung gezogen werden, doch ja nicht geringschätzen! Eine Aussage, wie $C \neq 0$ (d. h. es gibt Dinge, die C sind, es gibt C) scheint allerdings auf den ersten Blick herzlich wenig Information über die Klasse der C in sich zu bergen.

Jedoch wenn wir uns C zum Beispiel als Produkt zweier andern Klassen D und E gegeben denken, wenn wir einmal $C = DE$ annehmen, so wird jene Aussage in Gestalt von $DE \neq 0$ auf das partikular bejahende Urteil hinauskommen: „einige D sind E“, wogegen ihre Verneinung: $C = 0$, als $D \subset E_1$ in Worte gefasst, das universal verneinende Urteil gäbe: kein D ist E. Um die Geltung oder Nichtgeltung derartiger Urteile dreht sich ja



aber fast die gesamte formale Logik, und was in dieser Disziplin für Produkte DE vom höchsten Belang erscheint, das muss auch für die ursprünglichen Klassen A oder C (die in jedem Anwendungsfalle solche Produkte werden, in Form derselben auftreten könnten) als wichtig anerkannt werden. Es hiesse in der That die ganze formale Logik und *alle* ihre Schlüsse gering achten, wollte man solcher Relation keine Bedeutung beimessen!

Endlich aber müssen wir auch um seiner selbst willen lernen, die Schlüsse, die sich ziehen lassen, in jedem denkbaren Falle vollständig zu ziehen, ganz unbekümmert um den mutmasslichen Wert oder Unwert dieser Schlüsse — dessen Mutmassung doch a priori jedes verlässlichen Anhaltes ohnehin entbehren dürfte.

„Abgeschwächte Formen" des Schlusses können nur in den zehn letzten Fällen des Tableau's gebildet werden. Sie würden entstehen, wenn man von den zwei oder drei Aussagenfaktoren der Konklusion einen oder zweie unterdrückte — so beispielsweise beim Fortlassen der Klausel $\varkappa$. Es kann füglich unsre „Resultante aus dem Rohen" da, wo sie nicht auch die volle ist, schon eine abgeschwächte Form der vollen Konklusion genannt werden; desgleichen ist Herrn Mitchell's Resultante als eine sehr stark abgeschwächte Konklusion zu bezeichnen. —

Unverträgliche Prämissen kommen in vorstehender Syllogistik der De Morgan'schen Urteilsformen nicht vor.

Um nun auch die Gergonne'sche Idee zu prüfen, haben wir die $4 \times 5 = 20$ Elementarbeziehungen:

$$11' \cdot\cdot 14',\ 15' \cdot\cdot 18',\ 19' \cdot\cdot 30'$$

in ähnlicher Weise unter sich zu kombiniren, was für die ersten vier derselben bereits im obigen Tableau geschehen ist. Wir werden davon die Ergebnisse $\left(\frac{4 \times 5}{2} = 10 \text{ an der Zahl}\right)$ gelegentlich zu wiederholen haben. Im Ganzen sind $\frac{20 \times 21}{2} = 210$ Kombinationen durchzugehen.

Um deren Konklusionen mit möglichster Druckersparniss anzugeben, empfiehlt es sich, nach diesen zu ordnen. Es treten solche von 24 verschiedenen Formen auf, welche also nicht durch blosse Buchstabenvertauschung, wie z. B. Verwandlung eines Klassensymbols in seine Negation, sich auf einander zurückführen lassen. Für jede Sorte wollen wir am Schlusse im Kontext ein Paradigma vorrechnen.

Behufs konzisester Darstellung der Konklusionen führen wir für die bei ihnen auftretenden *Klauseln* folgende Abkürzungen ein. Es bedeute:

$\varkappa$ die Forderung, dass C nicht singulär, nicht *ein* Individuum sei
$\varkappa'$ „ „ „ C_1 „ „ „ „ „ „
λ „ „ „ A „ „ „ „ „ „
λ' „ „ „ A_1 „ „ „ „ „ „
μ „ „ „ A und C nicht einunddasselbe Individuum seien
ν „ „ „ A „ C_1 „ „ „ „
ϱ „ „ „ A_1 „ C „ „ „ „
σ „ „ „ A_1 „ C_1 „ „ „ „

Alsdann wird zu beachten sein, dass

$$\varkappa\mu = \varkappa,\ \varkappa\varrho = \varkappa,\ \lambda\mu = \lambda,\ \lambda\nu = \lambda,\ \varkappa'\nu = \varkappa',\ \varkappa'\sigma = \varkappa',\ \lambda'\varrho = \lambda',\ \lambda'\sigma = \lambda'.$$

Denn wenn z. B. C nicht ein Individuum sein darf, so versteht sich ohnehin, dass C und A, sowie dass C und A_1 nicht einunddasselbe Individuum werden sein dürfen; etc.

Darnach gewinnt nun die

Syllogistik der Gergonne'schen Elementarbeziehungen

das folgende Ansehen.

Unzulässig, inkonsistent, einander widersprechend sind die Prämissen in gar keinem Falle. Niemals also wird als Konklusion die Nullaussage, 0, hinzustellen sein.

Kein Schluss ist zulässig, m. a. W. die Konklusion 1 resultirt nur in folgenden 5 Fällen, welche sich schon in der Syllogistik der De Morgan'schen Relationen aufgezählt fanden:

11'·11', 11'·12', 12'·13', 12'·14', 14'·14'.

In allen andern 205 Fällen lässt ein gültiger Schluss sich ziehen.

Dieser Schluss ist selbst wieder (als zwischen A und C bestehend) eine Gergonne'sche Elementarbeziehung und liegt mithin ein *reiner* Syllogismus in dieser Syllogistik vor bei 60 Fällen, welche, da β und γ vom selben Typus sind, von viererlei Form erscheinen. Es resultirt nämlich die Konklusion:

$(A_1+C_1=1)=a^{A,C}$ aus 11'·13'; $(A_1+C=1)=a^{A,C_1}$ aus 11'·14' und 12'·12';

$(A+C_1=1)=a^{A_1,C}$ aus 13'·13'; $(A+C=1)=a^{A_1,C_1}$ aus 13'·14';

$(AC\neq 0)(AC_1\neq 0)(A_1C\neq 0)=\alpha^{A,C}$ aus 15'·27', 16'·29';

$(AC\neq 0)(AC_1\neq 0)(A_1C_1\neq 0)=\alpha^{A,C_1}$ aus 15'·28', 16'·30';

$(AC\neq 0)(A_1C\neq 0)(A_1C_1\neq 0)=\alpha^{A_1,C}$ aus 17'·27', 18'·29';

$(AC_1\neq 0)(A_1C\neq 0)(A_1C_1\neq 0)=\alpha^{A_1,C_1}$ aus 17'·28', 18'·30';

$(A+C_1=1)(AC\neq 0)(AC_1\neq 0)=\beta^{A,C}$ aus

13'·19', 14'·21', 19'·19', 19'·27', 19'·30', 20'·21', 20'·28', 20'·29';

$(A+C=1)(AC\neq 0)(AC_1\neq 0)=\beta^{A,C_1}$ aus

13'·20', 14'·22', 19'·20', 19'·28', 19'·29', 20'·22', 20'·27', 20'·30';

$(A_1+C_1=1)(A_1C\neq 0)(A_1C_1\neq 0)=\beta^{A_1,C}$ aus

11'·19', 12'·21', 21'·27', 21'·30', 22'·28', 22'·29';

$(A_1+C=1)(A_1C\neq 0)(A_1C_1\neq 0)=\beta^{A_1,C_1}$ aus

11'·20', 12'·22', 21'·28', 21'·29', 22'·22', 22'·27', 22'·30';

$(A_1+C=1)(AC\neq 0)(A_1C\neq 0)=\gamma^{A,C}$ aus 23'·27', 24'·29', 23'·23', 24'·25';

$(A_1+C_1=1)(AC_1\neq 0)(A_1C_1\neq 0)=\gamma^{A,C_1}$ aus 23'·28', 24'·30', 23'·24', 24'·26';

$(A+C=1)(AC\neq 0)(A_1C\neq 0)=\gamma^{A_1,C}$ aus 25'·27', 26'·29';

$(A+C_1=1)(AC_1\neq 0)(A_1C_1\neq 0)=\gamma^{A_1,C_1}$ aus 25'·28', 26'·30', 26'·26';

$(AC+A_1C_1=1)(AC\neq 0)=\delta^{A,C}$ aus 27'·27', 28'·29';

$(AC_1+A_1C=1)(AC_1\neq 0)=\delta^{A,C_1}$ aus 27'·28', 28'·30';

$(AC+A_1C_1=1)(A_1C_1\neq 0)=\delta^{A_1,C_1}$ aus 30'·30'.

Bei den 145 übrigen Kombinationen haben wir folgende Schlüsse. Die (wenig sagende) Konklusion

$$(C\neq 0)(C_1\neq 0)$$

folgt aus:

11'·21', 11'·22', 12'·19', 12'·20', 13'·21', 13'·22', 14'·20'.

Nennen wir den mehrfach auftretenden Bestandteil einer Konklusion:

$$(A\neq 0)(A_1\neq 0)(C\neq 0)(C_1\neq 0)$$

für den Augenblick zur Abkürzung: P, so fliesst die Konklusion:

$P\varkappa\lambda$ aus 15'·15', 16·17'; $P\varkappa'\lambda$ aus 15'·16', 16'·18';

$P\varkappa'\lambda'$ aus 18'·18';

$P\varkappa\lambda\sigma$ aus 15'·17'; $P\varkappa\lambda'\nu$ aus 17'·17';

$P\varkappa'\lambda\varrho$ aus 15'·18', 16'·16'; $P\varkappa'\lambda'\mu$ aus 17'·18'.

Ferner fliesst die Konklusion

$(AC_1\neq 0)(C\neq 0)$ aus 14'·19'; $(A_1C\neq 0)(C_1\neq 0)$ aus 11'·17';

$(A_1C_1\neq 0)(C\neq 0)$ aus 11'·18';

$(AC\neq 0)\varkappa$ aus 14'·25', 13'·23'; $(AC_1\neq 0)\varkappa'$ aus 14'·26', 13'·24';

$(A_1C \neq 0)\varkappa$ aus $11'\cdot 23'$, $12'\cdot 25'$; $(A_1C_1 \neq 0)\varkappa'$ aus $11'\cdot 24'$, $12'\cdot 26'$;
$(AC \neq 0)\varkappa\lambda$ aus $19'\cdot 23'$, $20'\cdot 25'$; $(AC_1 \neq 0)\varkappa'\lambda$ aus $19'\cdot 24'$, $20'\cdot 26'$;
$(A_1C \neq 0)\varkappa\lambda'$ aus $21'\cdot 23'$, $22'\cdot 25'$; $(A_1C_1 \neq 0)\varkappa'\lambda'$ aus $21'\cdot 24'$, $22'\cdot 26'$;
$(AC \neq 0)(A_1 \neq 0)\varkappa$ aus $25'\cdot 25'$; $(AC \neq 0)(C_1 \neq 0)\varkappa$ aus $13'\cdot 17'$, $14'\cdot 15'$;
$(AC \neq 0)(C_1 \neq 0)\lambda$ aus $19'\cdot 22'$, $20'\cdot 20'$;
$(AC_1 \neq 0)(A_1 \neq 0)\varkappa'$ aus $25'\cdot 26'$; $(AC_1 \neq 0)(C \neq 0)\varkappa'$ aus $13'\cdot 18'$, $14'\cdot 16'$;
$(AC_1 \neq 0)(C \neq 0)\lambda$ aus $19'\cdot 21'$;
$(A_1C \neq 0)(A \neq 0)\varkappa$ aus $23'\cdot 25'$; $(A_1C \neq 0)(C_1 \neq 0)\varkappa$ aus $12'\cdot 15'$;
$(A_1C \neq 0)(C_1 \neq 0)\lambda'$ aus $21'\cdot 22'$;
$(A_1C_1 \neq 0)(A \neq 0)\varkappa'$ aus $23'\cdot 26'$, $24'\cdot 24'$; $(A_1C_1 \neq 0)(C \neq 0)\varkappa'$ aus $12'\cdot 16'$;
$(A_1C_1 \neq 0)(C \neq 0)\lambda'$ aus $21'\cdot 21'$;
$(AC \neq 0)(A_1 \neq 0)(C_1 \neq 0)\lambda$ aus $15'\cdot 20'$, $16'\cdot 22'$;
$(AC_1 \neq 0)(A_1 \neq 0)(C \neq 0)\lambda$ aus $15'\cdot 19'$, $16'\cdot 21'$;
$(A_1C \neq 0)(A \neq 0)(C_1 \neq 0)\lambda'$ aus $17'\cdot 20'$, $18'\cdot 22'$;
$(A_1C_1 \neq 0)(A \neq 0)(C \neq 0)\lambda'$ aus $17'\cdot 19'$, $18'\cdot 21'$;
$(AC \neq 0)(A_1 \neq 0)\varkappa\lambda$ aus $15'\cdot 25'$, $16'\cdot 23'$;
$(AC_1 \neq 0)(A_1 \neq 0)\varkappa'\lambda$ aus $15'\cdot 26'$, $16'\cdot 24'$;
$(A_1C \neq 0)(A \neq 0)\varkappa\lambda'$ aus $17'\cdot 25'$, $18'\cdot 23'$;
$(A_1C_1 \neq 0)(A \neq 0)\varkappa'\lambda'$ aus $17'\cdot 26'$, $18'\cdot 24'$;

$(AC \neq 0)(AC_1 \neq 0)\varkappa$ aus $13'\cdot 15'$, $14'\cdot 17'$;
$(AC \neq 0)(A_1C \neq 0)\lambda$ aus $15'\cdot 23'$, $16'\cdot 25'$;
$(AC \neq 0)(AC_1 \neq 0)\varkappa'$ aus $13'\cdot 16'$, $14'\cdot 18'$;
$(AC \neq 0)(A_1C \neq 0)\lambda'$ aus $17'\cdot 23'$, $18'\cdot 25'$;
$(A_1C \neq 0)(A_1C_1 \neq 0)\varkappa$ aus $11'\cdot 15'$, $12'\cdot 17'$;
$(AC_1 \neq 0)(A_1C_1 \neq 0)\lambda$ aus $15'\cdot 24'$, $16'\cdot 26'$;
$(A_1C \neq 0)(A_1C_1 \neq 0)\varkappa'$ aus $11'\cdot 16'$, $12'\cdot 18'$;
$(AC_1 \neq 0)(A_1C_1 \neq 0)\lambda'$ aus $17'\cdot 24'$, $18'\cdot 26'$;
$(AC \neq 0)(A_1C \neq 0)(C_1 \neq 0)\lambda\sigma$ aus $15'\cdot 22'$, $16'\cdot 20'$;
$(AC \neq 0)(A_1C \neq 0)(C_1 \neq 0)\lambda'\nu$ „ $17'\cdot 22'$, $18'\cdot 20'$;
$(AC_1 \neq 0)(A_1C_1 \neq 0)(C \neq 0)\lambda\varrho$ „ $15'\cdot 21'$, $16'\cdot 19'$;
$(AC_1 \neq 0)(A_1C_1 \neq 0)(C \neq 0)\lambda'\mu$ „ $17'\cdot 21'$, $18'\cdot 19'$;

$(A_1 + C_1 = 1)(C_1 \neq 0)$ aus 11'·30', 12'·28';

$(A_1 + C = 1)(C \neq 0)$ „ 11'·29', 12'·27';

$(A + C_1 = 1)(C_1 \neq 0)$ „ 13'·30', 14'·28';

$(A + C = 1)(C \neq 0)$ „ 13'·29', 14'·27';

$(A_1 + C_1 = 1)(A_1 C \neq 0)$ aus 11'·27', 12'·29';

$(A_1 + C = 1)(A_1 C_1 \neq 0)$ „ 11'·28', 12'·30';

$(A + C_1 = 1)(AC \neq 0)$ „ 13'·27', 14'·29';

$(A + C = 1)(AC_1 \neq 0)$ „ 13'·28', 14'·30';

$(A_1 + C_1 = 1)(A_1 C_1 \neq 0)\, \varkappa'$ aus 11'·26', 12'·24';

$(A_1 + C = 1)(A_1 C \neq 0)\, \varkappa$ „ 11'·25', 12'·23';

$(A + C_1 = 1)(AC_1 \neq 0)\, \varkappa'$ „ 13'·26', 14'·24';

$(A + C = 1)(AC \neq 0)\, \varkappa$ „ 13'·25', 14'·23';

$(A_1 + C_1 = 1)(A_1 C_1 \neq 0)\, \varkappa' \lambda'$ aus 21'·26', 22'·24';

$(A_1 + C = 1)(A_1 C \neq 0)\, \varkappa \lambda'$ „ 21'·25', 22'·23';

$(A + C_1 = 1)(AC_1 \neq 0)\, \varkappa' \lambda$ „ 19'·26', 20'·24';

$(A + C = 1)(AC \neq 0)\, \varkappa \lambda$ „ 19'·25', 20'·23';

$(AC \neq 0)(AC_1 \neq 0)(A_1 C \neq 0)\, \sigma = \alpha^{A_1 C} \sigma$ aus 15'·30', 16'·28';

$(AC \neq 0)(AC_1 \neq 0)(A_1 C_1 \neq 0)\, \varrho = \alpha^{A_1 C_1} \varrho$ „ 15'·29', 16'·27';

$(AC \neq 0)(A_1 C \neq 0)(A_1 C_1 \neq 0)\, \nu = \alpha^{A_1, C} \nu$ „ 17'·30', 18'·28';

$(AC_1 \neq 0)(A_1 C \neq 0)(A_1 C_1 \neq 0)\, \mu = \alpha^{A_1, C_1} \mu$ „ 17'·29', 18'·27';

$(A_1 + C_1 = 1)(AC_1 \neq 0)(A_1 C \neq 0)(A_1 C_1 \neq 0)\, \mu \varrho = \alpha^{A_1 C} \alpha^{A_1, C_1} \mu$ aus 23'·29', 24'·27';

$(A_1 + C = 1)(AC \neq 0)(A_1 C \neq 0)(A_1 C_1 \neq 0)\, \nu \sigma = \alpha^{A_1 C_1} \alpha^{A_1, C} \nu$ aus 23'·30', 24'·28';

$(A + C_1 = 1)(AC \neq 0)(AC_1 \neq 0)(A_1 C_1 \neq 0)\, \mu \varrho = \alpha^{A_1, C} \alpha^{A_1 C_1} \varrho$ aus 25'·29', 26'·27';

$(A + C = 1)(AC \neq 0)(AC_1 \neq 0)(A_1 C \neq 0)\, \nu \sigma = \alpha^{A_1, C_1} \alpha^{A_1 C} \sigma$ aus 25'·30', 26'·28';

$(AC + A_1 C_1 = 1)(AC \neq 0)(A_1 C_1 \neq 0)\, \nu = \delta^{A_1 C} \delta^{A_1, C_1} \nu$ aus 27'·30', 28'·28';

$(AC + A_1 C_1 = 1)(AC \neq 0)(A_1 C_1 \neq 0)\, \varrho = \delta^{A_1 C} \delta^{A_1, C_1} \varrho$ „ 29'·29';

$(AC_1 + A_1C = 1)(AC_1 \neq 0)(A_1C \neq 0)\,\mu = \delta^{A,C_1}\delta^{A_1,C}\mu$ aus 27'·29';

$(AC_1 + A_1C = 1)(AC_1 \neq 0)(A_1C \neq 0)\,\sigma = \delta^{A,C_1}\delta^{A_1,C}\sigma$ „ 29'·30'.

Die letztern dreizehn sind gewissermassen überreiche Schlüsse, sofern bei ihnen noch mehr als eine Gergonne'sche Elementarbeziehung zu folgern ist.

Paradigmata.

$15'\cdot 27' = (CB + C_1B_1 = 1)(AB \neq 0)(A_1B \neq 0)(CB \neq 0)(AB_1 \neq 0) \Subset$

$\Subset (AC \neq 0)(A_1C \neq 0)(C \neq 0)(AC_1 \neq 0)\lambda = (AC \neq 0)(AC_1 \neq 0)(A_1C \neq 0) = \alpha^{A,C}$;

der Boole'sche Faktor der Konklusion wird hier:

$$(C + C_1 = 1) = (1 = 1) = \mathbf{1}$$

und ist also zu unterdrücken; ferner ist der nach dem Eliminationsschema sich ergebende Faktor $CC \neq 0$ oder $C \neq 0$ in der Konklusion zu unterdrücken, da er durch den ausserdem auftretenden Faktor $AC \neq 0$ derselben überflüssig gemacht wird. Nach bekannten Sätzen haben wir nämlich:

$$(AC \neq 0) \Subset (C \neq 0), \quad \text{sonach} \quad (AC \neq 0)(C \neq 0) = (AC \neq 0)$$

— eine Überlegung, wie sie ungemein häufig zur Vereinfachung der nach dem Schema sich ergebenden Konklusionen anzubringen ist.

Die Klausel ergibt sich im vorliegenden Falle, indem man in den Ungleichungsfaktoren des Prämissensystems den Koeffizienten A von B_1 zusammenhält mit einem jeden der Koeffizienten A, A_1 und C von B, und statuirt, ausspricht, dass er mit diesem nicht in *ein* Individuum zusammenfallen dürfe. Da nun A mit A nicht zu einem solchen zusammenfallen, d. h. A nicht selbst eine singuläre Klasse, *ein* Individuum vorstellend, sein darf, so erscheint es überflüssig, noch ausdrücklich zu fordern, dass auch A mit C nicht zu *einem* Individuum zusammenfallen dürfe, weil dies doch nur möglich würde, wenn A selbst ein solches wäre. Mit seiner Negation A_1 aber kann A ohnehin nie etwas gemein haben. Die ganze Klausel reduzirt also hier sich zu λ.

Die Anmerkung dieses Faktors bei der Konklusion wird indess hier schliesslich überflüssig, weil die zwei ersten Faktoren derselben:

$$(AC \neq 0)(AC_1 \neq 0)$$

denselben ohnehin (als „Klausel" bei der Elimination von C) bedingen.

Überlegungen nach Art der vorstehend ausführlich dargelegten spielen ungemein häufig mit, wenn die Resultante oder Konklusion auf ihre einfachste Ausdrucksform gebracht wird. —

$13'\cdot 19' = (AB + C_1B_1 = 1)(CB \neq 0)(C_1B \neq 0) \Subset$

$\Subset (A + C_1 = 1)(AC \neq 0)(AC_1 \neq 0) = \beta^{A,C}$. —

$27'\cdot 27' = (ACB + A_1C_1B_1 = 1)(AB \neq 0)(CB \neq 0) \Subset$

$\Subset (AC + A_1C_1 = 1)(AC \neq 0) = \delta^{A,C}$. —

$11' \cdot 21' = (A_1 C_1 B + B_1 = 1)(CB_1 \neq 0)(C_1 B_1 \neq 0) \leqslant (C \neq 0)(C_1 \neq 0).$ —

$$15' \cdot 15' = (AB \neq 0)(A_1 B \neq 0)(CB \neq 0)(C_1 B \neq 0) \cdot (AB_1 \neq 0)(CB_1 \neq 0) \leqslant$$
$$\leqslant (A \neq 0)(A_1 \neq 0)(C \neq 0)(C_1 \neq 0)\, \varkappa \lambda = P \varkappa \lambda,$$

wo die Klausel jedenfalls fordert, dass weder A noch C (das sind die beiden Koeffizienten von B_1) in *ein* Individuum zusammenfallen dürfe mit A, A_1, C oder C_1 (nämlich mit irgend einem der vier Koeffizienten von B). Für A und A_1 sowie für C und C_1 versteht sich dies ohnehin; für A und C aber sowie für A und C_1 wird es von selbst der Fall sein, wenn es für A und A der Fall ist, d. h. unter der Bedingung λ; ebenso für C und A, sowie C und A_1, wenn es für C und C der Fall ist, d. h. unter der Bedingung $\varkappa$.

Was aber die Frage nach der Vollständigkeit der angegebnen Klausel, resp. Konklusion hier betrifft, so behalten wir uns für den vorstehenden und den nächstfolgenden Typus des Schliessens noch eine Bemerkung vor.

$$15' \cdot 17' = (AB \neq 0)(A_1 B \neq 0)(CB \neq 0) \cdot (AB_1 \neq 0)(CB_1 \neq 0)(C_1 B_1 \neq 0) \leqslant$$
$$\leqslant (A \neq 0)(A_1 \neq 0)(C \neq 0)(C_1 \neq 0)\, \varkappa \lambda \sigma = P \varkappa \lambda \sigma$$

wo die Klausel jedenfalls fordern wird, dass von den drei Klassen A, C, C_1, welche als Koeffizienten von B_1 auftreten, keine in *ein* Individuum sich zusammenziehe mit einer von den drei Klassen A, A_1 und C, welche als Koeffizienten von B in der Prämisse erscheinen. Dies ist der Fall, wenn A nicht singulär und C nicht singulär ist, ausserdem aber auch A_1 und C_1 nicht in *ein* Individuum zusammenfallen, d. h. unter den Bedingungen λ, $\varkappa$ und σ.

Die zehn Schlüsse des vorstehenden und des vorhergehenden Typus, welche die Prämissen 15'.. 18' unter sich kombiniren, sind diejenigen, bei welchen die Frage nach der Vollständigkeit der Resultante oder Konklusion am schwierigsten zu erledigen ist, sintemal bei denselben (und nur bei ihnen) *sechs* Ungleichungen als Faktoren im Prämissensysteme auftreten — die sich, je nachdem sie B oder B_1 enthalten, jeweils in zwei Gruppen von entweder 4 und 2, oder aber von 3 und 3 Faktoren sondern.

Diese Schlüsse sind die einzigen der uns beschäftigenden Syllogistik, bei welchen wir jene Frage nach der Vollständigkeit unsrer Konklusion noch offen lassen wollen, weil ihre völlige Erledigung uns nötigen würde, auf die verschiedenen Möglichkeiten spezieller Individuenverteilung zwischen die Klassen A und C (sowie B) einzugehen, und auch die Anforderungen zu statuiren, welche das Prämissensystem an die ganze Mannigfaltigkeit 1 stellt, aus der diese Klassen nebst ihren Negationen hervorgehoben sein sollen — von welcher letztern sich erweist, dass sie eine gewisse Minimalzahl von Individuen mindestens enthalten müsse.

Vielleicht regen diese Bemerkungen einen Studirenden zu noch eingehenderen Forschungen über den Gegenstand an.

$14' \cdot 19' = (B + AC_1 B_1 = 1)(CB \neq 0)(C_1 B \neq 0) \leqslant (C \neq 0)(AC_1 \neq 0).$ —

$$14' \cdot 25' = (B + ACB_1 = 1)(CB \neq 0)(CB_1 \neq 0) \leqslant$$
$$\leqslant (C \neq 0)(AC \neq 0)\varkappa = (AC \neq 0)\varkappa. \text{ —}$$

$$19'\cdot 23' = (ACB + B_1 = 1)(AB + 0)(CB + 0)(AB_1 + 0)(CB_1 + 0) \Subset$$
$$\Subset (AC + 0)(A + 0)(C + 0)\lambda\varkappa = (AC + 0)\varkappa\lambda. \text{ —}$$
$$25'\cdot 25' = (B + ACB_1 = 1)(AB + 0)(A_1B + 0)(CB + 0)(CB_1 + 0) \Subset$$
$$\Subset (A + 0)(A_1 + 0)(C + 0)(AC + 0)\varkappa = (AC + 0)(A_1 + 0)\varkappa. \text{ —}$$
$$13'\cdot 17' = (AB + B_1 = 1)(CB + 0)(CB_1 + 0)(C_1B_1 + 0) \Subset$$
$$\Subset (AC + 0)(C + 0)(C_1 + 0)\varkappa = (AC + 0)(C_1 + 0)\varkappa. \text{ —}$$
$$15'\cdot 20' = (B + CB_1 = 1)(AB + 0)(A_1B + 0)(CB + 0)(C_1B + 0)(AB_1 + 0) \Subset$$
$$\Subset (A + 0)(A_1 + 0)(C + 0)(C_1 + 0)(AC + 0)\lambda =$$
$$= (AC + 0)(A_1 + 0)(C_1 + 0)\lambda. \text{ —}$$
$$15'\cdot 25' = (B + CB_1 = 1)(AB + 0)(A_1B + 0)(CB + 0)\cdot(AB_1 + 0)(CB_1 + 0) \Subset$$
$$\Subset (A + 0)(A_1 + 0)(C + 0)(AC + 0)\varkappa\lambda = (AC + 0)(A_1 + 0)\varkappa\lambda;$$

auch hier ist die Vollständigkeit der Konklusion nicht ganz leicht zu erweisen. Sie würde jedoch sich erweisen lassen, indem man die Möglichkeiten, wie die Klassen A, A_1, C mit wenig Individuen (den Bedingungen der Konklusion entsprechend) besetzt werden können, systematisch durchginge und zeigte, dass und wie jedesmal ein den Forderungen der Prämissen genügendes B sich konstruiren lässt. —

$$13'\cdot 15' = (AB + B_1 = 1)(CB + 0)(C_1B + 0)(CB_1 + 0) \Subset$$
$$\Subset (AC + 0)(AC_1 + 0)(C + 0)\varkappa = (AC + 0)(AC_1 + 0)\varkappa. \text{ —}$$
$$15'\cdot 23' = (CB + B_1 = 1)(AB + 0)(A_1B + 0)(CB + 0)\cdot(AB_1 + 0)(CB_1 + 0) \Subset$$
$$\Subset (AC + 0)(A_1C + 0)(C + 0)(A + 0)\varkappa\lambda = (AC + 0)(A_1C + 0)\lambda$$

mit der gleichen Bemerkung wie im vorvorigen Falle. —

$$15'\cdot 22' = (CB + B_1 = 1)(AB + 0)(A_1B + 0)\cdot(AB_1 + 0)(CB_1 + 0)(C_1B_1 + 0) \Subset$$
$$\Subset (AC + 0)(A_1C + 0)(A + 0)(C + 0)(C_1 + 0)\lambda\varrho\sigma = (AC + 0)(A_1C + 0)(C_1 + 0)\lambda\sigma$$

mit gleicher Bemerkung. Dass ϱ hier unterdrückt werden durfte folgt mit Rücksicht darauf, dass wegen $(AC + 0)(A_1C + 0)$ auch $\varkappa$ ohnehin gelten muss, und dass, wie vorbemerkt, $\varkappa\varrho = \varkappa$ ist. Da $\varkappa$ aber durch die schon angemerkten Faktoren der Konklusion mitbedingt ist, braucht es seinerseits nicht angeführt zu werden. —

$$11'\cdot 30' = (A_1CB + C_1B_1 = 1)(C_1B_1 + 0) \Subset (A_1 + C_1 = 1)(C_1 + 0). \text{ —}$$
$$11'\cdot 27' = (A_1CB + C_1B_1 = 1)(CB + 0) \Subset (A_1 + C_1 = 1)(A_1C + 0). \text{ —}$$
$$11'\cdot 26' = (A_1B + C_1B_1 = 1)(C_1B + 0)(C_1B_1 + 0) \Subset$$
$$\Subset (A_1 + C_1 = 1)(A_1C_1 + 0)(C_1 + 0)\varkappa' = (A_1 + C = 1)(A_1C_1 + 0)\varkappa'. \text{ —}$$

$$21'\cdot 26' = (A_1 B + C_1 B_1 = 1)(A_1 B \neq 0)(C_1 B \neq 0)\cdot(A_1 B_1 \neq 0)(C_1 B_1 \neq 0) \subseteq$$
$$\subseteq (A_1 + C_1 = 1)(A_1 \neq 0)(A_1 C_1 \neq 0)(C_1 \neq 0)\,\lambda'\varkappa' =$$
$$= (A_1 + C_1 = 1)(A_1 C_1 \neq 0)\,\varkappa'\lambda'. \text{ —}$$

$$15'\cdot 30' = (CB + C_1 B_1 = 1)(AB \neq 0)(A_1 B \neq 0)\cdot(AB_1 \neq 0)(C_1 B_1 \neq 0) \subseteq$$
$$\subseteq (AC \neq 0)(A_1 C \neq 0)(AC_1 \neq 0)(C_1 \neq 0)\,\lambda\sigma =$$
$$= (AC \neq 0)(AC_1 \neq 0)(A_1 C \neq 0)\,\sigma = \alpha^{A,C}\sigma. \text{ —}$$

$$23'\cdot 29' = (C_1 B + A_1 CB_1 = 1)(AB \neq 0)(A_1 B \neq 0)(CB_1 \neq 0) \subseteq$$
$$\subseteq (C_1 + A_1 = 1)(AC_1 \neq 0)(A_1 C_1 \neq 0)(A_1 C \neq 0)\,\mu\varrho =$$
$$= (A_1 + C_1 = 1)(AC_1 \neq 0)(A_1 C \neq 0)(A_1 C_1 \neq 0)\,\mu = \alpha^{A,C}\alpha^{A_1,C_1}\mu,$$

wo ϱ unterdrückbar, da λ' ohnehin gelten muss und $\lambda'\varrho = \lambda'$ ist. —

$$27'\cdot 30' = (ACB + A_1 C_1 B_1 = 1)(AB \neq 0)(C_1 B_1 \neq 0) \subseteq$$
$$\subseteq (AC + A_1 C_1 = 1)(AC \neq 0)(A_1 C_1 \neq 0)\,\nu = \delta^{A,C}\delta^{A_1,C_1}\nu. \text{ —}$$

[Es war dem Verfasser bei der Korrektur nicht vergönnt, alle beabsichtigten Kontrolrechnungen durchzuführen; daher ist noch vielseitige Prüfung der Angaben zu wünschen.]

Aus der Vergleichung erhellt, dass die Syllogistik für die Gergonne'schen Urteilsformen beträchtlich komplizirter sein wird als diejenige für die De Morgan'schen, welche letztere, wie sie schon in der erstern mitenthalten ist, auch ihrerseits wieder die gewöhnliche Syllogistik der verbalen Urteilsformen unter sich begreift.

Einen Vorzug grösserer Exaktheit aber besitzt keine Syllogistik vor der andern, wofern eine jede nur, wie vorstehend, eine korrekte Darstellung nach den Regeln unsrer Disziplin gefunden.

Um Anspruch auf vollkommene Genauigkeit zu erlangen, mussten diese Syllogistiken auch solche Formen von Schlüssen mit in Berücksichtigung ziehen, bei denen die Konklusion *nicht* in den Kreis der Urteilsformen fällt, aus welchem die Prämissen zu entnehmen waren. (Diese stellen sich als eine verhältnissmässig grosse Reihe von Schlussformen dar, und ihrer Vernachlässigung machte sich die verbale Syllogistik schuldig.)

Jener Umstand aber lässt wol den Wert einer Syllogistik überhaupt zurücktreten gegenüber dem Werte der *Methode*, durch welche in ihr, gleichwie in den noch viel allgemeineren Eliminationsproblemen, die in der Logik des identischen Aussagenkalkuls erdacht werden können, jeweils die Konklusion (als Resultante) zu gewinnen ist.

§ 49. Studien über die Klausel und noch ungelöste Probleme des Kalkuls.

In § 41 haben wir gelernt aus dem allgemeinsten Prämissensystem, welches über Gebiete (oder Klassen) überhaupt erdacht und in Bezug auf solche zugrunde gelegt werden kann, ein Gebietsymbol x zu eliminiren. Wir dachten uns die Prämissen des Systems zu einer Gesamtaussage vereinigt. Dieser konnte die Gestalt des Minor, der Hypothesis, Voraussetzung in der Subsumtion α) des § 41 gegeben werden:

$$1^0) \qquad \Sigma(ax + bx_1 = 1)(px + qx_1 \neq 0)(rx + sx_1 \neq 0) \cdots$$

— wo alle auf den Gleichungfaktor folgenden Aussagenfaktoren nur Ungleichungen mit der rechten Seite 0 sein dürfen — und war dies also die allgemeinste „Gesamtaussage der Data“ welche sich, während in ihnen von einem Gebiet x die Rede ist, im Gebietekalkul formuliren lässt.

Um aus diesen Prämissen das Gebiet x zu eliminiren, brauchten wir blos die Gesamtaussage anzusetzen, welche durch den Major, die Thesis oder Behauptung genannter Subsumtion § 41, α) dargestellt wird und lautet:

$$2^0) \qquad \Sigma(a + b = 1)(pa + qb \neq 0)(ra + sb \neq 0) \cdots$$

Wie bereits Beispiele zeigten, durfte aber diese Konklusion nicht als die volle Resultante der Elimination des x hingestellt werden — wir nannten sie einstweilen: die „Resultante aus dem Rohen“ und wird sich diese Benennung in Bälde rechtfertigen.

Die erwiesene Beziehung zwischen den Aussagen 1^0) und 2^0) war nun diese:

$$1^0) \Subset 2^0);$$

aus 1^0) folgt allemal 2^0), genauer: wenn *für irgend ein* x, für (ein) *„gewisse(s)“* x, die Hypothesis 1^0) erfüllt ist, so gilt sicher die Behauptung 2^0).

Im allgemeinen zu verneinen war jedoch die Frage, ob auch umgekehrt, unter der *Annahme* 2^0) gefolgert werden könne, dass 1^0) für gewisse x erfüllt sei, m. a. W. dass es dann überhaupt ein x *gebe*, welches in die Aussage 1^0) eingesetzt (unter dem Symbol x in derselben verstanden) dieselbe zu einer wahren Aussage mache.

Zu erledigen blieb daher noch die Frage nach der *vollen* Resultante der Elimination des x aus den Daten 1^0), d. h. es bleibt zu er-

mitteln diejenige zwischen den Parametern $a, b, q, r, s, \ldots$ von $1^0)$ erforderliche Beziehung, welche erstens, sobald $1^0)$ für irgendwelches x gilt, notwendig erfüllt sein muss, und zweitens garantirt, dass sobald sie erfüllt ist, es auch immer mindestens ein x gebe, für welches $1^0)$ gilt.

Nennen wir diese uns noch unbekannte volle Resultante für den Augenblick: $3^0)$, so ist sie in der Formelsprache begrifflich bestimmt durch die beiden Forderungen:

$$1^0) \neq\!\!\!\in 3^0) \quad \text{und} \quad 3^0) \neq\!\!\!\in \sum_x 1^0),$$

wo die Summe rechts auszudehnen ist über alle erdenklichen x.

Aus den zwei ersten der drei Subsumtionen über die wir jetzt verfügen, folgt aber nach Def. $(3_\times)$ die erstere von den beiden folgenden:

$$1^0) \neq\!\!\!\in 2^0) \cdot 3^0), \qquad 2^0) \cdot 3^0) \neq\!\!\!\in \sum_x 1^0),$$

deren letztere aus der dritten kraft Prinzip II hervorgeht, in Anbetracht, dass nach Th. $\bar{6}_\times)$ ja $2^0) \cdot 3^0) \neq\!\!\!\in 3^0)$ sein muss.

Vergleicht man aber diese beiden Subsumtionen mit den beiden vorigen, welche uns die volle Resultante $3^0)$ definirten, so offenbart sich, dass man als solche anstatt $3^0)$ selbst auch das Aussagenprodukt $2^0) \cdot 3^0)$ nehmen könnte: auch $2^0) \cdot 3^0)$ ist volle Resultante.

In der That lässt auch direkt sich zeigen, dass

$$2^0) \cdot 3^0) = 3^0), \quad \text{nämlich} \quad 3^0) \neq\!\!\!\in 2^0)$$

sein muss — vergl. Th. $\overline{20}_\times)$; und zwar wie folgt.

Wir denken uns die erste Subsumtion: $1^0) \neq\!\!\!\in 2^0)$ für jedes erdenkliche x hingeschrieben; sie muss allemal gelten, denn stellt x ein solches Gebiet vor, welches $1^0)$ erfüllt, so gilt sie erwiesenermassen; stellt x aber ein solches Gebiet vor, welches $1^0)$ nicht erfüllt, so wird für dieses die Aussage $1^0)$ gleich 0 sein, somit die Subsumtion $1^0) \neq\!\!\!\in 2^0)$ auf $0 \neq\!\!\!\in 2^0)$ hinauslaufen und nach Def. $(\bar{2}_\times)$ ohnehin gelten. Also: die Subsumtion $1^0) \neq\!\!\!\in 2^0)$ gilt *für jedes* x, und für alle diese hingeschrieben gedacht, hat sie immer den nämlichen Major $2^0)$, da in diesem ja x gar nicht vorkommt. Es lässt sich hiernach das Schema der Def. $(\bar{3}_+)$ anwenden; es muss nämlich die Summe der Minoren dem Major eingeordnet sein, oder wir haben:

$$\sum_x 1^0) \neq\!\!\!\in 2^0).$$

Im Hinblick auf die dritte unsrer Subsumtionen folgt hieraus a fortiori: $3^0) \neq\!\!\!\in 2^0)$, wie behauptet worden.

Mit alledem ist formell bewiesen, was auch selbstverständlich:

Aus der vollen Resultante folgt auch unsre Resultante aus dem Rohen.

Die letztere kann zur erstern ergänzt werden durch Hinzufügung einer weiteren die Parameter betreffenden Bedingung, die ihr als eine simultan zu gelten habende natürlich beizusetzen ist, in Gestalt eines (Aussagen-)*Faktors*, und für welche wir bereits den Namen der *„Klausel“* K vordem eingeführt haben.

Für die Klausel K kann nötigenfalles *die volle Resultante* 3^0) *selbst genommen, es darf* $K = 3^0$) *gesetzt werden.*

Indessen ist auch denkbar, dass unsre Resultante aus dem Rohen 2^0) bereits gewisse Forderungen oder Bedingungen als Faktoraussagen enthält, die sich auch in der vollen Resultante wiederfinden werden, und dann nach dem Tautologiegesetze $\overline{14}_\times$) in der Klausel K nicht wiederholt zu werden brauchen.

Die Klausel K *braucht* nur diejenigen — zur Existenzbehauptung eines 1^0) erfüllenden x notwendigen und hinreichenden — Bedingungen zu statuiren, welche sich nicht bereits in unsrer Resultante aus dem Rohen 2^0) erwähnt finden. M. a. W. ist — im Gegensatz zur bereits definirten „vollen Resultante“ 3^0) die „Klausel“ lediglich zu definiren durch die Forderung, dass:

$$2^0) \cdot K = 3^0)$$

sei. —

Wenden wir noch die gleiche Überlegung, welche oben in Bezug auf unsre erste Subsumtion $1^0) ⋹ 2^0)$ auseinandergesetzt worden, auf die zweite $1^0) ⋹ 3^0)$ an, so gelangen wir analog zu dem Ergebnisse:

$$\sum_x 1^0) ⋹ 3^0)$$

und dieses mit der dritten Subsumtion zusammengehalten gibt nach Def. (1) der Gleichheit:

$$\sum_x 1^0) = 3^0).$$

Dies lehrt: *Volle Resultante der Elimination eines Eliminanden x aus einem Prämissensysteme* 1^0) *ist eine Aussage, welche äquivalent ist der Summe der Prämissenaussagen genommen nach dem Eliminanden x, welche diesen aber gar nicht enthält* (sollte genauer heissen: *erwähnt*, sodass eben x nicht in ihr vorkommt). —

Bezeichnen wir zur Abkürzung das allgemeine Glied der Summe *in* 1^0) mit A_x und das korrespondirende Glied der Summe in 2^0) mit A, sodass etwa:

$$1^0) = \Sigma A_x = A_x + A_x' + A_x'' + \cdots$$
$$2^0) = \Sigma A = A + A' + A'' + \cdots$$

so wissen wir bereits, dass auch je für sich:

$$A_x \Subset A, \quad A_x' \Subset A', \quad A_x'' \Subset A'', \ldots$$

ist. Sollte dies nicht aus § 41 erinnerlich sein, so geht es augenblicklich aus dem allgemeinen Theorem φ) daselbst S. 212, das ist aus unsrer Subsumtion $1^0) \Subset 2^0)$ hervor, indem man selbige für eine *eingliedrige* Summe Σ in Anspruch nimmt.

Für das Glied A_x der Prämissenaussage, die als eine Summe von Gliedern (als alternativen Annahmen) sich darstellte, ist nun A zwar eine richtige Resultante der Elimination des x, aber im allgemeinen nicht die volle; vielmehr kann und muss es zu dieser erst ergänzt werden durch multiplikative Hinzufügung einer gewissen Klausel k (die nur gleich 1 zu denken ist, falls einmal zufällig A schon die volle Resultante sein sollte). Es wird m. a. W. aus A_x sich *mehr* noch, als blos A, in Bezug auf die Parameter folgern lassen, und was sich im Ganzen folgern lässt, ist die volle Resultante $A \cdot k$. Etc. Somit werden erst durch:

$$A_x \Subset Ak, \quad A_x' \Subset A'k', \quad A_x'' \Subset A''k'', \ldots$$

die vollen Einzelresultanten der Prämissenglieder darzustellen sein, oder: *es müssen auch die einzelnen Glieder unsrer Resultante aus dem Rohen ihre eignen Klauseln haben.*

Sind letztere bekannt, so — behaupten wir — ist auch die Gesamtklausel K oder volle Resultante $3^0)$ gefunden, und zwar wird sie lauten:

$$3^0) = K = Ak + A'k' + A''k'' + \cdots = \Sigma Ak.$$

Dass in der That dieses K eine *notwendige* Bedingung für die Geltung von $1^0)$ vorstellt, somit eine berechtigte Folgerung aus $1^0)$ oder „eine" Resultante ist, erhellt durch überschiebendes Addiren, Summiren der vorausgehenden Subsumtionen gemäss Th. $\overline{17_+}$), wodurch sich ergibt:

$$1^0), = \Sigma A_x \Subset \Sigma Ak.$$

Dass diese Bedingung K aber auch *hinreicht*, um die Existenz eines $1^0)$ erfüllenden x zu garantiren, dass sie mithin die volle Resultante ist, erkennt man unschwer mittelst dilemmatischen Schlusses. Vergl. § 45, S. 267.

Die rechnerische Ausführung gestaltet sich im Detail freilich etwas umständlich, wie folgt.

Gilt ΣAk, ist diese Voraussetzung erfüllt, so muss wegen

$$(\Sigma Ak = \dot{1}) \mathrel{\underset{\cdot}{=}} \Sigma (Ak = \dot{1})$$

— vergl. § 45, β_+) — auch mindestens eine ihrer Gliederaussagen gelten; und sei etwa Ak selbst ebendiese.

Wir haben dann, weil Ak volle Resultante für A_x sein sollte:

$$Ak \Subset \sum_x A_x,$$

und umsomehr [weil nach Th. $\bar{6}_+$) $A_x \Subset \Sigma A_x$, das Glied der Summe eingeordnet ist und diese Subsumtion wieder nach x gemäss Th. $\bar{17}_+$) summirt werden kann, sonach auch $\sum_x A_x \Subset \sum_x \Sigma A_x$ sein muss]:

$$Ak \Subset \sum_x \Sigma A_x \quad \text{oder} \quad Ak \Subset \sum_x 1^0).$$

Gälte zugleich mit Ak, was nicht ausgeschlossen ist, auch $A'k'$, so hätten wir kraft derselben Schlüsse auch $A'k' \Subset \sum_x 1^0)$. Gilt aber — was ebenfalls zugelassen — $A'k'$ nicht, so ist es $= 0$ und haben wir wiederum $A'k' \Subset \sum_x 1^0)$ kraft Def. $(2_\times)$, und so weiter.

Wir können uns also die Subsumtionen:

$$Ak \Subset \sum_x 1^0), \qquad A'k' \Subset \sum_x 1^0), \qquad A''k'' \Subset \sum_x 1^0), \ldots$$

als jedenfalls gleichzeitig zutreffende nach Def. (3_+) zusammenziehen in

$$\Sigma Ak \Subset \sum_x 1^0), \quad \text{oder} \quad 3^0), = K \Subset \sum_x 1^0),$$

was noch zu zeigen gewesen. —

Man könnte wähnen, dass die Bedingung K auch nicht notwendig erfüllt zu sein brauche, indem man sich etwa folgenden Fall vergegenwärtigt.

Gesetzt, es gilt A in 2^0), aber nicht Ak, sodass es kein x geben muss und wird, welches A_x in 1^0) erfüllt. So wäre denkbar, dass es alsdann doch noch ein x gibt, welches ein anderes Glied von 1^0) als A_x, zum Beispiel A_x' erfüllt — sodass also der Zusatz von k zu A als nicht erforderlich sich darstellt.

Dieses allerdings ist richtig. Allein dann hätten wir wegen $A_x' \Subset A'k'$ dafür die Gewissheit, dass $A'k'$ erfüllt ist (als Konklusion und Resultante, sintemal es laut ebengemachter Annahme ein A_x' erfüllendes x gibt).

Sicher wäre dann auch die Alternative $\Sigma Ak = \dot{1}$ erfüllt, eben wegen des Erfülltseins des zweiten Gliedes $A'k' = \dot{1}$ linkseitiger Summe, und ob — was das erste Glied betrifft — bei dem zufällig miterfüllten A auch der Faktor k noch miterfüllt ist oder nicht, bleibt sich egal.

Wir können darnach behufs Ermittelung der Klausel oder vollen Resultante von den Summenzeichen in 1^0) und 2^0) absehen und brauchen uns nur noch mit Aufsuchung der vollen Resultante des allgemeinen Gliedes A_x in 1^0) zu beschäftigen. Eine ähnliche Vereinfachung

unsrer Aufgabe wird sich nachher nochmals anbringen lassen, nachdem wir auch dieses allgemeine Glied noch weiter in monomische Unterglieder zerlegt haben werden.

Dies steht im Einklange mit einer schon in § 41 gegebenen Andeutung (S. 211).

Auch dass der angegebene Ausdruck 3°) für K, als Faktor zu 2°) gesetzt nur sich selbst wiedererzeugt, dass hier:

$$2^0) \cdot K = 3^0) \quad \text{oder} \quad K \text{ selbst}$$

wird, ist leicht nachzurechnen, und läuft auf einen Satz des identischen Kalkuls hinaus, den wir durch die Formel darstellen wollen:

$$4^0) \qquad (a + b + c + \cdots)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \cdots) = a\alpha + b\beta + c\gamma + \cdots$$

und den man einerseits durch Ausmultipliziren nachweisen kann, wobei eben alle andern Partialprodukte ausser den rechts angegebenen von diesen nach Th. 23_+) absorbirt werden, der aber andrerseits auch aus Th. $6_\times$) und 17_+), wonach: $a\alpha + b\beta + \cdots \leqq a + b + \cdots$ sein muss, kraft Th. $\overline{20}_\times$) folgt. [Der Satz ist auch schon von andrer Seite bemerkt worden.] —

Anstatt nun erst die Resultante aus dem Rohen anzugeben und dieser dann als Korrektiv und Ergänzung K die volle Resultante beizufügen, wird man einfacher sogleich die letztere selbst aufsuchen — wofern man nicht eben mit der erstern sich von Anfang begnügt hatte.

Die volle Resultante ΣAk ergibt sich aber, *indem man den Gliedern jener Resultante aus dem Rohen die nötigen Klauseln einzeln beigesellt.* —

Nach diesen Vorbetrachtungen wollen wir jetzt einmal den einfachsten Fall erledigen: wo der Boole'sche Gleichungfaktor fehlt und nur zwei Ungleichungfaktoren vorliegen, mithin die Prämisse lautet:

$$(px + qx_1 \neq 0)(rx + sx_1 \neq 0).$$

Zerlegt nach dem Schema $(a + b \neq 0) = (a \neq 0) + (b \neq 0)$ des § 40, α) und ausmultiplizirt führen die beiden Faktoraussagen zu einer Zerfällung der Prämissen in die Alternative von vier Möglichkeiten:

$$(px \neq 0)(rx \neq 0) + (px \neq 0)(sx_1 \neq 0) +$$
$$+ (qx_1 \neq 0)(rx \neq 0) + (qx_1 \neq 0)(sx_1 \neq 0)$$

deren volle Resultanten getrennt aufgesucht werden dürfen.

Für den ersten und vierten Fall fällt die volle Resultante mit der rohen zusammen; es ist:

$$(px \neq 0)(rx \neq 0) \in (p \neq 0)(r \neq 0), \quad (qx_1 \neq 0)(sx_1 \neq 0) \in (q \neq 0)(s \neq 0)$$

und sobald hier die Thesis rechts zur Hypothesis gemacht, als Annahme erfüllt ist, gibt es auch immer ein x resp. x_1, welches der Hypothesis links genügt. Für den ersten Fall nämlich ist ein solches angebbar in Gestalt von $x = p + r$, für welches ja $px = p$, $rx = r$, mithin laut Annahme $\neq 0$ sein wird, und ebenso für den letzten Fall in Gestalt von $x_1 = q + s$.

Hier also ist eine Klausel überhaupt nicht erforderlich; beziehungsweise ist dieselbe als $k_1 = 1$, zu denken.

Anders für die beiden mittleren Fälle, wo die Formeln:

$$(px \neq 0)(sx_1 \neq 0) \in (p \neq 0)(s \neq 0) \text{ und } (qx_1 \neq 0)(rx \neq 0) \in (q \neq 0)(r \neq 0)$$

uns blos die Resultante aus dem Rohen geben und die Konklusionen durch Zufügung einer Klausel k' resp. k'' zu den vollen Resultanten als:

$$\in (p \neq 0)(s \neq 0)\, k' \quad \text{resp.} \quad \in (q \neq 0)(r \neq 0)\, k''$$

erst ergänzt werden müssen.

Es möge nur die Klausel k' aufgesucht werden; aus ihr muss sich dann k'' ergeben indem man blos die Buchstaben p, s durch r, q ersetzt.

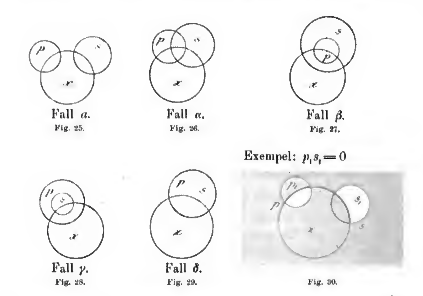
Nach der jetzt jedenfalls zur Voraussetzung zu erhebenden Thesis $(p \neq 0)(s \neq 0)$ der rohen Resultante müssen die (nicht verschwindenden) Symbole p, s als Gebiete gedeutet *mindestens einen Punkt*, im Klassenkalkul *mindestens ein Individuum* enthalten. Um nicht Alles doppelt aussprechen zu müssen, wollen wir uns nach Gutdünken nur an die eine oder nur an die andere Auffassung halten.

Bekanntlich wird eine Klasse eine *„singuläre“* genannt, wenn sie blos *ein* Individuum in sich begreift (wie z. B. bezogen auf die Mannigfaltigkeit 1 des Wirklichen die Klasse „Gott“ — nach der monotheistischen Weltanschauung). Der singulären Klasse entspricht im Gebietekalkul ein isolirter geometrischer Punkt auf der Tafelfläche 1.

Ich behaupte jetzt, dass die Bedingung oder Klausel k' zum notwendigen und ausreichenden Inhalt haben wird: die *Forderung, dass falls die Klassen p und s gleichzeitig singuläre sein sollten, sie verschieden sein müssen,* dass sie also nur *nicht gerade* (identisch) *ein und dasselbe Individuum ausschliesslich umfassen* dürfen. (Analog hernach k'' in Bezug auf r und q.)

Setzen wir zunächst die Gebiete p und s als *teilbar* voraus, so ist

für alle 5 denkbaren Elementarbeziehungen, in denen diese beiden Gebiete zu einander stehen können, ein x angebbar, welches die Forderung $(px \neq 0)(sx_1 \neq 0)$ erfüllt, und um so mehr also auch der Anforderung $(px + qx_1 \neq 0)(rx + sx_1 \neq 0)$ genügen wird. Ein solches machen wir durch die fünf Figuren (Fig. 25 ... Fig. 29) anschaulich,



Fall a. Fig. 25. Fall α. Fig. 26. Fall β. Fig. 27. Fall γ. Fig. 28. Fall δ. Fig. 29. Fig. 30.

denen wir — zum Überfluss — als sechste (Fig. 30) noch die Angabe eines x für den Fall der De Morgan'schen Grundbeziehung $p_1 s_1 = 0$ beifügen — indem wir diesmal (im Gegensatz zur Venn'schen Gepflogenheit) mittelst Schraffirens das *Nicht*verschwinden eines Teilgebietes für das gewählte x oder x_1 andeuten.

Ein aus nur *zwei* Punkten bestehendes Gebiet wäre bereits in dem obigen Sinne „teilbar" zu nennen, und könnte man den einen der beiden Punkte desselben zu x, den andern zu x_1 in der erforderlichen Weise schlagen, so dass die Produkte px und sx_1 von 0 verschieden ausfallen, sogar auch im Elementarfalle δ der Identität von p und s. Kurz: die vorstehenden Figuren, durch deren Hinsetzung wir uns eine textuelle Beschreibung des zu konstruirenden Gebietes x für die verschiedenen Fälle erspart haben, halten auch noch Stand, wenn etwa eines der Bilinea px und sx_1 in einen Punkt degeneriren sollte.

Wie aber, wenn sich eines der beiden Gebiete p, s selbst, oder das andre, oder beide, auf *einen Punkt* reduzirt, dem Individuum im Klassenkalkul entsprechend, wenn die Gebiete p, s nicht mehr beide teilbar sind?

Wird p ein Punkt, so muss er nur in x hereintreten, besser gesagt, muss man x so wählen, dass es denselben *einschliesse*, will man hinbringen, dass $px \neq 0$ werde; und zwar wird alsdann $px = p$ selber ebendieser Punkt sein.

Ist s ein Punkt, so muss, wenn $sx_1 \neq 0$ sein soll, x_1 denselben *ein-* mithin x denselben *ausschliessen*. Für das Individuum $s = i$ haben wir ja in § 47 erkannt, dass $(ix_1 \neq 0) = (ix = 0)$; und zwar wird in diesem Falle $sx_1 = s$ selber eben jener Punkt sein.

Beiden Forderungen zugleich kann man im Allgemeinen genügen. Dagegen ist dies immer dann und nur dann unmöglich, wenn $p_1 = s$, *den nämlichen* Punkt vorstellt, indem, wenn wir diesen etwa mit i bezeichneten, das Erfülltsein der Forderung $(ix \neq 0)(ix_1 \neq 0)$ einen Widerspruch zu der fundamentalen Eigenschaft des Individuums i konstituiren würde, q. e. d.

Schliesslich hält es auch nicht schwer, die Partialklauseln sowol als die Totalklausel oder Konklusion und volle Resultante ganz in Formeln zu setzen. Zur Abkürzung wollen wir uns dabei der am Schlusse des § 47 eingeführten Symbole J^i und J_1^i bedienen, welche uns die Aussagen darstellten dass i Individuum, resp. nicht Individuum sei, und dort bereits spezifizirt in unsrer Zeichensprache angesetzt wurden. Man hat als das Ergebniss der Untersuchung:

$$5^0) \qquad k' = \{(p = s) \Subset J_1^p\}, \qquad k'' = \{(q = r) \Subset J_1^q\},$$

und kann man der erstern z. B. auch noch die Formen geben:

$$6^0) \; k' = \{J^p J^s \Subset (p \neq s)\} = \{J^p J^s (p = s) = 0\} = \{J_1^p + J_1^s + (p \neq s)\}$$

zu deren Zurückführung auf die erste noch in Betracht zu ziehen ist, dass nach dem Satze von der Ersetzbarkeit von Gleichem durch Gleiches auch $(p = s)\, J^p \Subset J^s$ sein muss.

Konklusion und volle Resultante der Elimination des x aus den Prämissen zur linken ist also der Major der Subsumtion:

$$7^0) \qquad (px + qx_1 \neq 0)(rx + sx_1 \neq 0) \Subset K,$$

wo:

$$8^0) \; K = (p \neq 0)(r \neq 0) + (p \neq 0)(s \neq 0)k' + (q \neq 0)(r \neq 0)k'' + (q \neq 0)(s \neq 0)$$

bedeutet. Um aber hierin deutlich zu erblicken, in welchen Fällen die Teilklauseln k', resp. k'' ganz unerlässlich sind, wird man die beiden innern Glieder, was ja erlaubt ist, noch multipliziren mit den Negationen der beiden äusseren Glieder — cf. Th. $\overline{33_+})$ Zusatz — wodurch

sich nach Unterdrückung identisch verschwindender Terme die Summe jener beiden wie folgt darstellt:

9°) $(p \neq 0)(q = 0)(r = 0)(s \neq 0)k' + (p = 0)(q \neq 0)(r \neq 0)(s = 0)k''.$

Um nunmehr allgemein das Problem der „Klausel" so weit zu führen als es uns thunlich erscheint, wollen wir zunächst die Prämisse 1°) — sowie dann auch die Konklusion 2°) — uns übersichtlicher schreiben, indem wir bei der erstern eine bestimmte Anzahl n von Ungleichungsfaktoren gegeben voraussetzen und in diesen die Koeffizienten durchgängig mit den beiden Buchstaben p und q bezeichnen, letztere nur mittelst oberer Indices $\varkappa = 1, 2, \ldots n$ von einander unterscheidend. Nennen wir auch S die Prämisse und P die Konklusion, sodass nns

$$S \mathrel{\overline{\in}} P$$

den Schluss der Elimination von x, „*Eliminationsschluss*" nach dem Schema unsres Theorems φ) des § 41 darstellt, so werden wir haben:

$$10^\circ)\qquad S \equiv (ax + bx_1 = 1)\prod_{\varkappa=1}^{n}(p^\varkappa x + q^\varkappa x_1 \neq 0),$$

$$11^\circ)\qquad P \equiv (a + b = 1)\prod_{\varkappa=1}^{n}(p^\varkappa a + q^\varkappa b \neq 0)$$

und wird es sich darum handeln, die Konklusion P, welche sich als „Resultante aus dem Rohen" präsentirte, durch (multiplikative) Hinzufügung einer noch unbekannten Klausel K zur „vollen Resultante" R (der Elimination des x aus S) zu ergänzen, sodass

$$S \mathrel{\overline{\in}} P \cdot K = R$$

sein wird nnd das Erfülltsein von R allemal die Garantie in sich schliesst, dass es auch ein S erfüllendes x *gebe*.

Notwendige oder unerlässliche — aber zuweilen noch nicht hinreichende — Bedingung für die Existenz eines solchen x war die Aussage P, die wir demnach jedenfalls als durch die Parameter a, b, $p^\varkappa$, $q^\varkappa$ der Data S erfüllt anzunehmen haben.

Ein solches x müsste zunächst dem Boole'schen Faktor

$$ax + bx_1 = 1$$

von S genügen. Und da laut P gewiss

$$a + b = 1, \quad \text{oder} \quad a_1 b_1 = 0, \qquad a_1 \mathrel{\overline{\in}} b, \qquad b_1 \mathrel{\overline{\in}} a,$$

sonach auch

12⁰) $\quad a_1 b = a_1, \quad a_1 + b = b, \quad a + b_1 = a, \quad ab_1 = b_1$

ist, wird es immer ein solches x geben. Der allgemeinste Ausdruck für jedes solche x muss nach unserm Th. 50_+) sein:

$$x = au + b_1 u_1 = a(u + b_1) = b_1 + au, \quad x_1 = a_1 u + bu_1 = b(u_1 + a) \neq a_1 + bu_1$$

worin u als Gebiet oder Klasse vollkommen beliebig bleibt.

Einsetzung dieser Werte von x und x_1 verwandelt nun in S die durch den Boole'schen Faktor ausgedrückte Forderung in eine auf Grund von $a + b = 1$ identisch erfüllte. Der Boole'sche Faktor geht dadurch in den Aussagenfaktor $\dot{1}$ über, welcher nach Th. $\overline{21}_\times$) unterdrückt werden darf, nicht weiter angemerkt zu werden braucht, und da hiemit

$$px + qx_1 = (pa + qa_1)u + (pb_1 + qb)u_1 = pb_1 + qa_1 + pau + qbu_1$$

wird, so erhalten wir die beiden Darstellungen von S:

$$S = \prod_{\varkappa}^{\mathfrak{n}}\!\!\!_{1} \{(p^\varkappa a + q^\varkappa a_1)u + (p^\varkappa b_1 + q^\varkappa b)u_1 \neq 0\}$$

13⁰) $$S = \prod_{\varkappa}^{\mathfrak{n}}\!\!\!_{1} \{p^\varkappa b_1 + q^\varkappa a_1 + p^\varkappa au + q^\varkappa bu_1 \neq 0\}.$$

Für diese bleibt nunmehr zu untersuchen, falls nur P gilt, unter welchen ferneren Bedingungen sie durch irgend ein u erfüllbar sein werden.

Ungeachtet des etwas komplizirteren Ausdrucks dieser Forderung S, gegenüber ihrem früheren Ausdrucke, erscheint die Aufgabe durch die vollzogene Umformung doch wesentlich vereinfacht, indem jetzt S nur mehr aus Ungleichungen als Faktoren zusammengesetzt, der Boole'sche Gleichungsfaktor weggefallen ist, und während früher x durch diesen letzteren in seiner Veränderlichkeit beschränkt erschien, nunmehr u innerhalb der Mannigfaltigkeit 1 ganz unumschränkt variabel ist.

In den zwei Reihen von paarweise untereinander gestellten $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}$ Gebieten oder Klassen:

14⁰) $$\begin{cases} p^1 a, & p^2 a, \ldots p^n a, \\ q^1 b, & q^2 b, \ldots q^n b \end{cases}$$

können nun diese oder jene auch *null sein* oder verschwinden, jedoch *niemals zwei untereinanderstehende zugleich*, indem nach P für jeden unter den Werten $1, 2, \ldots \mathfrak{n}$ ausgewählten Index $\varkappa$ sein muss:

$$p^\varkappa a + q^\varkappa b \neq 0.$$

[Im Ganzen können also von jenen $2 \times n$ Symbolen höchstens n verschwinden, in jeder Kolonne kann von den zwei Symbolen höchstens eines 0 sein.]

Darnach lässt es sich durch folgende Überlegung rechtfertigen, weshalb wir unsre Konklusion P als die „*Resultante aus dem Rohen*" schon hinstellen durften.

Sobald nur die *nicht verschwindenden* von jenen $2 \times n$ Gebieten *hinlänglich teilbar* sind, sobald sie *hinreichend viele Punkte*, die Klassen *genug Individuen* enthalten — namentlich also auch, falls sie deren eine unbegrenzte Menge [und wie sich zeigen wird, sicher schon, falls sie nur allesamt n oder *mehr* Punktindividuen] umfassen sollten — gibt es unfehlbar ein Gebiet u, welches die Forderung S erfüllt. Unsrer Resultante P ist alsdann keine weitere Forderung mehr hinzuzufügen und darf sie als die ganze oder Resultante schlechtweg hingestellt werden. Die (uns noch unbekannte) Klausel des allgemeinen Problems muss unter obiger Voraussetzung unzweifelhaft von selbst erfüllt sein (das ist: $= 1$ werden).

Wo immer z. B. die in unsrer Resultante P auftretenden Terme, sofern sie existiren, *Flächen* vorstellen, desgleichen wo sie in *Linien* degeneriren, wird schon die Frage nach der Klausel belanglos, und erst wo man mit *Systemen isolirter Punkte* zu thun hat, die in endlichen Mengen auftreten, kann solche in Betracht kommen.

Bei gar vielen, vielleicht den allermeisten Problemen, bei denen man nur über die im allgemeinen Schema P nicht unvertretnen Klassen anderweitig informirt, von vornherein in beregter Hinsicht orientirt ist, wird man also unsre Resultante P ohne weiteres *für voll nehmen* können, und nur da eine gewisse Vorsicht zu beobachten haben, wo auch Klassen in Betracht kommen könnten, *die nur aus wenig Individuen bestehen.*

Um obiges einzusehen, braucht man nur ein gewisses Gebiet u synthetisch zu konstruiren, es dergestalt zusammenzusetzen, dass für keinen der n Werte des $\varkappa$ die beiden Glieder $p^\varkappa a u$ und $q^\varkappa b u_1$ gleichzeitig verschwinden. Gelingt dies, so wird nämlich ein jeder Faktor der Anforderung S zufolge Nichtverschwindens des zweiten Doppelgliedes $p^\varkappa a u + q^\varkappa b u_1$ in 13⁰) erfüllt, $= 1$, sein, ganz ohne Rücksicht darauf, ob etwa das erste Doppelglied $p^\varkappa b_1 + q^\varkappa a_1$ schon seinerseits $\neq 0$, oder ob dasselbe $= 0$ ist.

Dies lässt sich nun oft — und so auch unter den angegebnen Voraussetzungen — erreichen, indem man die zu konstruirende Klasse u *einschliessen* lässt gewisse Individuen aus den nicht verschwindenden

Klassen der ersten Zeile von 14⁰) zugleich aber sie ausdrücklich *ausschliessen* lässt gewisse Individuen aus den werthabenden Klassen der zweiten Zeile von 14⁰). Im übrigen mag dann die Zusammensetzung von u in's Belieben gestellt, offen gelassen bleiben, und ist es als gleichgültig nachweisbar, welche andern Individuen oder gar Gebiete dem u noch ausserdem zugeschlagen oder abgesprochen werden mögen. Dortbei wird *lediglich* zu beachten sein, dass die von u *aus*zuschliessenden, sonach in u_1 eingeschlossenen Individuen niemals identisch seien mit den von u *ein*zuschliessenden, dass vielmehr sie durchweg verschieden bleiben von jenen. Und sofern uns nur genügend Individuen (in jedem Bedarfsfalle mindestens eines) zur Einverleibung in u oder u_1 zur Verfügung stehen, ist unser Vorhaben realisirbar:

Man gehe etwa die Symbole 14⁰) kolonnenweise von links nach rechts fortschreitend durch und schlage aus jeder nicht verschwindenden Klasse der ersten Zeile *ein* Individuum zu u, sowie aus jeder nicht verschwindenden (das heisst ja: mindestens ein Individuum enthaltenden) Klasse der zweiten Zeile *ein* Individuum zu u_1, indem man Sorge trägt, dass kein in der einen Zeile verwendetes Individuum, wenn es etwa gleichzeitig auch einer Klasse der andern Zeile angehören sollte, in dieser wiederverwendet wird. Unzulässig bleibt es ja, dass einunddasselbe Individuum i den beiden einander exkludirenden Klassen u und u_1 zugleich zugeschlagen werde. Man wird also in solchem Falle bei jener Klasse blos zu einem neuen Individuum zu greifen haben (genauer: zu einem in der andern Zeile noch nicht als verwendet vorgekommenen) und man vermag dies, falls ein solches vorrätig; dass letzteres aber der Fall sei, wurde ausdrücklich vorausgesetzt.

Gleichgültig ist es dagegen, ob in éiner Zeile ein Individuum wiederholt verwendet wird, oder nicht. Man mag, wenn mehrere Klassen der ersten Zeile ein Individuum gemein haben sollten aus ihnen allemal blos dieses nämliche wieder zu u schlagen und ebenso wird die Beisteuer, der Beitrag, an Individuen, welchen jede nicht verschwindende Klasse der zweiten Teile an u_1 abzugeben hat, für beliebig viele von diesen, selbst auch für alle, gemeinsam, der nämliche sein dürfen.

Ganz sicher wird nämlich auf diese Weise hingebracht — und diese Möglichkeit darzuthun, darauf kam es uns ganz allein an — dass in den beiden Reihen von je n Gliedern

$$15^0)\qquad \begin{array}{l} p^1au,\ \ p^2au, \ldots p^nau \\ q^1bu_1,\ \ q^2bu_1, \ldots q^nbu_1 \end{array}$$

niemals zwei untereinander stehende zugleich verschwinden, indem das identische Produkt aus $p^\varkappa a$ in u oder das aus $q^\varkappa b$ in u_1 doch aller-

mindestens jenes aus dem ersten Faktor in den zweiten eingefügte Individuum als ein beiden Faktoren gemeinsames Element enthalten muss, von jenen ersten Faktoren aber mindestens einer nicht inhaltsleer war. q. e. d. —

Erst wenn bei jenem Versuche, eine die Forderung S erfüllende Klasse u zu konstruiren, im Herausgreifen von Individuen aus den Klassen 14⁰) resp. 15⁰) bei einer solchen *Individuenmangel* einträte, und daraus die Nötigung erwüchse, z. B. in der zweiten Zeile als Beisteuer der betreffenden Klasse zu u_1 auf ein Individuum zu reflektiren, welches als ein auch Klassen der ersten Zeile angehöriges dortselbst schon wegen drohenden Individuenmangels zu u hatte geschlagen werden müssen — erst dann könnte der Nachweis, ja die Existenz einer S erfüllenden Klasse u zur Unmöglichkeit werden. Und Aufgabe der Klausel ist es eben, diese Fälle der Nichtexistenz eines S erfüllenden x resp. u ohne Nennung von x oder u zu charakterisiren und auszuschliessen.

Um dies Ziel zu verfolgen, wollen wir uns die Aussagen P und S zunächst noch etwas vereinfachen. Bemerkend, dass wegen 12⁰) auch:

$$p^\varkappa b_1 = p^\varkappa a b_1 \quad \text{und} \quad q^\varkappa a_1 = q^\varkappa b a_1$$

sein muss, wollen wir die Abkürzungen einführen, zu nennen:

16⁰) $$p^\varkappa a = r^\varkappa, \qquad q^\varkappa b = s^\varkappa \quad \text{für} \quad \varkappa = 1, 2, \ldots n.$$

Dann lautet die zu erledigende Frage: ob oder wann es unter der Voraussetzung P, das ist

17⁰) $$(a + \dot{b} = 1)\prod_1^n{}_\varkappa (r^\varkappa + s^\varkappa \neq 0)$$

ein Gebiet, eine Klasse u geben wird, welche erfüllt die Forderung S, das heisst die Forderung:

18⁰) $$\prod_1^n{}_\varkappa (r^\varkappa b_1 + s^\varkappa a_1 + r^\varkappa u + s^\varkappa u_1 \neq 0).$$

Führen wir auch noch für die nachfolgend in Klammer gesetzten Aussagen zur Abkürzung die beigesetzten Namen ein:

19⁰) $$(r^\varkappa b_1 + s^\varkappa a_1 \neq 0) = C^\varkappa, \qquad (r^\varkappa u + s^\varkappa u_1 \neq 0) = D^\varkappa,$$

so lautet unsre Forderung:

20⁰) $$\prod_1^n (C^\varkappa + D^\varkappa).$$

Oder, wenn:

21⁰) $$r^\varkappa b_1 + s^\varkappa a_1 = c^\varkappa, \qquad r^\varkappa u + s^\varkappa u_1 = d^\varkappa$$

genannt wird, sodass:

22⁰) $$C^\varkappa = (c^\varkappa \neq 0), \qquad D^\varkappa = (d^\varkappa \neq 0)$$

bedeutet, so soll also für jedes $\varkappa = 1, 2, \ldots n$ entweder $c^\varkappa \neq 0$ oder $d^\varkappa \neq 0$ sein — in Anbetracht, dass $(c + d \neq 0) = (c \neq 0) + (d \neq 0)$.

Ist jenes der Fall, d. h. (sooft für ein bestimmtes $\varkappa$) gilt $C^\varkappa$, ist also $C^\varkappa = 1$, so wird auch
$$C^\varkappa + D^\varkappa = 1 + D^\varkappa = 1$$
sein ganz ohne Rücksicht darauf, ob $D^\varkappa$ gilt ($= 1$ ist) oder nicht gilt ($= 0$ ist).

Eine wirklich an u zu stellende Anforderung wird also ein Faktor von S nur dann statuiren, nur für diejenigen $\varkappa$ aussprechen, für welche $C^\varkappa$ nicht gilt, das heisst $C_1^\varkappa$ gilt*) oder
$$c^\varkappa = 0, \qquad r^\varkappa b_1 + s^\varkappa a_1 = 0$$
ist. Erst für solchen Fall wird die Forderung $D^\varkappa = 1$ einzuspringen haben oder $d^\varkappa \neq 0$ durch geeignete Bestimmung von u zu erfüllen sein.

Wir haben hienach die verschiedenen Fälle durchzugehen, die in Bezug auf das Verschwinden (Nichterfülltsein) oder Nichtverschwinden (Erfülltsein) der Aussagen $C^1, C^2, \ldots C^n$ denkbar sind, oder — wissenschaftlicher zu reden — wir haben uns die ganze Mannigfaltigkeit 1 der möglichen Fälle gemäss § 19 zu „entwickeln" nach diesen n Symbolen als Argumenten um sodann bei jedem der 2^n Glieder dieser Entwickelung zuzusehen, welche Forderungen auf Grund dieser Gliederaussage als einer geltend angenommenen Voraussetzung die Bedingung S an u stellt, und wann sie durch ein solches erfüllbar ist.

Jedes Glied besagter Entwickelung ist von der Gestalt des Produktes sämtlicher $C^\varkappa$ Aussagen:

23⁰) $$C^1 C^2 \ldots C^n$$

— in diesem nur irgendwelche mit Negationsstrich versehen, und ist jenes mit solchen auf jede erdenkliche Weise versehen oder nicht versehen und als Glied der Summe 1 hingesetzt zu denken.

*) Unter $C_1^\varkappa$ verstehen wir die Negation $(C^\varkappa)_1$ von $C^\varkappa$.

Verstehen wir unter

$$(n)_h = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots (n-h+1)}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots h}$$

den „*Binomialkoeffizienten* zum *Exponenten* n und vom *Index* h“, unter $(n)_0$, $= (n)_n$, die Zahl 1 verstehend, so ist bekanntlich:

$$2^n = 1 + (n)_1 + (n)_2 + \cdots + (n)_{n-1} + (n)_n$$

und gibt das allgemeine Glied $(n)_h$ der rechten Seite an: die Anzahl derjenigen Glieder jener Entwickelung, in welchen genau h von den n Faktoren C^x ohne Negationsstrich auftreten; wo nebenbei gesagt auch stets $(n)_{n-h} = (n)_h$ sein wird, also andrerseits auch ebensoviele Glieder *mit* h negirten Faktoren vorkommen werden.

Es stelle nun

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_h$$

irgend eine Kombination („zur $h$ten Klasse“ und „ohne Wiederholungen“) hervorgehoben aus den „Elementen“

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ n$$

vor [und später

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots\ \beta_{n-h}$$

das System, die Kombination, der $n-h$ dann übrig gebliebenen von diesen n Elementen] — unter h irgendeine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots n$ verstanden (wobei für $h = 0$ jene erstere Kombination, für $h = n$ diese letztere ein leeres System bedeutet). So ist die laut S an die Voraussetzung:

$$C_1^{\alpha_1} C_1^{\alpha_2} \ldots C_1^{\alpha_h} \quad \text{oder} \quad \prod_\alpha C_1^\alpha$$

zu knüpfende Forderung diese:

$$D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} \ldots D^{\alpha_h} \quad \text{oder} \quad \prod_\alpha D^\alpha$$

und hinsichtlich ihrer Erfüllbarkeit durch u zu untersuchen.

Die in der Arithmetik zumeist mit $C^{(h)}(1, 2, \ldots n)$ bezeichnete $h$te Klasse der Kombinationen ohne Wiederholungen aus den Elementen 1, $2, \ldots n$ kann man sich auch in Gestalt einer „kombinatorischen Summe“ vollständig hinschreiben, und zwar ist diese Klasse der „geordneten“ Kombinationen:

$$24^0)\qquad \sum_{1}^{n+1-h}{}^{\alpha_1} \sum_{\alpha_1+1}^{n+2-h}{}^{\alpha_2} \sum_{\alpha_2+1}^{n+3-h}{}^{\alpha_3} \cdots \sum_{\alpha_{h-2}+1}^{n-1}{}^{\alpha_{h-1}} \sum_{\alpha_{h-1}+1}^{n}{}^{\alpha_h} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_{h-1} \alpha_h$$

selbst eine wohlgeordnete, wofern man nur die Summationsvariabeln ihre Werte je von der untern zur oberen Grenze durchlaufen lässt. Zum Beispiel:

$$C^{(3)}(1, 2, 3, 4, 5) =$$

$$= \sum_{1}^{3}{}_{\alpha_1} \sum_{\alpha_1+1}^{4}{}_{\alpha_2} \sum_{\alpha_2+1}^{5}{}_{\alpha_3} \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \begin{array}{l|l|l} 123 & 234 & 345. \\ +124 & 235 & \\ +125 & 245+ & \\ +134 & & \\ +135+ & & \\ +145+ & & \end{array}$$

Die Kombinationen selbst wurden hierbei durch einfaches (gleichsam multiplikatives) Nebeneinanderstellen der in sie eingehenden Elemente angedeutet, die „Klasse" derselben durch additive Verknüpfung aus diesen Kombinationen zusammengesetzt.

Es würde hienach auch keiner Schwierigkeit unterliegen, nur höchstens umständlich werden, wollte man sich die Glieder besagter Entwickelung, übersichtlich geordnet nach der Zahl der in ihnen voraussetzungsmässig verschwindenden Faktoren $C^\varkappa$, wirklich vollständig hinschreiben.

Stellt S^λ ein solches Glied vor, und bedingt die Geltung desselben, dass eine gewisse („Partial"-)Klausel K^λ als Konsequenz (und hinreichende Bedingung dafür dass es dann ein S^λ erfüllendes u gebe) erfüllt sein muss, so haben wir

$$S^\lambda \Subset K^\lambda \quad \text{für} \quad \lambda = 1, 2, 3, \ldots 2^n,$$

somit

$$S^\lambda = S^\lambda K^\lambda \Subset K^\lambda,$$

oder auch nach dem modus ponens dargestellt:

$$(S^\lambda \Subset K^\lambda) = 1, \qquad S^\lambda = S^\lambda \cdot 1 = S^\lambda (S^\lambda \Subset K^\lambda) \Subset K^\lambda$$

und dazu:

$$1 = \sum_{1}^{2^n}{}_\lambda S^\lambda,$$

mithin:

$$25^0) \qquad \sum_{1}^{2^n}{}_\lambda S^\lambda K^\lambda = \sum_{1}^{2^n}{}_\lambda S^\lambda (S^\lambda \Subset K^\lambda)$$

als vollen Ausdruck der gesuchten *Gesamtklausel* K unsres Problemes. Mit Worten:

A priori trifft jedenfalls eine der Voraussetzungen S^λ zu. Als Konsequenz derselben muss auch K^λ gelten, und umgekehrt, wenn K^λ gilt, so war als erkannt vorausgesetzt dass S für den Fall S^λ erfüllbar ist durch ein u. Also wird wenn K gilt (dilemmatischer Schluss)

S jedenfalls durch ein u erfüllbar sein; auch musste, wenn S gilt, K gelten, d. h. K ist die gesuchte Klausel.

Den Zusatz des Faktors K^λ oder $(S^\lambda \Subset K^\lambda)$ zum Gliede S^λ im Ausdruck dieses K wird man natürlich sparen in allen den Fällen, wo sich K^λ als $= 1$, das ist als ohnehin erfüllt herausstellt, wo nämlich im Falle S^λ *keine* weitere Anforderung, als etwa die: $0 = 0$, an die Parameter von S zu stellen ist und resultirt.

Es kommt demnach nur mehr auf die Ermittelung jener „Partialklauseln" K^λ an.

Diese werden wirklich $= 1$ in wenigstens $1 + n$ von den 2^n Fällen.

Gilt nämlich S^1, als das Anfangsglied besagter Entwickelung, oder:

$$C^1 C^2 \dots C^n$$

selbst, so werden, wie oben ausgeführt, *sämtliche* Faktoren S in 18°) schon gleich 1 sein, und fällt jegliche Anforderung an u ohnehin fort.

Gilt ferner (für $\alpha = 1, 2, \dots n$):

$$S^{\alpha+1} \quad \text{oder} \quad C^1 C^2 \dots C^{\alpha-1} C_1^{\alpha} C^{\alpha+1} \dots C^n$$

d. h. ist *nur einer* der Faktoren $C^\varkappa$ mit Negationsstrich versehen erfüllt, die übrigen ohne solchen, so wird im Ausdrucke von S nur durch den einen Faktor $C^\alpha + D^\alpha$, welcher sich auf $0 + D^\alpha$, $= D^\alpha$ reduzirt, eine Anforderung an u gestellt, die nämlich, dass $r^\alpha u + s^\alpha u_1 \neq 0$ werde, und diese ist ohne weiteres erfüllbar, sintemal laut P ja $r^\alpha + s^\alpha \neq 0$ war, sonach von den beiden Termen r^α und s^α höchstens einer verschwinden konnte. Und braucht man, um dies einzusehen nur von dem (von einem) nicht verschwindenden dieser beiden Terme in Gedanken ein Individuum zu dem als Faktor zu ihm hinzutretenden Gebiete u resp. u_1 zu schlagen; so wird das Produkt denn in der That auch mindestens dieses Individuum enthalten, und $\neq 0$ sein. Auch rechnerisch zeigt die Annahme:

$$u = r s_1 v_1 + (r + s_1) v$$

dass wirklich stets

$$r u + s u_1 = r + s \quad \text{somit} \neq 0$$

hier gemacht werden kann (für die obern Indices α oder — genauer — α_1, von r und s).

Die eben erledigten Fälle entsprachen den Kombinationen zur $h = 0^{\text{ten}}$ und zur $h = 1^{\text{ten}}$ Klasse (der negirten Symbole $C^\varkappa$).

Für $h = 2$, wo also zwei Faktoren $C^\varkappa$ in 19°) mit Negationsstrich versehen auftreten, wird ein Fall vorliegen, welcher sich seinem Schema nach mit der, unsrer allgemeinen Betrachtung als einfachstes

Beispiel vorausgeschickten Spezialuntersuchung deckt. Hier muss nämlich für S^λ als $C_1^{\alpha_1} C_1^{\alpha_2} C^{\beta_1} C^{\beta_2} \ldots C^{\beta_{n-2}}$ erfüllt werden:

$$D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} \quad \text{oder} \quad (r^{\alpha_1} u + s^{\alpha_1} u_1 \neq 0)(r^{\alpha_2} u + s^{\alpha_2} u_1 \neq 0)$$

und wurde erkannt, dass wenigstens in zweien der vier hiebei zu unterscheidenden Unterfälle

$$(r^{\alpha_1} \neq 0)(r^{\alpha_2} \neq 0), \qquad (s^{\alpha_1} = 0)(r^{\alpha_2} = 0)(r^{\alpha_1} \neq 0)(s^{\alpha_2} \neq 0),$$

$$(r^{\alpha_1} = 0)(s^{\alpha_2} = 0)(s^{\alpha_1} \neq 0)(r^{\alpha_2} \neq 0), \qquad (s^{\alpha_1} \neq 0)(s^{\alpha_2} \neq 0)$$

eine Klausel auftritt, fordernd, dass im zweiten resp. dritten derselben die Klassen r^{α_1} und s^{α_2} resp. s^{α_1} und r^{α_2} nicht in einunddasselbe Individuum degeneriren dürfen.

Wenn so überhaupt in einem Gliede besagter Entwickelung der 1 irgendwelche 2 bis n Faktoren $C^\varkappa$ negirt als Faktoren auftreten, das Nichterfülltsein dieser Annahmen $C^\varkappa$ zur Voraussetzung stempelnd, so werden auch bedingte Klauseln sich der Konklusion beigesellen.

Es genügt von diesen Fällen nur den noch in's Auge zu fassen, welcher der $h = n^{\text{ten}}$ Kombinationsklasse entspricht, indem dieser für die übrigen vorbildlich ist. Hier haben wir also das *letzte* Glied besagter Entwickelung, nämlich

$$C_1^1 C_1^2 \ldots C_1^n \quad \text{oder} \quad \prod_1^n{}_\varkappa (c^\varkappa = 0), \qquad = \left(\sum_1^n{}_\varkappa c^\varkappa = 0 \right) \text{ gleich}$$

$$26^0) \qquad b_1 \sum_1^n{}_\varkappa r^\varkappa + a_1 \sum_1^n{}_\varkappa s^\varkappa = 0$$

als Annahme zugrunde zu legen [woraus sich, nebenbei gesagt, auch in Verbindung mit $a_1 b_1 = 0$ *keine* Relation für die $r^\varkappa$ und $s^\varkappa$ durch Elimination von a und b ergibt]. Und die Forderung S schliesst in sich, dass dann u sich so bestimmen lassen müsse, dass

$$D^1 D^2 \ldots D^n = \prod_1^n{}_\varkappa (d^\varkappa \neq 0)$$

oder

$$27^0) \qquad \prod_1^n{}_\varkappa (r^\varkappa u + s^\varkappa u_1 \neq 0)$$

erfüllt sei.

Für die übrigen Werte von h als $2, 3, \ldots n - 1$ sind die Annahmen und Forderungen vom gleichen Baue, nur dass $\varkappa$ dann weniger Werte zu durchlaufen hat als Produktations- und Summationsvariable. Es werden die an den letzten Fall anzuknüpfenden Schlüsse dann

gleichsam nur für ein niedrigeres n in Anspruch zu nehmen sein, wobei aber eine solche Bezeichnungsweise der Terme vorliegt, dass die Indices $\varkappa$ der in Betracht kommenden nicht mehr eine reine Sequenz, sondern eine solche nur *mit Auslassungen* bilden.

Wird der allgemeine Faktor von 27°) in $(r^\varkappa u \neq 0) + (s^\varkappa u_1 \neq 0)$ zerlegt, so zerfällt das Produkt durch Ausmultipliziren in die Alternative von Termen:

$$28^0)\quad \sum_{\alpha, \beta} (r^{\alpha_1} u \neq 0)(r^{\alpha_2} u \neq 0) \cdots (r^{\alpha_h} u \neq 0) \cdot (s^{\beta_1} u_1 \neq 0) \cdots (s^{\beta_{n-h}} u_1 \neq 0)$$

wo die Summe sich zu erstrecken hat über die sämtlichen Wertsysteme $\alpha_1, \alpha_2, .. \alpha_h$ welche als Kombinationen zur h^{ten} Klasse (für $h = 0, 1 .. n$) aus der Sequenz $1, 2, 3, .. n$ hervorhebbar sind, und $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-h}$ allemal die zugehörige Kombination $n - h^{\text{ter}}$ Klasse vorzustellen hat, welche die $n - h$ übrigen Terme jener Sequenz vorstellen werden.

Es braucht hier nur das allgemeine Glied dieser Summe auf seine Konsequenzen einschliesslich der zugehörigen Klausel untersucht zu werden. Das heisst, wenn wir noch $n - h = k$ kürzer nennen, wo dann $h + k = n$ sein wird, so ist typisch für die allein noch zu erledigende Klasse von Problemen: die Aufgabe, zu ermitteln, welche Bedingung für die Parameter:

$$29^0)\quad \begin{matrix} r^1, & r^2, & .. r^n \\ s^1, & s^2, & .. s^n \end{matrix}$$

des Problems erforderlich und hinreichend ist, damit es ein Gebiet u gebe, welches die Forderung erfüllt:

$$30^0)\quad (r^1 u \neq 0)(r^2 u \neq 0) \cdots (r^h u \neq 0) \cdot (s^{h+1} u_1 \neq 0) \cdots (s^{h+k} u_1 \neq 0).$$

Notwendig oder erforderlich, unerlässlich ist die Bedingung:

$$31^0)\quad (r^1 \neq 0)(r^2 \neq 0) \cdot\cdot (r^h \neq 0) \cdot (s^{h+1} \neq 0) \cdot\cdot (s^n \neq 0),$$

da $\quad (r^\varkappa u \neq 0) \mathrel{=\!\!\!\in} (r^\varkappa \neq 0) \quad$ und $\quad (s^\lambda u_1 \neq 0) \mathrel{=\!\!\!\in} (s^\lambda \neq 0)$ —

welche Bedingung als die unter P mitzugelassene Möglichkeit anzusehen ist, in welcher die aufzusuchende Klausel in Betracht kommen wird. Diese Bedingung wird aber eventuell eben noch weiter zu verklausuliren sein damit sie auch eine hinreichende werde.

Nichts weiter wird ihr hinzuzufügen sein, wenn von den in 28°) zusammengefassten Forderungen der zweierlei Arten $r^\varkappa u \neq 0$ und $s^\varkappa u_1 \neq 0$, welche wir durch den Punkt getrennt haben, die eine Art unvertreten ist, d. h. also für $h = 0$ (wo $k = n$), resp. für $k = 0$ (wo

$h = n$ ist). In diesen Fällen kommen nur die Parameter der einen Zeile von 29°) in Betracht, und genügt es im ersten Falle:

$$u_1 = s^1 + s^2 + \cdots + s^n,$$

im letzteren:

$$u = r^1 + r^2 + \cdots + r^n$$

zu nehmen um hinzubringen, dass für jedes $\varkappa$:

$$s^\varkappa u_1, \quad = s^\varkappa, \quad \neq 0 \quad \text{resp.} \quad r^\varkappa u, \quad = r^\varkappa, \quad \neq 0$$

werde.

Anders verhält es sich in den übrigen Fällen wo Ungleichungen der einen Art, die sich auf u beziehen zusammentreffen mit solchen der andern Art, die auf u_1 bezüglich. Hier möge nun:

32°) $$r^1 + r^2 + \cdots + r^h = r, \qquad s^{h+1} + s^{h+2} + \cdots + s^n = s$$

genannt werden, wobei nicht aus dem Gedächtniss zu verlieren sein wird, dass nach 31°) die sämtlichen Glieder dieser Summen r und s von 0 verschieden sind.

Haben r und s keinen Teil gemein, ist $rs = 0$, so ist es leicht, u so anzunehmen dass die Forderung 30°) erfüllt wird: Man lasse u einfach r einschliessen und s ausschliessen, sodass

$$(r \Subset u)(s \Subset u_1), \quad = (ur = r)(u_1 s = s), \quad = (u_1 r = 0)(us = 0) = (su + ru_1 = 0)$$

ist. Wegen

$$r^\varkappa \Subset r \quad \text{also} \quad r^\varkappa r = r^\varkappa$$

ist dann auch

$$r^\varkappa u = r^\varkappa ru = r^\varkappa r = r^\varkappa \neq 0, \quad \text{ebenso} \quad s^\varkappa u_1 = s^\varkappa \neq 0$$

für die Werte $\varkappa = 1, 2, \ldots h$ resp. $h + 1, \ldots n$ dieses Index.

Eine Klausel kann daher nur für $rs \neq 0$ in Betracht kommen. Es möge für den Augenblick

$$rs = t$$

heissen, sodass $t \neq 0$. Und es bedeute hiernächst immer $\varkappa$ irgend einen der Indices $1, 2, \ldots h$ von r, dagegen λ einen der Indices $h + 1$, $h + 2, \ldots h + k = n$ von s.

Alsdann kann es sich ereignen, dass alle oder einige der Aggreganten $r^\varkappa$ von r sowie der Aggreganten s^λ von s über t hinausgreifen, sodass für gewisse $\varkappa$, λ ist:

$$r^\varkappa t_1 = r^\varkappa s_1 \neq 0, \qquad s^\lambda t_1 = s^\lambda r_1 \neq 0.\text{*)}$$

Diese hinübergreifenden Teile der erstern Sorte oder r-Reihe sind

*) Wegen $t_1 = r_1 + s_1$ und $r^\varkappa r_1 = 0$, d. h. $r^\varkappa \Subset r$, etc.

dann sämtlich disjunkt denen der letzteren Sorte oder der s-Reihe, weil in den einander ausschliessenden Gebieten r_1 und r_1, desgleichen auch in denen s_1 und s, enthalten — cf. § 46, 2. Hülfssatz. Hierauf beruht es dass man in Bezug auf sie jedenfalls die Forderungen erfüllen kann, welche 30⁰) in sich schliesst, indem man nämlich die $r^\varkappa s_1$ zu u, die $s^\lambda r_1$ zu u_1 schlägt. Die betreffenden Aggreganten können dann einfach samt den auf sie bezüglichen Faktorungleichungen der Forderung 30⁰) aus der ganzen Betrachtung fortgelassen werden und wird nur mehr darnach zu trachten sein: durch geeignete Verteilung auf u und u_1 des Bestandes der dann gänzlich *innerhalb* t fallenden Individuen der übrigen r und s Aggreganten auch den Rest der auf sie bezüglichen in 30⁰) als Faktorungleichungen ausgedrückten Anforderungen zu erfüllen. Dass heisst: man hat die Aufsuchung der Klausel nur noch für eine Minderzahl von Symbolen und Propositionen weiterzuführen.

Im ungünstigsten Falle kann diese „Minderzahl" allerdings zusammenfallen mit der bisherigen Anzahl n (wo sie natürlich solche Bezeichnung streng genommen nicht verdient hätte). Und diesen Fall wollen wir jetzt voraussetzen und allein noch weiter verfolgen, weil er typisch ist für die andern Fälle, in denen man nur mit weniger Symbolen $r^\varkappa$, s^λ und auf sie bezüglichen Faktoranforderungen sich herumzuschlagen hätte.

Wir setzen also voraus dass von vornherein *keines* der Gebiete $r^\varkappa$ s^λ über t hinausgreife, d. h. dass für jedes $\varkappa$, λ:

$$r^\varkappa s_1 = 0, \qquad s^\lambda r_1 = 0$$

sei. Alsdann ist aber auch:

$$r s_1 = (r^1 + r^2 + \cdots + r^h) s_1 = 0, \qquad s r_1 = (s^{h+1} + \cdots + s^n) r_1 = 0,$$

d. h. wir haben

$$r s_1 + r_1 s = 0$$

oder

$$r = s = r + s = rs = t.$$

Das Problem der Klausel gipfelt hienach in der schwierigen Aufgabe:

Wenn zwei Reihen von nicht verschwindenden Gebieten gegeben sind:

$$r^1, r^2, \ldots r^h, \quad \text{und} \quad s^{h+1}, \quad s^{h+2}, \quad \ldots s^n,$$

derart dass die Gebiete einer jeden von diesen beiden Reihen *zusammen* genau die nämlichen Individuen oder Punkte umfassen, dass nämlich

33⁰) $$r^1 + r^2 + \cdots + r^h = s^{h+1} + s^{h+2} + \cdots + s^n$$

ist, *die Fälle zu charakterisiren, in welchen es unmöglich ist, aus jedem Gebiete $r^\varkappa$ der einen Reihe (mindestens) ein Punktindividuum zu einer Klasse u und zugleich aus jedem Gebiete s^λ der andern Reihe (mindestens) ein Punktindividuum zur Negation u_1 dieser Klasse zu schlagen.**)

Ist es erst gelungen, diese Fälle zu charakterisiren oder vollständig aufzuzählen, so wird es ein leichtes sein, ihre *Ausschliessung* zu fordern, und die Aussage, welche solche Forderung statuirt, wird die betreffende, auf die beim vorliegenden Problem zugrunde gelegten Annahmen bezügliche Teil-Klausel sein.

Vollständig gelingt die Beantwortung dieser Frage in den beiden einfachsten Fällen des jetzt zu erledigenden Problemes, nämlich in denen wo entweder $h = 1$ oder aber $k = n - h = 1$ ist, wo also fast alle Ungleichungsfaktoren zur einen Sorte und nur einer zur andern Sorte gehört.

Ich will dieselbe für den letztern Fall $k = 1$ aussprechen und begründen; alsdann ist nur eine Vertauschung der Buchstaben r und s, sowie von h mit k erforderlich, um die Antwort auch für den andern Fall zu erhalten.

Sei also — $h = n - 1$ gedacht —:

$$r = r^1 + r^2 + \cdots + r^h = s = s^1$$

so lautet die notwendige und hinreichende Bedingung für die Bestimmbarkeit eines solchen u, dass sein Produkt in jedes der $r^\varkappa \neq 0$ und zugleich das Produkt seiner Negation u_1 in das eine $s^1 \neq 0$ ist, wie folgt:

Sind einzelne von den Klassen $r^\varkappa$ singuläre, das ist Individuen, so darf nicht die Summe der übrigen (der nicht singulären) *Klassen $r^\varkappa$ eingeordnet sein der Summe von allen diesen.*

Da jene Summe 0 wäre, wenn kein $r^\varkappa$ mehr übrig, nämlich *alle* $r^\varkappa$ Individuen wären, und die 0 jedem Gebiete eingeordnet ist, so ist hiemit insbesondre auch der Fall ausgeschlossen, wo alle $r^\varkappa$ Individuen wären. —

Dass obige Bedingung *notwendig* ist, erkennt man so. Ist sie nicht erfüllt, ist also die Summe der nicht singulären Klassen der r-Reihe in der Summe ihrer singulären Klassen enthalten, so muss $\Sigma r^\varkappa$ oder r ganz in u hineinfallen. Jede singuläre Klasse $r^\varkappa$ muss nämlich als das einzige in ihr zur Verfügung stehende Individuum unweiger-

*) Dies habe ich schon in [6] der unter meinem Namen im Literaturverzeichniss angeführten Schriften mitgeteilt.

lich zu u geschlagen werden, $\subseteq u$ sein; dasselbe ist dann auch mit der Summe aller singulären r^x, und da in dieser die Summe der übrigen laut Annahme schon enthalten ist mit der Summe aller r^x der Fall. Nun haben wir $r \subseteq u$, und wegen $r = s^1$ auch $s^1 \subseteq u$ oder $s^1 u_1 = 0$; unmöglich bleibt es hienach zu bewirken, dass $s^1 u_1 \neq 0$ werde, q. e. d.

Dass sie *hinreicht,* beweise ich so. Sind eventuell einzelne r^x Individuen, so bilde man deren Summe und schlage sie zu u (eventuell ist sie 0). Für jede Klasse r^x (eventuell keine), welche mit dieser Summe wertgemein ist, ein Individuum gemein hat, ist dann sicher die Forderung $r^x u \neq 0$ erfüllt.

Da jedoch nach der Annahme die übrigen r^x nicht alle eingeordnet jener Summe sein können (weil sonst auch deren Summe es sein müsste) so greift mindestens eines dieser r^x über jene Summe hinaus (liegt eventuell ganz ausserhalb derselben). Dann braucht man nur *ein* Individuum aus dem hinausgreifenden Teil (resp. dem ganz ausserhalb liegenden r^x) zu u_1 zu schlagen, um für s^1 die Forderung $s^1 u_1 \neq 0$ erfüllt zu haben.

Diejenigen Klassen r^x, für welche die Forderung $r^x u \neq 0$ dann noch zu erfüllen bleibt, liegen durchweg ganz ausserhalb jener Summe der singulären Klassen r^x, und da sie ihrerseits nicht singulär sind, enthält eine jede derselben mindestens zwei Individuen, sonach ausser dem bereits zu u_1 geschlagenen Individuum (wenn sie dieses überhaupt enthielt) noch mindestens ein neues Individuum (eventuell als ein ihrer mehrern oder sämtlichen gemeinsames), und man braucht nun blos das letztere je noch zu u zu schlagen um alle Forderungen durchweg erfüllt zu haben, q. e. d.

Beispielsweise würde so die *„Konjunktur“* oder spezielle Zusammensetzungsweise der (‚Individuenverteilung auf die) Klassen der r-Reihe:

$$r^1 = i^1,\ r^2 = i^2,\ r^3 = i^3,\ r^4 = i^1 + i^2,\ r^5 = i^1 + i^3 \mid s^1 = i^1 + i^2 + i^3$$

— desgleichen mit $r^5 = i^1 + i^2 + i^3$, etc. (bei $h = 5$, $k = 1$) *unzulässig* sein. Dagegen die Konjunktur:

$$r^1 = \underline{i}^1,\quad r^2 = \underline{i}^2,\quad r^3 = \underline{i}^1 + \underline{i}^2,\quad r^4 = \underline{i}^1 + \underline{\underline{i}}^3,\quad r^5 = \underline{i}^2 + \underline{\underline{i}}^3 \mid s^1 = \underline{i}^1 + \underline{i}^2 + \underline{\underline{i}}^3$$

würde zulässig sein, und wären blos die einmal unterstrichenen Individuen zu u, das zweimal unterstrichene zu u_1 zu schlagen.

Das hier bethätigte Verfahren des einmaligen Unterstreichens von jedem notwendig zu u und des zweimaligen von jedem ersichtlich zu u_1 zu schlagenden Individuum empfiehlt sich sehr, wenn man eine vorgelegte Konjunktur schnellstens auf ihre Zulässigkeit prüfen will. Die Fälle wo ein zwingender Grund vorliegt, sich für das eine oder andere zu entscheiden

(nämlich ein bestimmtes i entweder zu u oder zu u_1 zu schlagen), hat man vorweg aufzusuchen, die Ansätze nötigenfalls auch ausser der Reihe überfliegend (skimming), um dann nur noch bei den übrigen Individuen, bei denen solch zwingender Grund nirgends zutage tritt, alle Möglichkeiten ausprobiren zu müssen. Unzulässig wird die Konjunktur sein, wenn ein Individuum übrig bleibt oder man schon vorher auf ein solches stösst, bei welchem einerseits die Nötigung es nur einmal zu unterstreichen zusammentrifft mit der kategorischen Forderung, es zweimal zu unterstreichen — wofern dabei nur alle Möglichkeiten, wo vielleicht die Entscheidung in unser Belieben gestellt schien, auch durchprobirt worden. Andernfalles, nämlich wenn man ohne solchen Konflikt mit Unterstreichen aller Individuen zu Ende zu kommen vermag, wird die Konjunktur als zulässig erwiesen und zugleich eine Bestimmungsweise von u, die alle Forderungen erfüllt, gefunden sein.

Als ein wesentlicher Bestandteil der Klausel wurde oben der Satz gefunden:

Besteht die eine der beiden Parameter-Reihen (Gebieten oder Klassen $r^{\varkappa}$, s^{λ}) *aus nur einem solchen Aggreganten, so darf nicht bei der andern Reihe die Summe ihrer nicht singulären Klassen enthalten sein in der Summe ihrer singulären.*

Was nun die Klausel in den Fällen h und $k \gtrless 2$ betrifft, so lassen gewisse von den bereits statuirten Anforderungen als notwendige sich auch allgemein begründen.

Niemals wiederum dürfen alle Aggreganten der einen Reihe Individuen, singuläre Klassen sein. Und es darf auch kein Aggregant der einen Reihe mit einem solchen der andern Reihe zu einem und demselben Individuum zusammenfallen, oder kürzer gesagt: keine singuläre Klasse der einen darf identisch sein mit einer Klasse der andern Reihe.

Nie darf auch ein Aggregant der einen Reihe blos Summe aus lauter singulären Aggreganten der andern Reihe sein — wie unschwer zu rechtfertigen.

Die letzte Forderung involvirt auch die beiden vorhergehenden, macht sie, wie man leicht sieht, überflüssig.

Dass dieselbe aber noch nicht hinreicht, zeigen die Fälle $h = 2$, $k = 2$, sowie $h = 3$, $k = 2$, in welchen ich ausserdem die nachstehenden Konjunkturen als unzulässig ermittelte.

Für

$$r = r^1 + r^2 = s = s^1 + s^2$$

sind noch obendrein unzulässig die beiden Konjunkturen:

$$34^0)\quad \begin{cases} r^1 = i^1, \quad r^2 = i^2 + i^3 & \Big| \quad s^1 = i^2, \quad s^2 = i^1 + i^3 \\ \quad\text{„} \qquad\qquad \text{„} & \Big| \quad s^1 = i^1 + i^2, \quad s^2 = i^1 + i^3 \end{cases}$$

— desgleichen in letzter r und s vertauscht, sowie überhaupt irgend welche Umstellungen mit den (oberen) Indices der r, der s, und der i vorgenommen. Für

$$r = r^1 + r^2 + r^3 = s = s^1 + s^2$$

sind es zum wenigsten auch die folgenden fünfe:

$$35^0)\left\{\begin{array}{l|l} r^1 = i^1,\ r^2 = i^2,\ r^3 = i^3 + i^4 & s^1 = i^3,\quad s^2 = i^1 + i^2 + i^4 \\ r^1 = i^1,\ r^2 = i^2 + i^3,\ r^3 = i^2 + i^4 & s^1 = i^2,\quad s^2 = i^1 + i^3 + i^4 \\ \quad ,, \qquad ,, \qquad ,, & s^1 = i^1 + i^2,\quad s^2 = i^3 + i^4 \\ \quad ,, \qquad ,, \qquad ,, & s^1 = i^1 + i^2,\quad s^2 = i^1 + i^3 + i^4 \\ r^1 = i^1 + i^2,\ r^2 = i^1 + i^3,\ r^3 = i^1 + i^4 & s^1 = i^1,\quad s^2 = i^2 + i^3 + i^4 \end{array}\right.$$

Ausserdem sind aber wieder unzulässig die Fälle in welchen zweie von den drei $r^\varkappa$ mit einem der beiden s eine von den Konjunktnren eingehen, welche bei $h = 2$, $k = 2$ als unzulässig nachgewiesen wurden.

Die Vollständigkeit dieser Liste von Ausnahmen vermag ich indess noch nicht zu verbürgen und lasse das Problem hier stehen — nachdem es jetzt wenigstens bis zum Charakter eines rein kombinatorischen Problems entwickelt worden — in der Hoffnung, dass es durch fernere Forschungen seiner Lösung vollends entgegengeführt werden möchte.

Dass es übrigens zur Unzulässigkeit einer Konjunktur nicht einmal erforderlich ist, dass einzelne Aggreganten zu Individuen zusammenschrumpfen, mag noch das Beispiel zeigen:

$$r^1 = i^1 + i^2, \qquad r^2 = i^2 + i^3, \qquad r^3 = i^3 + i^4, \qquad r^4 = i^1 + i^4 + i^5;$$
$$s^1 = i^1 + i^3, \qquad s^2 = i^1 + i^4, \qquad s^3 = i^2 + i^4, \qquad s^4 = i^2 + i^3 + i^5.$$

Wissen wir, dass für ein unbekanntes u gilt:

$$(r^1 u \neq 0)(r^2 u \neq 0) \cdots (r^4 u \neq 0) \cdot (s^1 u_1 \neq 0) \cdots (s^4 u_1 \neq 0),$$

so wissen wir von den Parametern $r^1, r^2, \ldots r^4, s^1, \ldots s^4$ unter anderm auch sicher, dass dieselben aus fünf Individuen *nicht* auf vorstehende Weise zusammengesetzt sein können und gehört solches Wissen zu der als Resultante der Elimination von u zu bezeichnenden Konklusion.

Als Abkürzung bei Darstellung und Aufsuchung der auszuschliessenden Konjunkturen wird es sich empfehlen eine Schreibweise einzuhalten, die dadurch erläutert werden möge, dass wir in ihr die vorstehend angeführten bisher ermittelten Fälle wiederholend zusammenstellen:

36⁰) 1, 23 | 2, 13; 1, 2, 34 | 3, 124; 12, 23, 34, 145 | 13, 14, 24, 235.
" | 12, 13; 1, 23, 24 | 2, 134
" " | 12, 34
" " . 12, 134
12, 13, 14 | 1, 234;

Um z. B. die Unzulässigkeit der letzten nachzuweisen sind zwei Probeu erforderlich. Die eine

12, 23, 34, 145 | 13, 14, 24, 235

ergibt, dass es unzulässig, das Element 1 des Aggreganteu 12 zum Gebiet u zu schlagen, indem hernach im Hiublick auf den Aggreganten 13 das Element 3 zu u_1 geschlagen werden muss, darnach vom Aggreganten 23 uotwendig das Element 2 zu u zu schlagen ist, und einerseits von 34 das Element 4 zu u, andrerseits von 14 und 24 aber zu u_1 geschlageu werdeu müsste, was den Konfliktsfall ausmacht.

Die audere Probe besteht iu der Verfolgung der Möglichkeit vom Aggreganten 12 das Elemeut 2 zu u zu schlagen:

12, 23, 34, 145 | 13, 14, 24, 235

wonach deun von 24 sicher die 4 zu u_1, darnach von 34 die 3 zu u, von 13 die 1 zu u_1 gehöreu wird und in bezug auf 5 der Kouflikt zutage tritt, dass es als letztübriges Element von 145 zu u, als ebeusolches aber von 235 zu u_1 geschlagen werden müsste. —

Auffallen muss es, dass bei den an 27⁰) geknüpften Schlüssen von der Voraussetzung 26⁰) weiter gar kein Gebrauch zu machen gewesen. Die letztere trägt darnach überhaupt nur dazu bei, die Fälle zn charakterisiren, in welchen die ermittelten Klauseln unerlässlich werden, ohne jedoch dabei von irgend einem Einfluss auf diese selbst zn sein. In letztern kommen die Gebiete a und b überhaupt nicht explicite vor, sondern immer nur in den Verbindungen r^x und s^x, in denen sie allerdings als Faktor stecken. —

Ein noch weit schwierigeres Problem als bei *einem* Eliminanden x muss die Vervollständigung unsrer „Resultante aus dem Rohen“ zur vollen Resultante dann darbieten, wenn zwei oder mehr Gebietsymbole oder Klassen $x, y, z, \ldots$ als *simultan* zn eliminirende in Betracht kommen.

Dieser würden streng genommen auch Schlüsse zuzuzählen sein, die sich eventuell ziehen lassen in Bezug auf eine Minimalzahl von Individuen, welche die den Daten zugrunde liegend gedachte Mannigfaltigkeit 1 allermindestens enthalten mnss.

Jedenfalls zeigt die Algebra der Logik auch hierin den Charakter einer echten Wissenschaft, dass sie dem Forschenden gewichtige noch ungelöste Probleme darbietet. —

Vorstehender § 49 war schon tel, quel geschrieben, als mir das Manuskript einer Arbeit des Herrn Voigt zur Mitbegutachtung (Korreferat) überwiesen wurde, der sich auf meine Anregung mit dem oben charakterisirten Probleme beschäftigt hatte von dem Standpunkte aus, auf welchem, nachdem Herr Mitchell [1] (und Miss Ladd [1], vergl. § 54) es zu lösen begonnen, dasselbe durch meine Mitteilung [6] gebracht und gelassen war. Das Erscheinen von Voigt's Doktorarbeit fällt in die Zeit der Drucklegung meines gegenwärtigen zweiten Bandes, dessen so viel grösserer Umfang natürlich eine längere Drucklegungszeit erforderte. Begreiflich wird man manche Anklänge in meinen vorstehenden und den Voigt'schen Betrachtungen finden, wie ich denn schon in § 47 zu konstatiren gehabt (S. 326), dass Herr Voigt mir mit der Publikation meiner Definition und gewisser Sätze vom Individuum, auf welche er selbständig verfallen, zuvorgekommen. [Letzteres würde umgekehrt liegen, wenn ich auf der Heidelberger Naturforscherversammlung die zweite angezeigte Mitteilung nicht wegen vorgerückter Zeit zurückgezogen hätte — cf. [9] ebenda.]

Es ist nicht meine Aufgabe, hier über die mehrseitigen Verdienste der Voigt'schen durchaus lesenswerten Arbeit mich zu verbreiten [auf deren eines ich auch in § 41, S. 209, hinzuweisen Veranlassung hatte]. Ich darf und will mich vielmehr begnügen, die Quintessenz der Voigt'schen Arbeit, soweit sie eben auf jenes Problem Bezug hat, das uns im gegenwärtigen Paragraphen beschäftigte, noch darzulegen und kurzmöglichst zu begründen.

Wenn ein System „eingliedriger partikularer" Forderungen zu erfüllen ist:

$$(xp^1 \neq 0) \cdots (xp^m \neq 0) \cdot (x_1 q^1 \neq 0) \cdots (x_1 q^n \neq 0)$$

und es ist die Zerfällung der Parameter p, q in Individuen *gegeben*, so muss es möglich sein, aus jedem der p mindestens je *ein* Individuum zu x und zugleich aus jedem der q mindestens je *ein* Individuum zu x_1 zu schlagen (wie dies schon weiter oben, sowie in [6] von mir ausgesprochen).

Um dies zu entscheiden, wird also auf jede mögliche Weise aus jedem p ein Individuumglied und zugleich aus jedem q ein solches *auszuheben* und zuzusehen sein, ob und wie die gerade ausgehobnen Individuen aus den p zu x, die aus den q zugleich zu x_1 geschlagen werden könnten.

Alle nur erdenklichen Aushebungsweisen geht man nun nach Voigt durch, wenn man im Hinblick auf die Multiplikationsregel der Polynome die $m + n$ Individuensummen:

$$p^1 p^2 \cdots p^m q^1 q^2 \cdots q^n$$

„formell“ ausmultiplizirt. Das allgemeine Glied des entwickelten (expandirten) Produkts hat die Form:

$$i^1 i^2 \ldots i^m j^1 j^2 \ldots j^n,$$

wenn i^x irgend ein Individuum aus p^x, dagegen j^x eines aus q^x (bei $x = 1, 2, \ldots m$ resp. n) für den Augenblick bezeichnet.

Sooft nun keines der j mit irgend einem der i identisch ist, mit welchen es zusammen ausgehoben worden und vorstehend zu einem Einzelprodukte vereinigt erscheint, kann man sämtliche ausgehobnen i zu x und sämtliche ausgehobnen j zu x_1 schlagen und erhält eine partikulare („elementare“) Lösung (Auflösung nach x) der Prämissenaussage.

Die vorliegende Aushebung ist dagegen unbrauchbar zu solchem Zwecke, sooft eines der j mit einem der i zusammenfällt, *sooft also das Glied*, wegen $ii_1 = 0$ *verschwinden würde, falls man in ihm die j mit Negationsstrich versehen hätte.* [In der vorgängigen Versehung aller j mit Negationsstrichen — schon vor dem Ausmultipliziren — besteht darnach wesentlich Herrn Voigt's „symbolisches Verfahren“, alle Lösungen x zu finden.] Und zwar auch *nur* dann, ausschliesslich in diesem Falle, wird die betrachtete Aushebung unbrauchbar sein (eine Lösung x abzugeben) *vorausgesetzt*, dass man auf das ohnehin eigentlich immer stattfindende Verschwinden jedes identischen Produkts von *verschiedenen* Individuen, wie $i^1 i^2$, welches ja schon $= 0$ wäre, etc. bei jenem „formellen“ Ausmultipliziren *keine Rücksicht nimmt.* --

Vorstehendes ist wol der Kern der von Herrn Voigt gegebenen Lösung des Auflösungs- und Eliminationsproblems — von ihm auch noch auf „mehrgliedrige partikulare Forderungen“ entsprechend ausgedehnt (die er, nebenbei gesagt, ebenso wie universale in Gleichungenform ansetzt mittelst Einführung von 0 resp. 1 *verschieden* zu denkender unbestimmter Klassen).

Jene Arbeit als eine „Lösung“ gedachter Probleme zu bezeichnen ist zutreffend in einem bestimmten Sinne des Wortes, nicht zutreffend in einem andern.

Die Auflösung nach einer Unbekannten x erscheint in der That vollständig geleistet insofern, als ein rein mechanisches Verfahren gegeben ist, als die „Wurzeln“ alle möglichen Arten aufzufinden, wie jene Unbekannte aus den in die Parameterklassen p, q eingehenden Individuen überhaupt zusammengesetzt werden kann. Vermissen lässt die „Lösung“ dagegen einen ebendiese Wurzeln übersichtlich zusammenfassenden Gesamtausdruck: also eine allgemeine Formel für die Wurzel.

Das Eliminationsproblem aber erscheint nur insofern „gelöst“, als die *Zusammensetzung der Parameterklassen p, q aus Individuen* als eine gegebene angesehen, dabei *benutzt* werden darf. Die Resultante tritt alsdann in

Gestalt der Forderung auf, dass das obige Verfahren zur Auffindung sämtlicher Wurzeln nicht durchweg versage, dass nicht sämtliche Glieder jenes durch „formelles" Ausmultipliziren zu gewinnenden Aggregates verschwinden. Und wenn hienach Herr Voigt die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von Wurzeln auch ganz richtig formulirt, so erscheint solche Formulirung doch immer noch als eine *zu nahe* Umschreibung der Aufgabenstellung selber. Jede rein analytische Lösung eines formal-logischen Problemes wird ja denknotwendig hinauslaufen auf eine blosse Transformation („Umschreibung") dessen, oder eines Teils von dem, was in den Daten des Problems implicite statuirt war. Und so trifft der Begriff der Lösung für unser Eliminationsproblem auch hier schon in einem gewissen Sinne zu. Ohne damit den Verdiensten der Voigt'schen Arbeit zu nahe treten zu wollen, muss ich aber betonen, dass solche Lösung in einem rigoroseren Sinne immer noch zu wünschen bleibt:

Es bleibt die „Klausel" oder vollständige Resultante der Elimination des x noch zu ermitteln in Gestalt einer solchen Aussage, welche von den Parameterklassen p, q *selber* spricht, nicht aber von den in diese eingehenden Individuen, welche vielmehr eben die durch die Data des Problems den p, q in Hinsicht ihrer zulässigen Zusammensetzungsweisen aus Individuen auferlegten Beschränkungen in Gestalt einer von diesen p, q selbst zu erfüllenden Bedingung aussagenrechnerisch charakterisirte! [so wie es für den einfachsten Fall mittelst 9^0) S. 381 von uns geschehen].

Die Lösung *dieser* Aufgabe steht noch aus und würde sie mir als der Schlussstein erscheinen, welcher das Gewölbe der zweiten Logiketage abschliesst, ev. deren Kuppelbau krönt. Diese sei darum auch angelegentlich den Forschern empfohlen.


Princeton University Library
32101 047600646